Höhere Ingenieur-Wissenschaften.

Theorie

der

Holz- und Eisen-Constructionen,

mit

besonderer Rücksicht auf das Bauwesen.

Kreisbaureferat
für das Ingenieurfach
Regensburg

Von

Georg Rebhann,

Ingenieur im k. k. österreichischen Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten,
und Docenten am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

WIEN.

Verlag und Druck von Carl Gerold's Sohn.

1856.

Höhere Ingenieur- Wissenschaften.

Theorie

der

Holz- und Eisen-Construction,

mit

besonderer Rücksicht auf das Bauwesen:

Staatl. Bibliothek
Regensburg

G 7H 2442

Vorrede.

Seit dem Jahre 1852 hält der Verfasser mit Genehmigung des hohen k. k. Ministeriums des Cultus und Unterrichtes am k. k. polytechnischen Institute in Wien über einzelne Zweige der höheren Ingenieur-Wissenschaften, insbesondere über die Theorie der Bau-Constructionen, ausserordentliche Vorlesungen, welche von dem hohen k. k. Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten den Candidaten und Beamten der Seinem Ressorte angehörigen technischen Verwaltungszweige empfohlen worden sind.

Das vorliegende Werk enthält denjenigen Theil dieser Vorlesungen, welcher auf die Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen Bezug nimmt, indem sich der Verfasser vorbehält, die Erd- und Stein-Constructionen abgesondert zu behandeln. Dasselbe ist bestimmt, zunächst als Leitfaden für die betreffenden Vorträge zu dienen, ferner aber auch die eben so umfangreichen, wie für die Praxis wichtigen Reformen und Ergänzungen, welche der Verfasser in dem genannten Zweige der Ingenieur-Wissenschaften vorgenommen hat, den weiteren Kreisen der technischen Fachmänner mitzutheilen.

Die wesentlichsten Reformen kommen in der allgemeinen Theorie des Widerstandes gegen Biegung vor, und die Consequenzen hieraus führen in der Folge bei der Anwendung auf die einzelnen Fälle zu bemerkenswerthen Resultaten, welche zuweilen bedeutend von denjenigen abweichen, die nach den älteren Theorien erhalten werden. Während nämlich nach diesen bei der Bestimmung der Form und Lage der sogenannten neutralen Schichte in einem gebogenen Träger durch die anscheinend gestattete Vernachlässigung der Seitenkraft R_2 (Fig. 21, Seite 61) ein nicht unbedeutender Irrthum

veranlasst werden kann, wie diess die im §. 49 zusammengestellten Eigenschaften für die neutrale Schichte im Vergleiche mit der gewöhnlichen Meinung hierüber deutlich erkennen lassen, findet der Verfasser ausserdem nach den §§. 77 und 83 insoferne ganz eigenthümliche Resultate für das Tragmoment und beziehungsweise Tragvermögen eines solchen Trägers, als die allgemeine Bildung der bezüglichen Formeln nicht nur von der Querschnittsgestalt und von der Art und Weise der Anspruchsnahme des Trägers, sondern auch von der Materialgattung in einer besonderen Weise abhängt. So z. B. kann das Tragvermögen eines Balkens von der Breite b, der Höhe h und der Länge l, wenn derselbe an einem Ende festgehalten und am anderen Ende belastet wird, nicht immer durch die Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, a \frac{b\,h^2}{l}$$

ausgedrückt werden, wenn a die grösste zulässige Spannung (per □″) in den obersten Fasern des Wurzelquerschnittes bedeutet, denn die §§. 77, 78 und 84 zeigen, dass das fragliche Tragvermögen im Allgemeinen durch die Alternativformeln

$$Q = \begin{cases} \text{entweder } \tfrac{1}{6}\, a \dfrac{b\,h^2}{l} \\ \text{oder } \tfrac{1}{6}\, r \dfrac{b\,h^2}{l} \end{cases}$$

dargestellt erscheint, worin ausser den vorigen Grössen noch die grösste zulässige Pressung r (per □″) in den untersten Fasern des Wurzelquerschnittes vorkommt. Von den beiden Alternativformeln ist nun jedesmal diejenige in Anwendung zu bringen, welche den kleineren Werth annimmt, wornach diese Wahl augenscheinlich von dem gegenseitigen Verhältnisse zwischen a und r abhängt, welches nach den verschiedenen Materialien eben so veränderlich ist, wie jenes zwischen der sogenannten absoluten und rückwirkenden Festigkeit. Hiernach würde also das Tragvermögen für einen hölzernen Balken unter den obbezeichneten Umständen aus der Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, r \frac{b\,h^2}{l},$$

hingegen für einen gusseisernen aus der anderen Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, a \frac{b\,h^2}{l}$$

zu berechnen sein, weil erfahrungsgemäss für Holz $r < a$, für Gusseisen aber gerade umgekehrt $a < r$ ist. Indem nun nach den älteren Theorien in beiden Fällen stets die Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, a \frac{b\,h^2}{l}$$

anzuwenden wäre, kann man behaupten, dass die gewöhnliche Berechnungsweise des Tragvermögens selbst in dem einfachsten Falle, wo ein hölzerner Balken mit einem rechteckigen Querschnitte in Betracht steht, principiell unrichtig ist. Aehnliche Unrichtigkeiten treten in vielen anderen Fällen ein, und dieselben machen im Vereine mit dem Umstande, dass man Behufs des Vergleiches der Theorie mit der Erfahrung blos dem Verhalten des Trägers im Augenblicke des Bruches die vorzüglichste Aufmerksamkeit zuzuwenden pflegt, obgleich die der Theorie zu Grunde gelegenen Sätze bis dahin nicht als giltig betrachtet werden können, die Thatsache leicht erklärlich, dass die aus den bezüglichen Formeln berechnete Bruchbelastung, wenn man statt a die absolute Festigkeit des Materiales substituirt, mit den Versuchen nicht befriedigend übereinstimmen. Dieser Uebelstand ist längst bekannt, ohne dass seine nachtheiligen Folgen anders als dadurch zu beseitigen gesucht wurden, dass man den Coefficienten a nicht aus den directen Versuchen über die absolute Festigkeit, sondern vielmehr auf indirecte Weise aus den Versuchen über die relative Festigkeit abgeleitet hat, sodann aber zur Erzielung eines praktischen Resultates von den Verhältnissen des Bruches erst rückwärts auf das Tragvermögen zu schliessen versuchte. Kurz, mittelst einer angemessenen Modification des Coefficienten a schien man die Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung ausgleichen zu können, ohne dieser Abweichung selbst eine nähere Aufmerksamkeit zuwenden zu müssen, indem man dabei von der Ansicht ausging, durch die Einführung von derartigen Erfah-

rungs-Coefficienten in den betreffenden Formeln für die Praxis genug gethan zu haben. Dieses ist indessen keineswegs der Fall. Einerseits erscheinen die Differenzen zwischen den Resultaten der directen und indirecten Bestimmung der Werthe für a in manchen Fällen sehr bedeutend, und dieselben sind ausserdem mit der Querschnittsform mehr oder weniger verschieden, so dass z. B. der aus dem Bruche eines massiven vierkantigen Balkens abgeleitete Erfahrungs-Coefficient in der Anwendung auf eine vierkantige oder cylindrische Röhre aus demselben Materiale nicht mehr die nöthige Verlässlichkeit darbieten wird; andererseits aber ergeben sich auch bei der Vergleichung der älteren Theorien unter einander, so wie mit der Erfahrung so wesentliche Anomalien, dass man oftmals bei der Bestimmung des Tragvermögens eines Trägers ganz irre geleitet werden kann. Was soll man z. B. davon halten, wenn man findet, dass das Tragvermögen eines dreikantigen Balkens in den zwei Fällen, wo die Spitze des dreieckigen Querschnittes einmal nach abwärts, das andere Mal nach aufwärts gekehrt ist, nach der Navier'schen Theorie unverändert bleibe, hingegen die Formeln Redtenbacher's eine Veränderung dieses Tragvermögens im Verhältnisse wie 1:2 in Aussicht stellen, während man auf dem praktischen Wege der Versuche wieder ein anderes Resultat erhält; und wenn überhaupt ähnliche Unterschiede in allen solchen Fällen zum Vorschein kommen, wo der Schwerpunct des Balkenquerschnittes nicht in die halbe Höhe desselben fällt, was oft bei sehr wichtigen Querschnittsformen, wie etwa bei den einfachen und doppelten ⊤ Formen stattfinden kann.

Solche Wahrnehmungen zeigen zur Genüge, dass die älteren Theorien in der Praxis nicht vollkommen entsprechen, und zwar um so weniger, als das Bedürfniss der Anwendung von Eisenconstructionen in grossem Massstabe sich immer mehr steigert, und nicht über alle Constructionen gleich im Vorhinein verlässliche Erfahrungs-Resultate vorliegen können, so dass man oft in den wichtigsten Fällen darauf angewiesen ist, die Güte einer Bauconstruction blos nach wissenschaftlichen Grund-

sätzen im Vereine mit einigen praktischen Schätzungen zu beurtheilen.

Solche Wahrnehmungen müssen ferner auf die nähere Erörterung der Ursachen führen, die jene vorerwähnten Differenzen erzeugen, und sie beweisen endlich die Nothwendigkeit einer entsprechenden Verbesserung der bezüglichen Theorie.

In dem vorliegenden Werke ist sowohl die Frage hinsichtlich jener Ursachen befriedigend beantwortet, als auch die Theorie selbst mit der nöthigen Verbesserung gegeben, wodurch man zugleich die Ueberzeugung erlangt, dass eigentlich keine der älteren Theorien die angemessene ist, obgleich sie in der allgemeinen Lehre, wie solche von dem Verfasser durchgeführt wird, als specielle Theile enthalten sind, so dass zwar in besonderen Fällen bald die Theorie nach Navier, bald jene nach Redtenbacher verlässlich sein kann, doch in anderen Fällen wieder nach beiden Autoren unrichtige Resultate erhalten werden.

Navier und Redtenbacher, welchem letzteren auch Burg beipflichtet, sind nämlich die beiden Autoren, nach welchen sich die in der Praxis zur Geltung gekommenen Theorien des Widerstandes gegen Biegung und Bruch gruppiren lassen. Beide legen zwar in der Lehre von dem Widerstande der Materialien im Allgemeinen die gleichen Principien über Elasticität und Festigkeit zu Grunde, doch weichen sie in der speciellen Lehre von der relativen Festigkeit darin von einander ab, dass nach Ersterem der Bruch eines gebogenen Trägers immer durch die Zerstörung der entferntesten Fasern von der neutralen Axe im Bruchquerschnitte eintreten soll, während Redtenbacher den Bruch stets mit dem Zerreissen der gespanntesten Fasern beginnen lässt. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass der Bruch allerdings in der einen oder anderen Weise eintreten kann, jedoch nicht nothwendig eintreten muss, und dass offenbar die alternative Vorstellung die richtige ist, nach welcher der fragliche Bruch entweder mit dem Zerreissen der gespanntesten oder mit dem Zerdrücken der am meisten gepressten Fasern beginnt, was in der That mit der Er-

fahrung übereinstimmt. Ob das Eine oder das Andere geschehen wird, lässt sich im Allgemeinen nicht bestimmen, es hängt diess unter Anderem auch von der Lage der neutralen Schichte im Querschnitte (also von seiner Form) und von dem Verhältnisse zwischen der absoluten und rückwirkenden Festigkeit des Materiales (also von der Gattung und Qualität desselben) ab. Indessen kann das Zerreissen der gespanntesten und das Zerdrücken der gepresstesten Fasern auch gleichzeitig erfolgen, und dieser Fall bildet sodann den Uebergang von dem einen zu dem anderen der beiden obigen Fälle.

Im vorliegenden Werke ist diese Anschauung durchgehends festgehalten, nur ist bei den Untersuchungen nie der Bruch des Trägers, sondern es sind stets die Bedingungen für seine sichere Existenz betrachtet, und zwar aus dem einfachen, jedoch hinreichenden Grunde, weil diese und nicht die Zerstörung des Materiales in der Praxis beabsichtigt wird, abgesehen davon, dass die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen bei dem Umstande, als sie an solche Grundsätze, die nur innerhalb der Sicherheitsgränzen als wahr gelten können, geknüpft sind, auf den Bruch gar nicht angewendet werden dürfen. Diese Erwägungen sind es, welche den Verfasser auf die oben erwähnte alternative Darstellung des Tragmomentes und des Tragvermögens geführt haben, und es leuchtet hiernach ein, dass dadurch viele der älteren Resultate mehr oder weniger modificirt werden müssen. Von diesen Resultaten sind insbesondere jene im §. 81, über den Einfluss des Umkehrens eines Trägerquerschnittes auf das Tragvermögen, ferner die in dem auf Seite 225 beginnenden Kapitel, über den Ort des gefährlichen Querschnittes (die schwächste Stelle eines Trägers) bemerkenswerth, wo namentlich gezeigt wird, dass dieser Ort nicht immer, wie man diess sonst anzunehmen pflegt, in die grösste Krümmung der Biegungscurve zu liegen kommt.

Auf die Thatsachen übergehend, welche die Lehren des Verfassers bestätigen, so wird schon die Hinweisung auf die grossen und umfassenden Versuche genügen, welche von Hodgkinson und Fairbairn Behufs der

Auffindung der zweckmässigsten Materialvertheilung in einem Trägerquerschnitte angestellt worden sind, indem die Resultate dieser Versuche mit jenen der neuen Theorie vollkommen übereinstimmen, was bei Anwendung der älteren Theorien nicht der Fall ist. (S. das Kapitel auf Seite 234.) Ueberhaupt wird man in diesem Kapitel, welches von den zweckmässigsten Querschnittsformen handelt, eine Reihe von neuen und wichtigen Resultaten, insbesondere bezüglich der I und T Formen finden. Neues enthält übrigens beinahe jedes Kapitel, so z. B. das auf der Seite 174 beginnende, welches von den Trägerquerschnitten überhaupt, und besonders von den regelmässigen Polygonen handelt; ferner jenes über den Widerstand von Trägern, welche an beiden Enden eingemauert sind; so wie die, welche das Verhalten von belasteten Trägern erörtern, die auf mehreren Stützen ruhen und darüber continuirlich fortlaufeu, u. s. w. Auch war der Verfasser bemüht, vorzüglich die End-Resultate nach Thunlichkeit kurz und elegant darzustellen, und so die Anwendung auf die vorkommenden Fälle zu erleichtern. Auf Seite 459 beginnt der Abschnitt über das Verfahren, nach welchem der Widerstand von zusammengesetzten Trägern beurtheilt werden kann, und in den darauf folgenden zwei Abschnitten sind die Brückenconstructionen behandelt. Der Verfasser war bemüht, in diese wichtigen Theile des Bauconstructionswesens nach wissenschaftlichen Grundsätzen im Vereine mit den Ergebnissen der Erfahrung Consequenz und Einfacheit zu bringen, dabei die Erfindungen und Verbesserungen der Neuzeit im Brückenbaufache zu berücksichtigen, und die Anwendung der vorgetragenen Lehren stets auf wirklich bestehende Brückenobjecte nachzuweisen. Auch hier wird der verehrte Leser vieles Neue und Nützliche für die Praxis finden, z. B. in der Lehre von den Kettenbrücken die bemerkenswerthen Relationen (616) und (630).

Somit übergibt der Verfasser das vorliegende Werk der Oeffentlichkeit mit der Bitte, bei der Beurtheilung desselben die Schwierigkeiten nicht übersehen zu wollen,

unter denen dasselbe zu Stande kam. Einerseits konnte derselbe in seiner Eigenschaft als Ingenieur des Staatsbaudienstes das Werk nur neben seinen Amtsgeschäften bearbeiten, andererseits aber musste er sich mit der Herausgabe desselben beeilen, um insbesondere die Priorität seiner selbstständigen Arbeiten zu sichern, die durch seine Vorlesungen schon seit mehreren Jahren in die Oeffentlichkeit gelangten.

Ausser dieser allgemeinen Bitte wird aber auch noch die besondere an den Herrn Professor Becker in der polytechnischen Schule zu Carlsruhe gestellt, dass, falls der ehrenwerthe Herr Professor wieder eine Arbeit des Gefertigten zu benützen sich veranlasst finden sollte, derselbe die Angabe der Bezugsquelle nicht eben so überflüssig halten möge, wie in seinem im Jahre 1853 herausgegebenen Werke „Allgemeine Baukunde des Ingenieurs“, wo im §. 110 ein ganzer Aufsatz des Gefertigten über Futtermauern, welcher in der Förster'schen Bauzeitung vom Jahre 1850 (Seite 193—199) enthalten ist, ohne Angabe der Bezugsquelle beinahe wörtlich aufgenommen erscheint.

Wien, im September 1855.

Der Verfasser.

Inhalts-Uebersicht.

Erstes Hauptstück.

Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien (insbesondere des Holzes und Eisens).

Seite

Allgemeine Bemerkungen . . . . . 1— 7

Erster Abschnitt.

Ausdehnung und Zusammendrückung.

Erstes Kapitel.

Widerstand gegen Ausdehnung und Zusammendrückung . . . 8— 35

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung und Zusammendrückung . . . . . 36— 39

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.

Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung der Längenaxe 40— 51

Anmerkung 1 und 2 . . . . . 51— 55

Zweiter Abschnitt.

Biegung.

Erstes Kapitel.

Widerstand gegen Biegung.

Bedingungen des Gleichgewichtes . . . . . 56— 79

Formveränderung der Längenaxe. Biegungscurven. Grösse der Biegung . . . . . 80—111

Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragmoment und Tragvermögen . . . . . 111—144

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung . . 145—158

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Biegung. Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung normal auf die Längenaxe . . . . . 158—168

Anmerkung . . . . . 158—170

Zweites Hauptstück.

Anwendung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien auf Holz- und Eisenconstructionen.

Seite

Vorerinnerung . . . . . 171—173

Erster Abschnitt.

Von den Querschnitten für Träger, welche der Biegung ausgesetzt sind.

Erstes Kapitel.

Von den zusammengesetzten Querschnittsformen.

Behandlung solcher Querschnitte . . . . . 174—189

Von den symmetrischen Querschnittsfiguren, namentlich den regelmässigen Polygonen . . . . . 189—216

Regeln und Beispiele . . . . . 216—225

Zweites Kapitel.

Von dem gefährlichen Querschnitte . . . . . 225—233

Drittes Kapitel.

Ueber die zweckmässigsten Querschnittsformen.

Erklärung . . . . . 234— —

I. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn seine Biegung bei einer die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung unter sonst gleichen Umständen möglichst klein werden soll . . . . . 234—255

II. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein Tragvermögen unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll . . . . . 255—285

III. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein mechanisches Widerstandsmoment unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll . . 285—303

Zweiter Abschnitt.

Widerstand prismatischer Träger, bei welchen die einwirkenden Kräfte normal auf die Längenaxe gerichtet sind.

Vorerinnerung . . . . . 304— —

Erstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden unterstützten Trägers, welcher an einer beliebigen Stelle belastet ist . . . . . 304—311

Zweites Kapitel.

Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe an einer beliebigen Stelle belastet ist . . . . . 311—323

Seite

Drittes Kapitel.

Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist . . . . . 324—328

Viertes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen *A* und *B* ruhenden Trägers *DE*, welcher zwischen den Stützen mit der Last *Q*, und an beiden Enden *D* und *E* mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in *A* und *B* horizontal werden . . . . . 329—341

Fünftes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen *A* und *B* ruhenden Trägers *DE*, welcher zwischen den Stützen mit der gleichförmig vertheilten Belastung *Q* und an beiden Enden *D* und *E* mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in *A* und *B* horizontal werden 341—347

Sechstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden eingemauerten Trägers . . 348—359

Siebentes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn in der Mitte zwischen den Stützen stets die Belastung *Q* concentrirt ist . . . . 359—395

Achtes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleichweit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn derselbe seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist . . . . . 395—416

Anhang zum 7. und 8. Kapitel.

Bemerkungen für die Praxis . . . . . 416—418

Dritter Abschnitt.

Widerstand eines prismatischen Trägers, wenn die einwirkenden Kräfte nicht normal auf seine Längenaxe gerichtet sind.

Vorerinnerung . . . . . 419—422

Biegungscurve. Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragvermögen . . . . . 422—424

Erstes Kapitel.

Widerstand eines Trägers, welcher an einem Ende festgehalten und am anderen Ende von 2 Kräften in Anspruch genommen wird, von denen die eine in der Richtung der Längenaxe, die andere aber normal darauf wirkt . . . . . 424—433

Zweites Kapitel.

Widerstand eines prismatischen Trägers, welcher seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist, wenn derselbe auf

Seite

beiden Enden aufliegt, und diese letzteren auseinandergezogen werden . . . . . 433—444

Anhang zum 1. und 2. Kapitel . . . 444—445

Drittes Kapitel.

Widerstand eines verticalen Ständers, dessen oberes Ende belastet, und dessen unteres Ende unterstützt ist . . . . . 445—458

Vierter Abschnitt.

Widerstand von Körpern, deren Materie eine vollkommene Ununterbrochenheit und einen gänzlichen Zusammenhang ihrer Theile nicht besitzt.

Erklärung. Verfahren in solchen Fällen . . . . . 459—460

Erstes Kapitel.

Holzverbindungen.

Verzahnung. Verkeilung. Verschraubung . . . . . 461—464

Zweites Kapitel.

Schmiedeeisen- und Blechverbindungen.

Bolzen. Zapfen. Schrauben. Nieten . . . . . 464—474

Fünfter Abschnitt.

Brücken, bei welchen hauptsächlich der Biegungs-Widerstand in Betracht kommt.

Vorerinnerung. Beurtheilung solcher Brücken . . . . . 475—479

Erstes Kapitel.

Brücken mit einfachen Trägern . . . . . 480—486

Zweites Kapitel.

Brücken mit gekuppelten Tragbalken . . . . . 486—487

Drittes Kapitel.

Traggeländerbrücken . . . . . 488—494

Viertes Kapitel.

Brücken, wo die Tragwände nach amerikanischer Art aus Streckbalken, Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben bestehen

Howe's System 495–524

Fünftes Kapitel.

Tragwandbrücken nach dem Neville'schen Systeme . . . . 524—535

Zusatz zum 4. und 5. Kapitel.

Bemerkungen über die gewöhnlichen Gitterbrücken . . . . . 536—537

Sechstes Kapitel.

Eiserne Röhrenbrücken . . . . . 537—546

Anmerkung über Blechwandbrücken . . . . . 546—547

Zusatz zum 5. Abschnitte.

Bemerkungen über Brücken, deren Träger über mehrere Oeffnungen continuirlich fortlaufen . . . . . 547—552

Sechster Abschnitt.

Kettenbrücken.

Theoretisch-practische Abhandlung . . . . . 553—602

Erstes Hauptstück.

Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien

(insbesondere des Holzes und Eisens).

Erstes Hauptstück.

§. 1.

Wesen der Materie. Das Wesen der die Körper bildenden Materie ist nicht genau bekannt. Das Verhalten derselben gegen einwirkende Kräfte kann daher nur einer annäherungsweise richtigen Beurtheilung dadurch unterzogen werden, dass man die Eigenschaften der Materie möglichst zu erforschen strebt, und sodann von dem Erforschten den entsprechenden Gebrauch macht.

§. 2.

Annahmen. Die zu betrachtenden Körper sollen fest und elastisch sein. Die vorzüglichsten darunter sind Holz und Eisen. Die Forschungen über die Eigenschaften dieser letzteren gestatten die Aufstellung von Hypothesen, welche in der Regel auch für andere feste elastische Materialien gelten können. In der Voraussetzung, dass von den Ausnahmen abgesehen wird, und in der Ueberzeugung, dass diese Voraussetzung mit Rücksicht auf den Zweck der vorliegenden Schrift zulässig ist, wird die nachstehende gewählte Anschauungsweise genügen.

§. 3.

Formveränderung des Körpers in Folge einer Krafteinwirkung. Wirken auf einen festen Körper Kräfte ein, so entsteht zunächst eine Formveränderung. Dieselbe verschwindet wieder mehr oder weniger, wenn die Einwirkung der Kräfte aufhört. Wäre nach einem solchen Aufhören die ursprüngliche Form des Körpers genau wieder hergestellt worden, so könnte man denselben vollkommen elastisch nennen; wäre hingegen die hervorgebrachte Formveränderung gänzlich verblieben, so könnte man dem Körper gar keine Elasticität beimessen. Diese beiden Zustände sind als die Gränzzustände zu betrachten, zwischen welchen die festen Körper bezüglich ihrer Elasticität einzureihen kommen. Man ist jedoch nicht berechtigt, die Existenz von Körpern anzunehmen, welche sich in diesen Gränzzuständen selbst befänden. Es kann allerdings der Zustand

eines Körpers so nahe mit einem der beiden Gränzzustände übereinstimmen, dass man keinen Unterschied wahrzunehmen im Stande ist. Dadurch erklärt sich, dass es bisweilen scheine, als besässen manche Körper unter gewissen Umständen eine vollkommene, andere hingegen keine Elasticität. Indess werden auch solche Körper, gleich den andern, unter die unvollkommen elastischen zu zählen sein. Uebrigens werde nach üblicher Weise der nach dem Aufhören der Krafteinwirkung verschwundene Theil der beobachteten Formveränderung, die elastische, der zurückgebliebene Theil die bleibende oder permanente Formveränderung genannt. Beide zusammen geben die ganze oder totale Formveränderung.

§. 4.

Eintheilung der Kräfte. Die totale Formveränderung eines Körpers ist von Gegenkräften begleitet, die als Widerstände auftreten und durch die einwirkenden Kräfte hervorgerufen werden. Man unterscheidet daher zwischen hervorrufenden (offensiven) und hervorgerufenen (defensiven) Kräften. Die hervorrufenden Kräfte können je nach der Art ihres Entstehens in natürliche und künstliche abgetheilt und zu den ersteren die durch die Schwere und Atmosphärilien, zu den letzteren aber die durch die besonderen mechanischen und chemischen Einwirkungen entstehenden gerechnet werden.

Die hervorgerufenen Kräfte (Widerstände) sind von den hervorrufenden Kräften, so wie von den Eigenschaften der den Körper bildenden Materie abhängig.

§. 5.

Elasticitätsgränzen. Die offensiven Kräfte sind entweder ganz oder theilweise permanent. Die Schwere wirkt z. B. permanent. Es kann hieraus geschlossen werden, dass der Zustand eines jeden Körpers einer fortschreitenden Veränderung unterliege. Das Fortschreiten in der Veränderung geschieht in der Regel so allmälig, dass man dasselbe während einer gewissen Zeitperiode nicht wahrnehmen, oder wenigstens als unwesentlich betrachten kann. Es wird jedoch nach Verlauf dieser Zeitperiode immer merkbarer, und führt endlich eine Trennung der Theile des Körpers herbei. Die frag-

liche Zeitperiode hängt von den obwaltenden Umständen ab, kann manchmal Jahrhunderte betragen, zuweilen aber auch nur von kurzer Dauer sein.

Während dieser Zeitperiode kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, dass zwischen den hervorrufenden und den hervorgerufenen Kräften Gleichgewicht bestehe, und es erscheint zugleich, wenigstens während eines Theils dieser Zeitperiode, der Körper in so hohem Grade vollkommen elastisch, dass demselben ohne merklichen Fehler diese Eigenschaft beigelegt werden kann. Man pflegt in diesem Falle zu sagen, es werde durch die Anspruchsnahme des Körpers die Gränze für die vollkommene Elasticität, oder kurz die Elasticitätsgränze nicht überschritten. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Beantwortung der Frage, bis zu welchem Grade die hervorrufenden Kräfte gesteigert werden können, damit die Elasticitätsgränze nicht überschritten werde, vorzüglich von der Zeitdauer abhänge, während welcher die verlangte Eigenschaft vorhanden sein soll. Nach Verlauf dieser Zeitdauer wird jedoch die erwähnte Gränze mit zunehmender Merkbarkeit überschritten, und sofort die baldige Zerstörung des Körpers in Aussicht gestellt.

§. 6.

Bedinguug für die Sicherheit der Körperexistenz. Einfluss der obwaltenden Umstände. Damit durch die Einwirkung von Kräften auf einen Körper die Besorgniss seiner Zerstörung nicht Platz greife, und daher mit genügender Sicherheit auf den Zusammenhang seiner Theile gerechnet werden kann, erfordert es die Vorsicht, dass hiebei die betreffende Elasticitätsgränze nicht überschritten werde. Zur Erfüllung dieser Bedingung hat man einerseits die Eigenschaften der den Körper bildenden Materie, anderseits die besondern Umstände zu berücksichtigen, welche die hervorrufenden Kräfte begleiten.

Diese Umstände beziehen sich

A) Auf die Art und Intensität der betreffenden Kräfte, welche
- mechanische
  - permanent
    - ohne
    - mit
  - zeitweilig
    - ohne
    - mit

  } Erschütterung wirkend
- chemische
  - gewöhnliche d. Atmosphäre
  - aussergewöhnliche

} sein können

und

B) auf die Zeitdauer, während welcher die Zerstörung des Körpers hintangehalten werden soll.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass die günstigsten Umstände, unter welchen nämlich die einwirkenden Kräfte ein Maximum werden dürfen, dann vorhanden sind, wenn die Krafteinwirkung eine momentane ist, und keine Erschütterung hervorbringt, in welchem Falle zugleich der chemische Einfluss verschwindet. Dieser Fall tritt in der Regel bei den Experimenten ein, welche mit den Materialien zur Erforschung ihres Widerstandes gemacht werden.

Der Einfluss der Mehrzahl der erwähnten Umstände muss abgeschätzt und mit den Rechnungs-Resultaten combinirt werden. Solche Abschätzungen, von verschiedenen Fachmännern vorgenommen, werden ohne Zweifel verschieden ausfallen. Zuweilen weichen die Meinungen bedeutend von einander ab, und eine Vereinigung derselben ist nicht zu erzielen. In diesen Fällen können nur die Zeit und die weiteren Erfahrungen belehren.

§. 7.

Gang der Untersuchung. Um mit der Untersuchung der einfachsten Fälle zu beginnen, wird zunächst die prismatische Körperform gewählt, wie solche im Constructionswesen bei den unter dem Namen Balken, Stab, Stange, Schiene, Träger u. s. w. bekannten Bestandtheilen zumeist vorkommt. Die Querschnitte des Prismas stehen senkrecht auf die Längenrichtung, und die Verbindung der Schwerpuncte der einzelnen Querschnitte heisse die Längenaxe des Prismas.

Auf das Prisma sollen Kräfte zuerst in der Richtung der Längenaxe, und sodann senkrecht hierauf wirkend angenommen werden.

Eine Kraft in der Richtung der Längenaxe wirkend, bringt entweder eine Spannung oder eine Pressung hervor. Im ersten Falle besteht die Formveränderung des Prismas in einer Ausdehnung, und die Zerstörung desselben in einem Zerreissen. Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Ausdehnung. Im zweiten Falle besteht die Formveränderung des Prismas in einem Zusammendrücken, und die Zerstörung desselben in einem Zerquetschen.

Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Zusammendrückung.

Eine Kraft senkrecht auf die Längenaxe des Prismas gerichtet, bringt im Allgemeinen Spannungen und Pressungen zugleich hervor. Dabei besteht die Formveränderung des Prismas in einer Biegung, und die Zerstörung desselben in einem Brechen. Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Biegung. Die für das Prisma gefundenen Resultate werden sodann den Weg zur Untersuchuung anders geformter Körper, vorzüglich der von gleichem Widerstande anbahnen.

§. 8.

Mass- und Gewichts-Einheiten. Die nachfolgenden Untersuchungen und Resultate beziehen sich stets auf Wiener Mass und Gewicht. Dabei ist als Masseinheit der Zoll und als Gewichtseinheit der Zentner angenommen, wenn nicht ausdrücklich etwas anders bemerkt wird.

Erster Abschnitt.

Ausdehnung und Zusammendrückung.

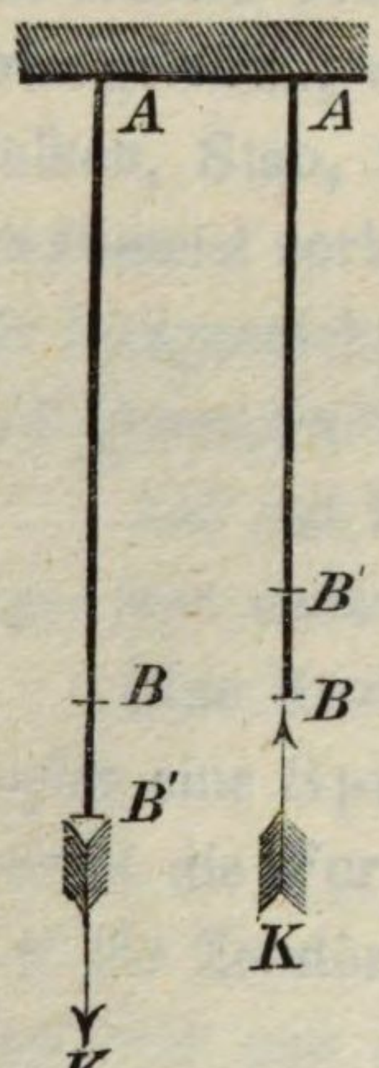
Erstes Kapitel.

Widerstand gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.

§. 9.

Erklärung. Es werde Fig. 1 ein Prisma aus homogenem Materiale in seiner Längenrichtung einer beliebigen entweder als Spannung oder Pressung wirkender Kraft unter bestimmten Umständen ausgesetzt, welche sich gleichmässig über den Querschnitt desselben vertheilt. Sei die Länge des Prismas $AB = l$, der Querschnitt desselben $= q$, die wirkende Kraft $= K$ und die hervorgebrachte totale Längenveränderung $BB' = \Delta l$. Diese bestehe im Sinne des §. 3 aus $\Delta_1 l$, der permanenten, und aus $\Delta_2 l$, der elastischen Veränderung, und werde daher durch die Gleichung $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ ausgedrückt. Man lasse dabei positive Werthe von K und Δl als Spannungen und Ausdehnungen gelten, und sehe sonach negative Werthe dieser Grössen als Pressungen und Zusammendrückungen an. Wird vorläufig von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, und unter den gemachten Voraussetzungen keine Ursache zugelassen, welche namentlich bei der Pressung ein Ausbiegen der Längenaxe hervorbringen könnte, so kann diese letztere nur in ihrem Ausmasse, nicht aber auch in der Richtung verändert werden.

Fig. 1.



In diesem Falle ist der Widerstand des materiel-

len Prismas sowohl gegen Ausdehnung als gegen Zusammendrückung aus der Kraft zu beurtheilen, welche eine solche Längenveränderung verursacht.

§. 10.

Längenveränderungen. Die Längenveränderungen, sie seien total, permanent oder elastisch, sind offenbar abhängig von der Länge des Prismas, dem Querschnitte desselben, der Intensität der einwirkenden Kraft, und der Natur des gewählten Materiales. Es unterliegt keinem Zweifel, und die Erfahrung bestätigt diess, dass die Längenveränderungen im einfachen und directen Verhältniss mit der Länge des Prismas stehen. Eben so leuchtet ein, dass die Intensität der Wirkung lediglich nach der Kraft zu bemessen ist, welche verhältnissmässig auf die Quadrat Einheit des Querschnittes (□″) entfällt. Wird die letzterwähnte Kraft mit k bezeichnet, so ist zunächst $k = \frac{K}{q}$ und sonach in Uebereinstimmung mit dem Gesagten $\Delta l = l f(k)$, $\Delta_1 l = l f_1(k)$ und $\Delta_2 l = l f_2(k)$, und, indem $\frac{\Delta l}{l} = v$, $\frac{\Delta_1 l}{l} = v_1$ und $\frac{\Delta_2 l}{l} = v_2$ gesetzt wird, beziehungsweise auch

$$v = f(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$v_1 = f_1(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\text{und } v_2 = f_2(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn die Fructionszeichen f, f_1 und f_2 sich auf das gewählte Materiale beziehen. Diese 3 Gleichungen lehren, dass bei einem gegebenen Materiale das Verhältniss zwischen der Längenveränderung (Ausdehnung, Zusammendrückung) und der Länge des Prismas nur von der auf die Quadrat-Einheit des Querschnittes entfallenden Kraft (Spannung, Pressung) abhängt. Diese Abhängigkeit wird jedoch eine verschiedene sein, je nachdem die totalen, permanenten oder elastischen Längenveränderungen betrachtet werden. Man beachte indess, dass wegen $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$ auch $v = v_1 + v_2$ und sofort $f(k) = f_1(k) + f_2(k)$ wird, daher die Kenntniss zweier dieser Functionen die der dritten Function nach sich zieht. Auf diese Weise ist mit Rücksicht auf §. 8 k in Zentnern zu verstehen, und auf einen Quadratzoll Querschnitt zu beziehen.

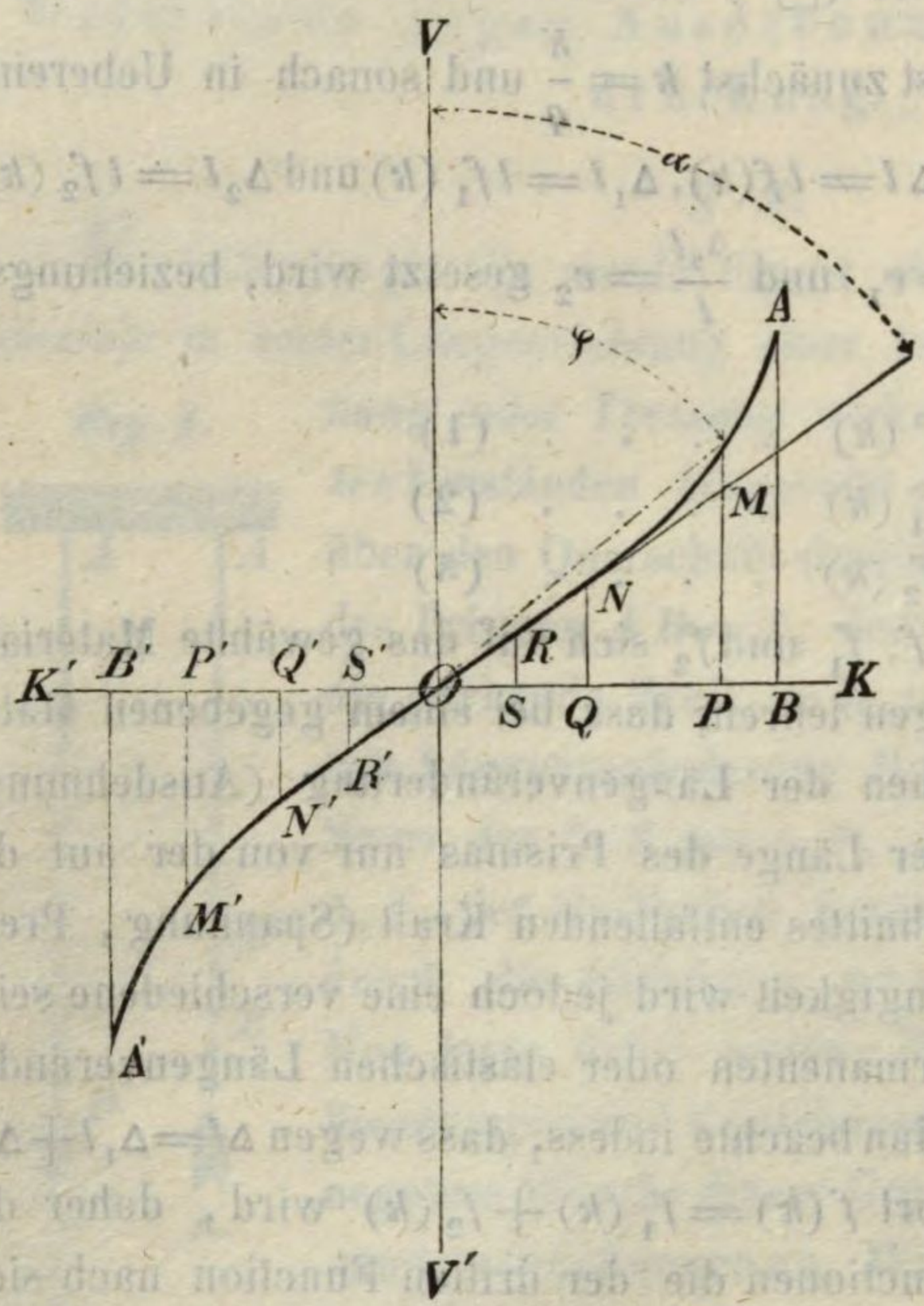
§. 11.

Totale Längenveränderungen Grösstmöglichste Anspruchsnahme. Modul der Längenveränderung. Um

sogleich in die Untersuchung der erstbezeichneten Function einzugehen, welche die Abhängigkeit der totalen Längenveränderung von der betreffenden Kraft nachzuweisen hat, betrachte man die Gleichung (1) $v = f(k)$ als die einer krummen Linie, welche auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem derart bezogen wird, dass k die Abscissen und v die Ordinaten vorstellen. Der Umstand, dass k eine Kraft und v eine Verhältnisszahl bedeutet, kann die gewählte Betrachtungsweise nicht beirren, weil es unbenommen bleibt, sowohl Kräfte als Verhältnisse graphisch darzustellen. Man wird sich nur darüber zu einigen haben, nach welchem Masstabe die Einheit sowohl für die Abscissen, als für die Ordinaten gewählt werden soll.

Sei also Fig. 2 für ein bestimmtes Materiale AA' die fragliche Curve (deren Form bereits den nachfolgenden Raisonnements gemäss gezeichnet ist), sei ferner O der Ursprung der Coordinaten, KK' die Axe der Abscissen, VV' die der Ordinaten, ferner OK die positive Richtung der ersteren und OV die der letzteren. Es repräsentirt sodann $OP = k$ eine Spannung und $OP' = k$ eine Pressung, und die dazu gehörigen Ordinaten v, nämlich MP und $M'P'$ beziehen sich auf die hervorgerufenen totalen Längen-Veränderungen (Ausdehnung, Zusammendrückung). Es versteht sich übrigens von selbst, dass — während bei einer solchen Betrachtung v und k variabel scheinen — die übrigen obwaltenden Umstände (§. 6) unverändert zu bleiben haben.

Fig. 2.



Diess vorausgesetzt, kann man mit Rücksicht auf die Eingangs entwickelte Anschauungsweise im Vereine mit weiteren Erfahrungs-

Resultaten bezüglich dieser Curve, und respective der totalen Längenveränderungen Folgendes bemerken:

1. Da die totalen Längenveränderungen mit den Kräften gleichzeitig verschwinden, positiv und negativ werden, überdiess mit einander wachsen, so geht die Curve durch den Ursprung der Coordinaten, und erscheint ausschliesslich in den 2 gegenüberliegenden Quadranten KOV und $K'O'V'$ und zwar in einer solchen Form, dass sie sich von den Coordinaten-Axen immer mehr entfernt.

2. Für den Endpunct der Curve ist OB die grösstmöglichste Spannung vor dem Zerreissen des Prismas, und es repräsentirt AB das grösstmöglichste Verhältniss der totalen Ausdehnung zur Länge. Diese Spannung werde mit A bezeichnet. Für den Endpunct A' ist OB' die grösstmöglichste Pressung vor dem Zerquetschen, und es repräsentirt $A'B'$ das grösstmöglichste Verhältniss der totalen Zusammendrückung zur Länge. Diese Pressung werde mit R bezeichnet.

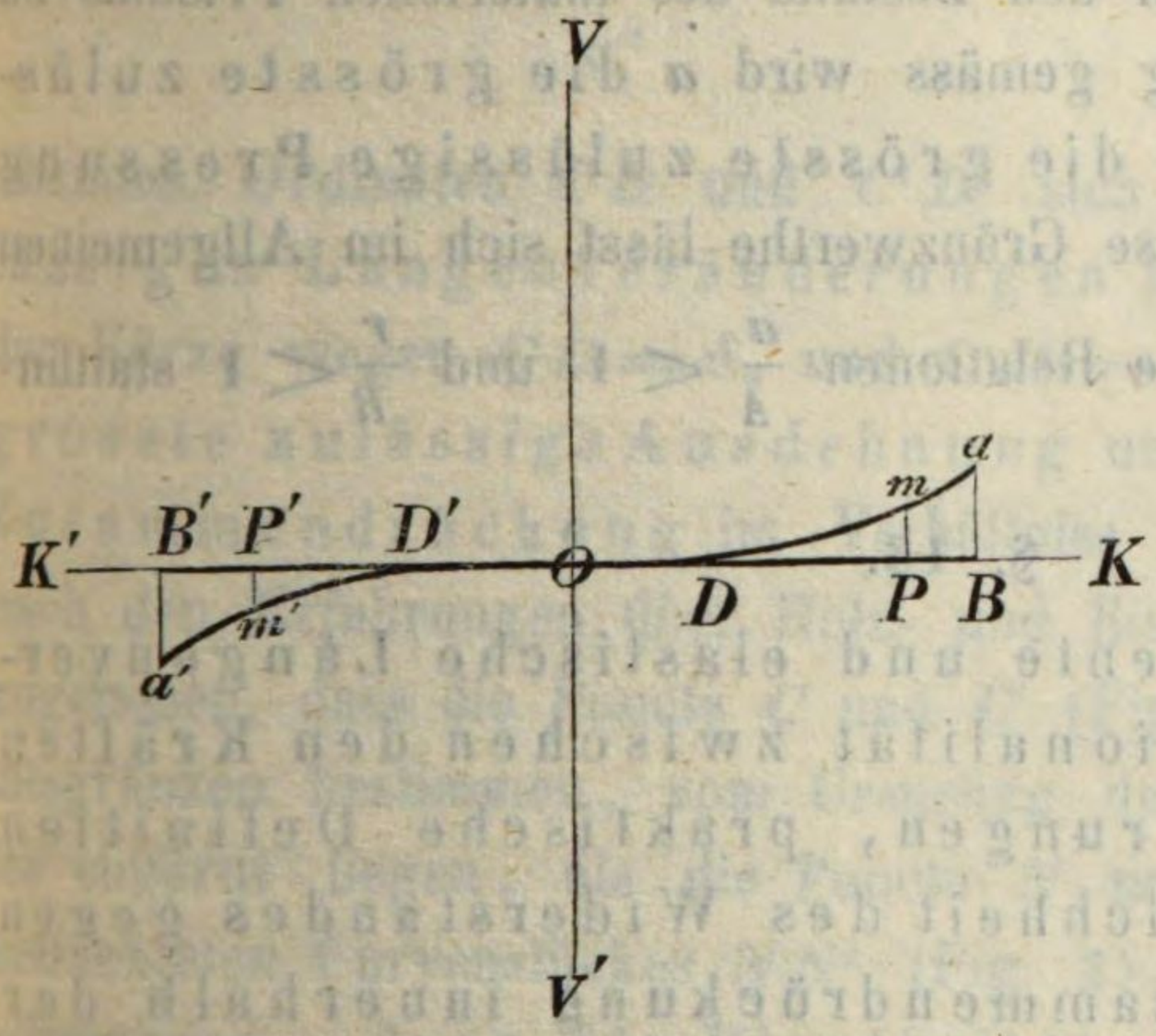
3. Eine zweckmässige Anschauungsweise für die Abhängigkeit der Längenveränderungen von den Kräften ergibt sich dadurch, dass man dem Verhältnisse $k:v$ die Aufmerksamkeit zuwendet. Nennt man diesen Quotienten $\frac{k}{v}$ den Modul der Längenveränderung für das in Betracht stehende Materiale, und bezeichnet denselben mit m, so ist wegen $\frac{k}{v} = \frac{OP}{MP} = tang.\, OMP = tang.\, \varphi$ sofort $m = tang.\, \varphi$, also eine mit φ veränderliche Grösse. Ist jedoch, wie vorausgesetzt werden muss die Curve eine continuirliche, und wird dieselbe von keiner der Coordinatenaxen tangirt, so muss offenbar der Modul m desto mehr constant werden, je kleiner die Veränderungen v sind, da in diesem Falle φ sich immer mehr dem Winkel α nähert, welchen die Tangente an dem Puncte O mit der Ordinatenaxe einschliesst. Obwohl hiernach nur für unendlich kleine Werthe von k und v der Modul m unter den vorhandenen Umständen als die unveränderliche Grösse $tang\ \alpha$ zu gelten hat, so wird doch diese Unveränderlichkeit des Moduls auch für endliche Werthe der Grössen k und v in so lange näherungsweise angenommen werden können, als diese Grössen klein genug sind, um den auf solche Weise entstehenden Fehler nicht wahrnehmbar, oder doch unwesentlich zu machen.

Unter dieser Bedingung kann man mit hinreichender Genauigkeit von dem Satze Gebrauch gemacht werden, dass die totalen Längenveränderungen (Ausdehnungen, Zusammendrückungen) proportional mit den Kräften (Spannungen, Pressungen) wachsen. Auch leuchtet ein, dass gleichzeitig das Curvenstück NN', für welches die dem Modul äquivalenten Werthe von $\frac{k}{v}$ (also beispielsweise $\frac{OQ}{NQ}$, $\frac{OS}{RS}$, $\frac{OQ}{N'Q'}$, $\frac{OS'}{R'S'}$) nahezu constant werden, sich nur wenig von einer geraden Linie unterscheiden wird, und ohne merklichen Fehler mit derselben verwechselt werden kann. Eine Ausnahme von dieser Regel könnte nur dann eintreten, wenn eine der Coordinaten-Axen die Curve tangiren würde, ein Fall, der nach den Wahrnehmungen über die Materialien, welche man in der vorliegenden Schrift zu betrachten beabsichtigt, nicht anzunehmen ist. Wie gross übrigens der Werth von *tang.* α, wie lang das Curvenstück NN', und wie die Gestalt der übrigen Theile der Curve sein werden, lässt sich im Allgemeinen nicht bestimmen. Das Nähere hierüber enthält die Untersuchung über die speciellen Materialien. Es mag vorläufig nur auf die Wahrnehmung aufmerksam gemacht werden, wornach die beiden auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Curventheile als convex gegen die Axe der Abscissen und als concav gegen die der Ordinaten anzunehmen sind, wie diess beispielweise Fig. 2 versinnlicht. Es ist nicht schwer, für diese Wahrnehmung einen Erklärungspunct zu finden. Wird nämlich zugegeben, dass die Ausdehnungen und Zusammendrückungen in einem desto grösseren Verhältniss wachsen, je bedeutender die Veränderung des ursprünglichen Zustandes geworden ist, so liegt der Schluss nicht ferne, dass, nachdem kleine Veränderungen nahezu im einfachen Verhältnisse mit den Kräften stehen, bedeutendere Längenveränderungen in einem grösseren, als einfachen und überdiess wachsenden Verhältniss mit den bezüglichen Kräften zunehmen werden. In diesem Falle muss offenbar die Curve die vorerwähnte Form besitzen, daher auch umgekehrt, wenn diese Form erfahrungsgemäss vorhanden ist, der gegebene Erklärungsgrund statthaft erscheint.

§. 12.

Permanente Längenveränderungen. Grösste zulässige Anspruchsnahme. Geht man nunmehr auf die Untersuchung der zweiten Function über, welche die Abhängigkeit der permanenten Längenveränderungen von den betreffenden Kräften nachweiset, so beachte man, dass die hieher gehörige Gleichung (2) $v_1 = f_1(k)$ auf analoge Weise, wie die Gleichung (1) analysirt werden kann. Man sehe demnach die Relation $v_1 = f_1(k)$ ebenfalls als die Gleichung einer Curve an, und beziehe dieselbe auf das bereits gewählte Coordinatensystem, wobei k abermals die Abscissen, hingegen v_1 die Ordinaten vorstellen. Mit Rücksicht auf die im §. 11 gemachten Erinnerungen über die Lage von positiven und negativen Ordinaten, welche auch hier Anwendung finden, sei Fig. 3 die fragliche Curve $a\,a'$, deren Form bereits den nachfolgenden Raisonnements gemäss verzeichnet ist.

Fig. 3.



Unter Festhaltung der gemachten Voraussetzungen und mit Benützung der vorausgegangenen Erörterungen ist hinsichtlich der in Rede stehenden Curve, und respective der permanenten Längenveränderungen Folgendes zu bemerken:

1. Zunächst leuchtet ein, dass die Curve $a\,a'$ ebenso, wie die voruntersuchte $A\,A'$, durch den Ursprung der Coordinaten gehen, und ausschliesslich in den zwei gegenüber liegenden Quadranten $V\,O\,K$ und $V'OK'$ wieder in einer solchen Form erscheinen werde, dass sie sich von den Coordinaten-Axen immer mehr entfernt.

2. Ist für $K = O\,B$ die grösstmöglichste Spannung A vor dem Zerreissen des Prismas vorhanden, so repräsentirt die Ordinate $a\,B$ das grösstmöglichste Verhältniss der permanenten Ausdehnung zur Länge. Ist hingegen $K = O\,B'$ die grösstmöglichste Pressung R vor dem Zerquetschen, so bedeutet sodann $a'\,B'$ das grösstmöglichste Verhältniss der permanenten Zusammendrückung zur Länge.

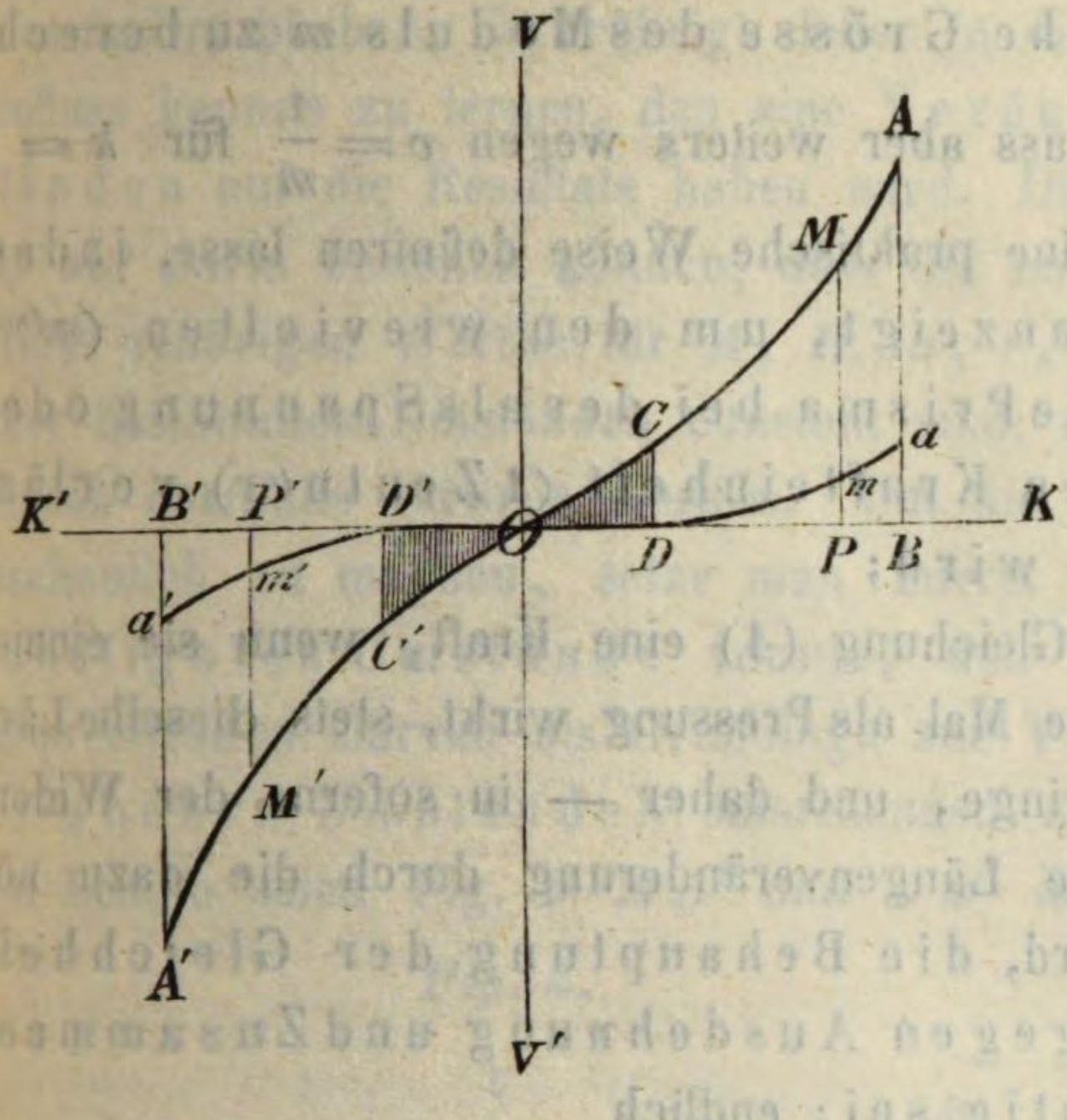
3. Ist OD die grösste Spannung, und OD' die grösste Pressung, welche beziehungsweise eintreten können, damit im Sinne des §. 5 die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, so sind die Ordinaten zwischen D und D' so klein, dass sie nicht wahrnehmbar oder wenigstens unwesentlich erscheinen, und es kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, dass das Curvenstück DD' mit der geradlinigen Abscissenaxe zusammenfalle. In dieser Ueberzeugung darf diese Axe, wenigstens näherungsweise als Tangente an die Curve in O angesehen werden. Die weitere Gestalt der Curve ist erfahrungsgemäss convex gegen die Abscissenaxe anzunehmen.

Setzt man ferner die Spannung $OD = a$ und die Pressung $OD' = r$, so sind offenbar diese Kräfte diejenigen Gränzwerthe, welche in Hinblick auf §. 6 unter den obwaltenden Umständen höchstens vorhanden sein dürfen, um den Bestand des materiellen Prismas zu sichern. Dieser Auffassung gemäss wird a die grösste zulässige Spannung und r die grösste zulässige Pressung genannt werden. Ueber diese Gränzwerthe lässt sich im Allgemeinen nur so viel sagen, dass die Relationen $\frac{a}{A} < 1$ und $\frac{r}{R} < 1$ stattfinden müsse.

§. 13.

Totale, permanente und elastische Längenveränderungen. Proportionalität zwischen den Kräften und Längenveränderungen, praktische Definition des Moduls, und Gleichheit des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung innerhalb der Elasticitätsgränzen. Betrachtet man Fig. 4 die beiden in den §§. 11 und 12 besprochenen Curven zugleich in dem gewählten Coordinatensysteme, so kann eine gegenseitige Vergleichung zwischen den totalen, permanenten und elastischen Veränderungen vorgenommen werden, wenn man berücksichtigt, dass die Theile der Ordinaten, welche — wie etwa Mm, $M'm'$ zwischen den beiden Curven eingeschlossen sind, sich auf die elastischen Längenveränderungen beziehen. Es ist nämlich für eine beliebige Abscisse $OP = k$ gleichzeitig $MP = v$, $mP = v_1$ und $Mm = v_2$. — Ueberschreiten die Spannungen und Pressungen die Elasticitätsgränzen nicht, so können

Fig. 4.



ohne merklichen Fehler die zusammengehörigen totalen und elastischen Längenveränderungen als gleichgeltenden, da in diesem Falle von den permanenten Veränderungen wegen ihrer Kleinheit abgesehen werden darf. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die den grössten zulässigen Kräften (Spannung $OD = a$ und Pressung $OD' = r$) entsprechenden Ordinaten CD und $C'D'$ sich auf die grössten zulässigen Längenveränderungen beziehen. Setzt man daher der Kürze wegen $CD = \delta_a$ und $C'D' = \delta_r$, so bezeichnet δ_a die grösste zulässige Ausdehnung und δ_r die gleichnamige Zusammendrückung im Verhältniss zur Länge. Wird ferner nach den Erfahrungen über Holz- und Eisenmaterialien die Annahme zugelassen, dass die Puncte C und C' (Fig. 4), welche die Elasticitätsgränzen bestimmen, vom Ursprung der Coordinaten nicht weiter entfernt liegen, als die Puncte N und N' des als geradlinig betrachteten Curvenstückes NN' (Fig. 2), so kann unter der Beschränkung, dass die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, ohne merklichen Fehler angenommen werden.

1. Dass sowohl die totalen als elastischen Längenveränderungen, gleichgiltig ob es sich um Ausdehnung oder Zusammendrückung handelt, den einwirkenden Kräften proportional seien;

2. dass der Modul m sowohl für die Ausdehnung als Zusammendrückung einen und denselben constanten Werth besitze, und die

Gleichung $$v = v_2 = \frac{k}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die Abhängigkeit der totalen und elastischen Längenveränderungen von den einwirkenden Kräften mit einer desto grösseren Ge-

nauigkeit ausdrücken werde, aus je mehr Werthen von $\frac{k}{v} = tang.\ \varphi$ man die durchschnittliche Grösse des Moduls m zu berechnen in der Lage war, dass aber weiters wegen $v = \frac{1}{m}$ für $k = 1$ sich der Modul m auf eine praktische Weise definiren lasse, indem derselbe offenbar anzeigt, um den wievielten (m^{ten}) Theil das materielle Prisma bei der als Spannung oder Pressung wirkenden Krafteinheit (1 Zentner) verlängert oder verkürzt wird;

3. dass vermöge der Gleichung (4) eine Kraft, wenn sie einmal als Spannung, das andere Mal als Pressung wirkt, stets dieselbe Längenveränderung hervorbringe, und daher — in soferne der Widerstand gegen eine gewisse Längenveränderung durch die dazu nöthige Kraft gemessen wird, die Behauptung der Gleichheit des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung folgerichtig sei; endlich

4) dass für die Bestimmung der grössten zulässigen Längenveränderungen die Gleichungen $\delta_a = \frac{a}{m}$ und $\delta = \frac{r}{m}$ . . . (5) stattfinden.

Anmerkung. Diese Zahl m pflegt man sonst auch den Elasticitätsmodul zu nennen, obwohl, wie man sieht, dieselbe mit der Elasticität in keinem Zusammenhange gebracht ist. Die Zahl m correspondirt eigentlich mit der Grösse der Längenveränderung, daher man mit derselben richtiger den Modul dieser Veränderung bezeichnen wird, wie diess in §. 11 geschehen ist.

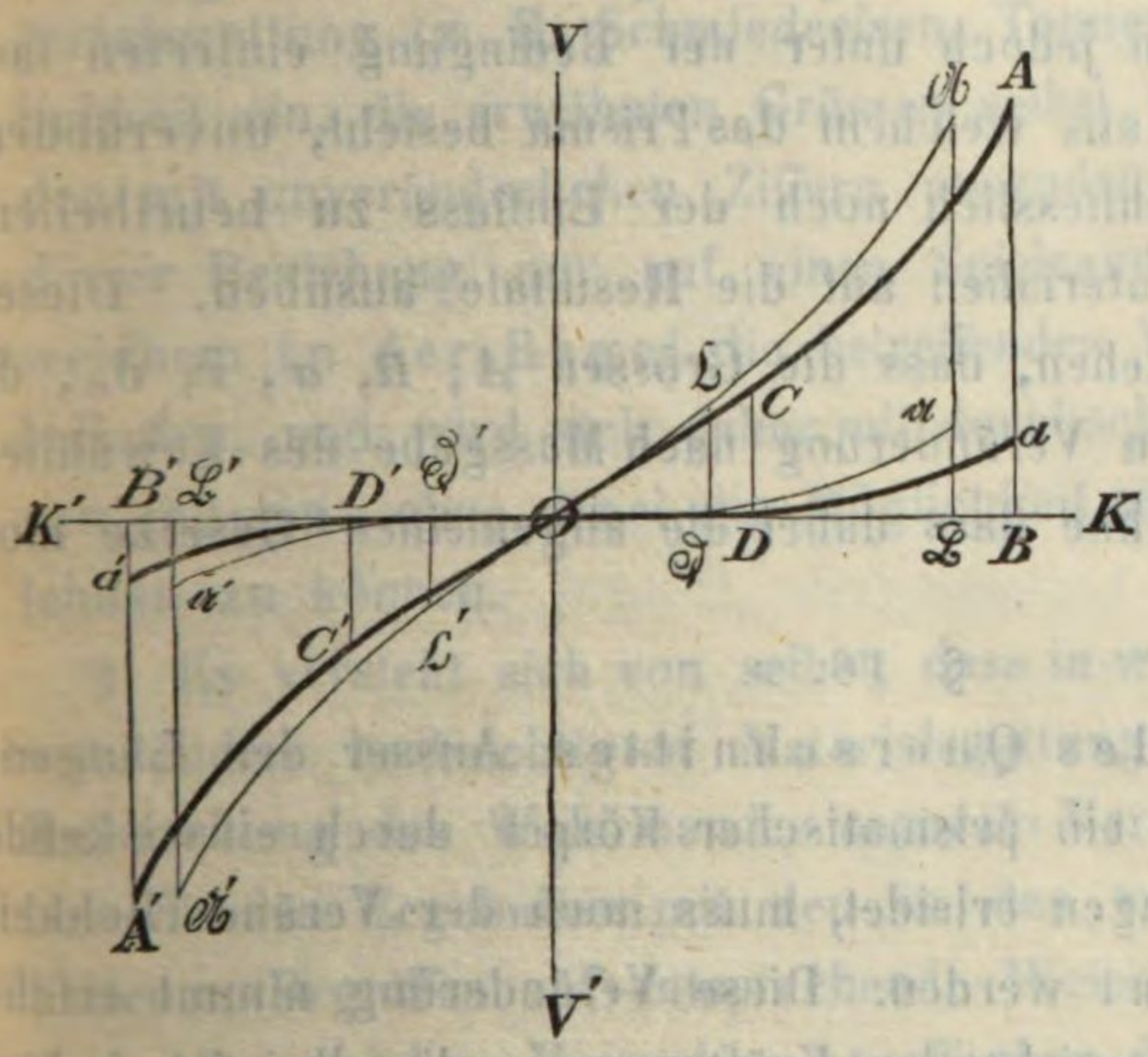
Indem die Aufmerksamkeit auf diese Eigenschaften gelenkt wird, kann zur Vermeidung eines Missverständnisses nicht genug empfohlen werden, wohl zn beachten, dass dieselben nicht eine mathematische Genauigkeit haben, sondern nur innerhalb der Elasticitätsgränzen näherungsweise vorhanden sind, dass aber eben desshalb, indem nach §. 6 die Sicherheit der Existenz des Körpers an diese Bedingung zu knüpfen ist, die Kenntniss der angeführten Eigenschaften einen um so vorzüglicheren Werth besitzt, als hiermit die Resultate der Untersuchung über einzelne Materialien in der That übereinstimmen.

§. 14.

Einfluss der Umstände. In den §§. 11, 12 und 13 hat man verschiedene Spannungen und Pressungen unter der Bedin-

gung auf das materielle Prisma eintreten lassen, dass dabei die besonderen Umstände, welche laut §. 6 in Betracht kommen, unverändert bleiben. Es erübrigt daher in dieser Beziehung noch den Einfluss kennen zu lernen, den eine Veränderung in den Umständen auf die Resultate haben wird. Dieser Einfluss wird offenbar nur darin bestehen können, dass die zu dem untersuchten Materiale gehörigen Werthe für A, R, a, r, δ_a, δ_r und m, welche unter bestimmten Umständen constant sind, mit den veränderten Umständen ebenfalls variiren werden. Um die Variation dieser Werthe anschaulich zu machen, setze man zuerst im Sinne des §. 6 die günstigsten Umstände voraus, und betrachte die denselben entsprechenden Curven als Grundlage zur Vergleichung mit den unter andern Umständen entstehenden analogen Curven. Zu diesem Behufe seien Fig. 5 AA' und aa' die Curven, welche sich unter den günstigsten Umständen auf die totalen und permanenten Längenveränderungen beziehen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass unter andern Umständen die Längenveränderungen verhältnissmässig desto grösser werden, je ungünstiger diese Umstände sind. Aus dieser Ursache werden die neuen Curven $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, welche sich auf die totalen und permanenten Längenveränderungen unter den veränderten Umständen beziehen, eine solche Lage haben, in welcher die Ordinaten v und v_1 durchgehends grösser sind, und überdiess die gröstmöglichsten Kräfte nicht mehr so weit gesteigert werden können, als unter den günstigsten Umständen.

Fig. 5.



Hieraus schliesst man, dass — ohne im Allgemeinen das innerhalb der Elasticitätsgränzen angegebene Gesetz der Proportionalität zwischen den Kräften und den totalen Längenveränderungen zu

beirren — mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen.

1. der Modul kleiner werde, indem in dem Ausdrucke $m = \frac{k}{v}$ die Grösse v zunimmt;

2. wegen $O\mathfrak{B} < OB$ und $O\mathfrak{B}' < OB'$ die Grössen A und R, welche die grösstmöglichste Spannung und Pressung bedeuten, sich vermindern und

3. das Curvenstück $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, welches nahezu mit der Abcissenaxe zusammenfällt, im Vergleiche zu DD' kürzer werde, wodurch die Gränzen der Elasticität näher rücken, und die unter der Benennung „grösste zulässige Spannung und Pressung" beziehungsweise mit a und r bezeichneten Grössen ebenfalls vermindert werden *).

§. 15.

Einfluss der Materialgattung. In den §§. 11, 12, 13 und 14 hat man verschiedene Spannungen und Pressungen unter verschiedenen Umständen jedoch unter der Bedingung eintreten lassen, dass das Materiale, aus welchem das Prisma besteht, unverändert bleibe. Es ist daher schliesslich noch der Einfluss zu beurtheilen, welchen verschiedene Materialien auf die Resultate ausüben. Dieser Einfluss wird darin bestehen, dass die Grössen A, R, a, r, δ_a, δ_r und m einer abermaligen Veränderung nach Massgabe des gewählten Materiales unterliegen, ohne dass dabei die allgemeinen Gesetze modificirt werden.

§ 16.

Veränderung des Querschnittes. Ausser den Längenveränderungen, welche ein prismatischer Körper durch einwirkende Spannungen und Pressungen erleidet, muss noch der Veränderlichkeit des Querschnittes erwähnt werden. Diese Veränderung nimmt erfahrungsgemäss mit den einwirkenden Kräften zu, dieselbe ist indess innerhalb der Elasticitätsgränzen so gering, dass sie nicht wahrnehmbar, oder doch als unwesentlich zu betrachten ist. Wenn es sich daher um die sichere Existenz des Körpers handelt, in welchem Falle die Elasticitätsgränzen der Materie nicht überschritten werden

*) Die Kräfte A und R unter den günstigsten Umständen sind offenbar auch das Mass für die sogenannte absolute und rückwirkende Festigkeit des Materiales.

dürfen, so kann von der erwähnten Veränderlichkeit des Querschnittes unbedenklich abgesehen werden.

§. 17.

Besondere Bemerkungen für die Praxis. Bisher sind die Untersuchungen allgemein gewesen, und eben so nur allgemeine Erfahrungsresultate benützt worden. Indem eine solche Behandlungsweise zunächst zur Erreichung einer Uebersicht dient, wird zugleich die Anknüpfung der nunmehr wichtigen Untersuchung über die Widerstandsfähigkeit specieller Materialien unter speciellen Umständen um so leichter ermöglicht, als dieselbe eigentlich nur in der näheren und zwar numerischen Bestimmung der Grössen A, R, a, r, δ_a, δ_r und m zu bestehen hat. Zuvor muss jedoch zur Vermeidung von Missverständnissen Folgendes in Erwägung gezogen werden:

1. Bei der oft sehr verschiedenen Qualität einer bestimmten Materialsgattung (z. B. Schmiedeeisen, Tannenholz) leuchtet die Unmöglichkeit ein, die erwähnten Grössen selbst unter bestimmten Umständen mit unveränderlichen Ziffern auszudrücken. Man kann sich in dieser Beziehung nur auf einen Spielraum beschränken, innerhalb welchem in der Regel die betreffenden Werthe jener Grössen sich befinden, und wird sich daher mit durchschnittlichen Werthen begnügen müssen, ohne dabei die Möglichkeit eintretender Ausnahmen ablehnen zu können.

2. Es versteht sich von selbst, dass in wichtigen Fällen mit der zu verwenden beabsichtigten Materialsgattung zur möglichst genauen Erforschung des Widerstandes separate Versuche anzustellen, und die betreffenden Ergebnisse mit den in den vorausgegangenen §§. enthaltenen Begriffen auf entsprechende Weise zu combiniren sein werden. Bei solchen Versuchen ist offenbar die vorzüglichste Aufmerksamkeit auf das Verhalten des Materiales innerhalb der Elasticitätsgränzen, so wie auf die Erforschung dieser letzteren zu richten. Die Kenntniss des Widerstandes ausserhalb der Elasticitätsgränzen einerseits bis zum Zerreissen, anderseits bis zum Zerquetschen, ist übrigens ebenfalls schätzbar, obwohl ihr nur eine untergeordnete Wichtigkeit beizulegen ist. Da ferner die Versuche, falls sie sich über beide Elasticitätsgränzen a und r hinaus erstrecken sollen, nicht mit einem und demselben Stücke angestellt werden können, und zu die-

sem Zwecke mindestens mit zwei Stücken experimentirt werden muss, so wird, um eine Vergleichung der auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Resultate zulassen zu können, bei der Wahl der verschiedenen Stücke die nöthige Vorsicht darauf zu verwenden sein, dass sie hinsichtlich der Qualität nicht auf eine die Resultate beirrende Weise differiren.

3. Die auf die Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen stehen mit der Voraussetzung in Verbindung, dass das Prisma durch die Pressung keine Ausbiegung erfährt. Es muss daher die Länge desselben im Vergleiche zu seinen Querschnittsdimensionen klein genug sein, um diese Bedingung zu erfüllen, und den eigentlichen Widerstand gegen Zusammendrückung zu erhalten, welcher von der Länge des Prismas als unabhängig betrachtet werden darf. Indem man vorläufig bloss diesen eigentlichen Widerstand gegen das Zusammendrücken betrachtet, behält man sich vor, in der Folge auch den Fall zu behandeln, wo wegen des Eintrittes einer Seitenbiegung des Prismas die grösste zulässige Pressung r per □″ mit der Länge abnimmt *).

4. Bei der in den vorhergehenden §§. angestellten Untersuchung ist die Eigenschaft der Homogenität der Materie vorausgesetzt, daher in besonderen Fällen stets in Ueberlegung zu nehmen sein wird, in welchem Grade diese Eigenschaft als vorhanden angesehen werden dürfe, und in wie ferne vorkommende Mängel eine Verminderung der Widerstandsfähigkeit besorgen lassen.

5. Darf nicht übersehen werden, dass Versuche über den Widerstand der Materialien in der Regel nur unter den im § 6 erwähnten günstigsten Umständen statt zu finden pflegen, dass aber selbst in diesem einfachsten Falle die in Rede stehenden Grössen, insbesondere die Elasticitätsgränzen, sich mit keiner grossen Genauigkeit bestimmen lassen, weil es dabei grösstentheils auf Schätzungen ankommt, welche nach Massgabe individueller Meinungen mehr oder weniger Verlässlichkeit darbieten werden. Man begreift, dass die Schwierigkeiten zur Durchführung solcher Schätzungen wachsen müssen, wenn die Umstände sich minder günstig gestalten, und sodann benützbare Versuche zumeist nur in beschränkter Weise sich

*) Siehe noch die Anmerkung 2. Seite 54.

anstellen lassen, wie diess beispielsweise bei der Beurtheilung des Einflusses von Erschütterungen und einer langen Dauer des Materiales eintreten würde. In solchen Fällen müssen insbesondere Erfahrungen über ausgeführte Constructionen geeignete Anhaltspuncte bieten. Doch können hiebei nicht immer einfache Vergleichungen genügen, sondern es wird zuweilen ein nicht gewöhnlicher Scharfsinn erfordert, um Erfahrungsresultate folgerichtig zu benützen.

6. Endlich ist es klar, dass bei der graphischen Darstellung der fraglichen Curven zunächst nur einzelne Puncte derselben bestimmt werden können, und erst hierauf die Verbindung dieser zu continuirlichen Curven zu bewerkstelligen ist. Solcher Puncte wird man so viele erhalten, als man Partien zusammengehöriger Werthe von k, v und v_1 aus Versuchen zu ermitteln in der Lage ist, daher die erwähnten Curven desto genauer erhalten werden, je umfassendere Versuchsresultate in dieser Beziehung zu Gebote stehen.

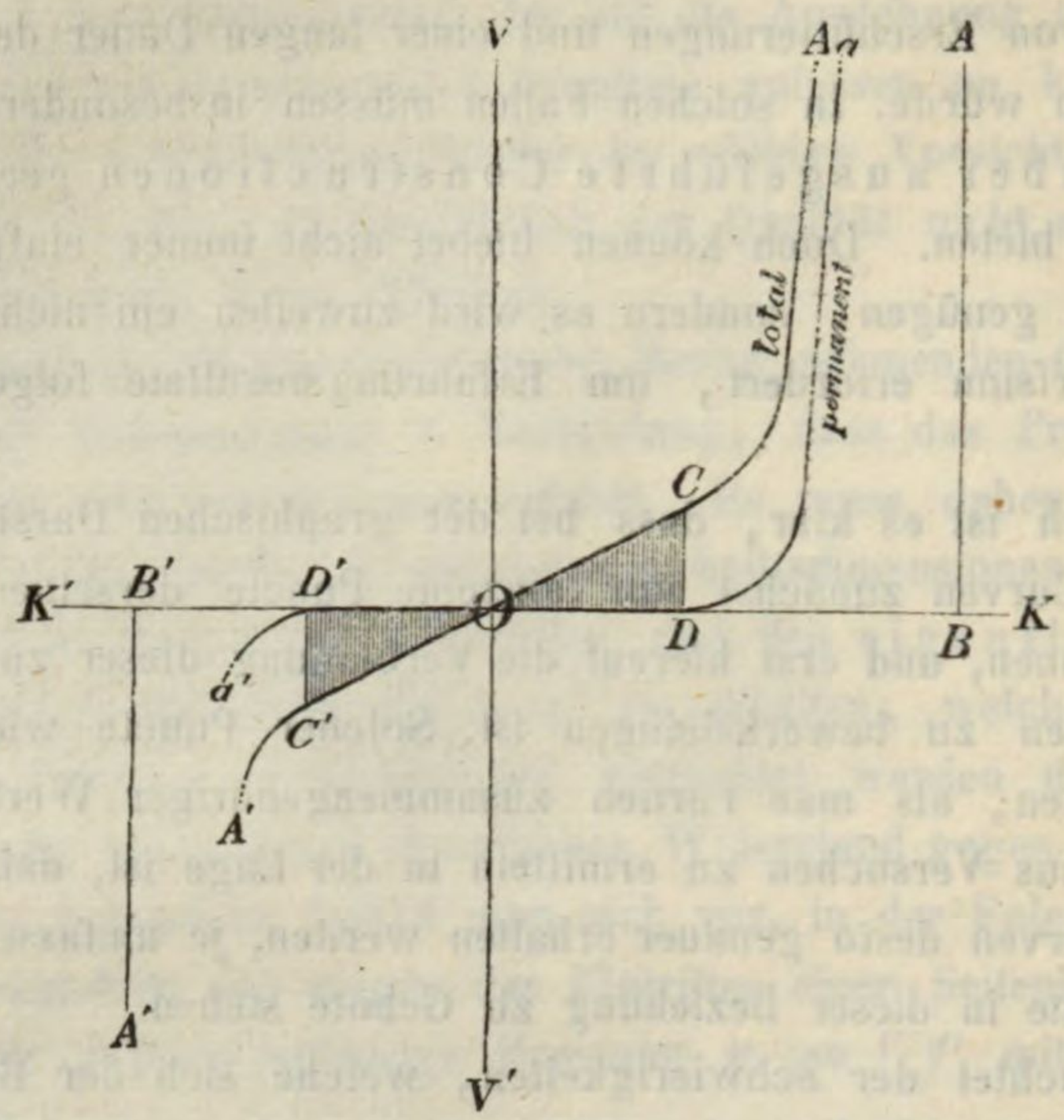
Ungeachtet der Schwierigkeiten, welche sich der Bestimmung der auf die Beurtheilung des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen entgegensetzen, kann man doch der Ueberzeugung Raum geben, dass es in den vorkommenden Fällen gelingen werde, wissenschaftliche Betrachtungen mit practischer Beurtheilung dergestalt zu vereinen, um die daraus hervorgehenden Resultate mit einer für die Praxis genügenden Beruhigung als brauchbar empfehlen zu können. In dieser Ueberzeugung und unter Festhaltung der gemachten Erinnerungen folgen nunmehr die Erörterungen über den Widerstand gegen Ausdehnung und Zusammendrückung der im Constructionswesen vorkommenden Holz- und Eisenmaterialien, welche aus besonderen Versuchen und anderweitigen Erfahrungen entnommen sind.

§. 18.

Schmiedeeisen. Erfahrungsresultate. Schätzungen.

Nach den Versuchen anerkannter Fachmänner (insbesondere Gerstner's, Hodgkinson's) kann der Widerstand des Schmiedeeisens gegen Ausdehnung und Zusammendrückung mittelst Fig. 6 versinnlicht werden, in welcher die zu den totalen und permanenten Längenveränderungen gehörigen Curven AA' und aa', und zwar mit Rücksicht auf die

Fig. 6.



günstigsten Umstände in entsprechender Weise dargestellt erscheinen. Die Merkmale dieser Curven, so wie die auf den Widerstand Bezug nehmenden Resultate sind nachstehend zusammengestellt:

1. Die grösstmöglichste Spannung $OB = A$ unter den günstigsten Umständen variirt in der Regel zwischen 300 und 700 Zentnern. Als Mittelwerth möge $A = 500$ Ztr. gelten.

Die grösstmöglichste Pressung $OB = R$ unter denselben Umständen kann bei so kurzen Stücken, wo die Länge ohne merklichen Einfluss ist, ungefähr mit $\frac{4}{5} A$ angenommen werden. Für den betreffenden Mittelwerth $A = 500$ würde sodann $R = 400$ Ztn. werden. Mit dem Eintritte von minder günstigen Umständen vermindern sich die Werthe von A und R.

2. Die grösste zulässige Spannung $OD = a$, so wie die gleichnamige Pressung $OD' = r$ können ebenfalls verschiedene Werthe haben, sie weichen jedoch in der Regel nicht viel von einander ab, ob zwar $r < a$ ist. Für genügend kurze Stücke wird die Annahme $a = r$ von der Wahrheit sich nicht weit entfernen. Unter den günstigsten Umständen mag man im Mittel $a = 200$ Ztr. gelten lassen. Mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen vermindern sich diese Grössen.

So würde man z. B. bei Kettenbrücken die grösste zulässige Spannung in den schmiedeeisernen Kettengliedern nur bis auf ungefähr $\frac{5}{6}$ von jener unter den günstigsten Umständen treiben dürfen, da in diesem Falle die zu besorgenden Erschütterungen, die beabsichtigte lange Dauer des Bauobjectes und der eben so lang währende Einfluss der Atmosphärilien zusammengenommen solche Umstände sind, welche die vorgeschlagene Bestimmung von a rechtfertigen. Hienach wäre mit Benützung des angegebenen Mittelwerthes sofort $a = 166\frac{2}{3}$ Zentner zu setzen. Noch kleiner müsste der Werth von a für die bei Kettenbrücken vorkommenden Hängestangen — abgesehen von einer etwa geringeren Qualität des Eisens im Vergleiche mit dem der Kettenglieder — und zwar darum gewählt werden, weil bei dem geringen Querschnitte und bei der verhältnissmässig bedeutenden Länge der einzelnen Hängestangen, so wie bei der grossen Ungleichförmigkeit, welche bei dem Zuge in denselben eintreten kann, der nachtheilige Einfluss von Erschütterungen noch höher als für die Kettenglieder anzuschlagen ist. Es würde nämlich in dieser Beziehung nicht rathsam sein, im Vergleiche zu dem erwähnten Mittelwerthe viel mehr als $a = 100$ Zentner anzunehmen.

Dieses Beispiel beweiset zugleich, dass bei einer Construction die verschiedenen Bestandtheile selbst bei gleicher Qualität des verwendeten Materials nicht immer auf dieselbe Weise zu beurtheilen sein werden, und dass die aus den Versuchen gefundenen Resultate, welche sich in der Regel auf die günstigsten Umstände beziehen, nicht ohne Weiteres auf das Constructionswesen übertragen werden dürfen, sondern zuvor in Ueberlegung zu nehmen ist, in wie ferne eine Reduction derselben eintreten muss

3. Der Modul m innerhalb der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung kann unter den günstigsten Umständen durchschnittlich mit 250,000 angenommen werden. Derselbe unterliegt einer weit geringeren Variation, als die vorbesprochenen Grössen, da in dieser Hinsicht die Qualität des Eisens und die besonderen Umstände, welche die Einwirkung der Kräfte begleiten, keinen im Verhältnisse so bedeutenden Einfluss haben, wie solcher sich auf die Grössen a und r geltend macht. Der Modul $m = 250{,}000$ zeigt übrigens im Sinne des §. 13 zugleich an, dass jeder Zentner Spannung oder Pressung eine Längenveränderung hervorbringt, welche mit dem m^{ten} (also durchschnittlich mit dem $250{,}000^{sten}$) Theile der Länge zu bemessen ist, wenn anders hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Ausser diesen Gränzen nimmt der Modul ab.

4. Die grösste zulässige Ausdehnung δ_a und die gleichnamige Zusammendrückung δ_r (im Verhältniss zur

Länge) werden mit Rücksicht auf den §. 13 und die angenommenen Mittelwerthe der Grössen a, r und m zunächst unter den günstigsten Umständen aus den Gleichungen (5) $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1250}$ und $\delta_r = \frac{r}{m} = \frac{1}{1250}$ zu entnehmen sein. Da sich unter minder günstigen Umständen in den beiden Brüchen $\frac{a}{m}$ und $\frac{r}{m}$ der Zähler verhältnissmässig mehr als der Nenner vermindert, so ist klar, dass sich in diesem Falle die grössten zulässigen Längenveränderungen δ_a und δ_r gleichfalls vermindern müssen. Diese Verminderung wird sich ohne Anstand ergeben, wenn nur vorerst die Werthe von a, r und m fesgestellt sind. Auch mag bemerkt werden, dass die Ausdehnung unmittelbar vor dem Zerreissen sehr verschieden ist, indem das Verhältniss AB, wie bei sehr weichem Eisen, sogar bis auf $\frac{1}{8}$ steigen, und selbst bei minder weichem Eisen noch immer $\frac{1}{25}$ betragen kann, während es bei dem harten unausgeglühten Eisen zuweilen nicht $\frac{1}{300}$ erreicht.

5. Die auf die totalen und permanenten Ausdehnungen Bezug nehmenden Curvenäste OA und Oa erinnern der Form nach an hyperbolische Curven, mit denen sie auch in der Zeichnung theilweise zusammenfallen. Auch findet man, dass diese Curvenäste, wenn k ungefähr $= 1\frac{1}{2}\ a$, d. h. die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung bereits um $\frac{1}{2}a$ überschritten ist, eben so, wie innerhalb der Elasticitätsgränzen näherungsweise geradlinig werden. Daraus folgt, dass die correspondirenden Zunahmen in den Spannungen und Ausdehnungen (sie seien total, permanent oder elastisch) nicht nur nach §. 13 innerhalb der Elasticitätsgränzen, sondern auch unter der oben bezeichneten Bedingung ausserhalb derselben als proportional, jedoch nach verschiedenen Exponenten, gelten können *).

§. 19.

Qualität des Schmiedeeisens mit Rücksicht auf die Grösse und Form des Querschnittes. Dünne Eisenstücke haben im Vergleiche zu dicken in der Regel eine bessere Qualität, weil man bei ersteren durch das Hämmern oder Walzen

*) Auf diese Eigenschaft hat schon Gerstner aufmerksam gemacht.

eine grössere Dichte nnd Homogenität zu bewirken im Stande ist, als bei letzteren. Es leisten daher meistentheils dünne Eisenstäbe, flache Eisenschienen u. s. w. einen verhältnissmässig grösseren Widerstand, als massiv gehaltene Stücke. Hierin liegt auch die Ursache, dass man z. B. zu Kettengliedern bei Kettenbrücken flache Schienen verwendet, die im Vergleich zur Breite eine nur geringe Dtcke besitzen.

§. 20.

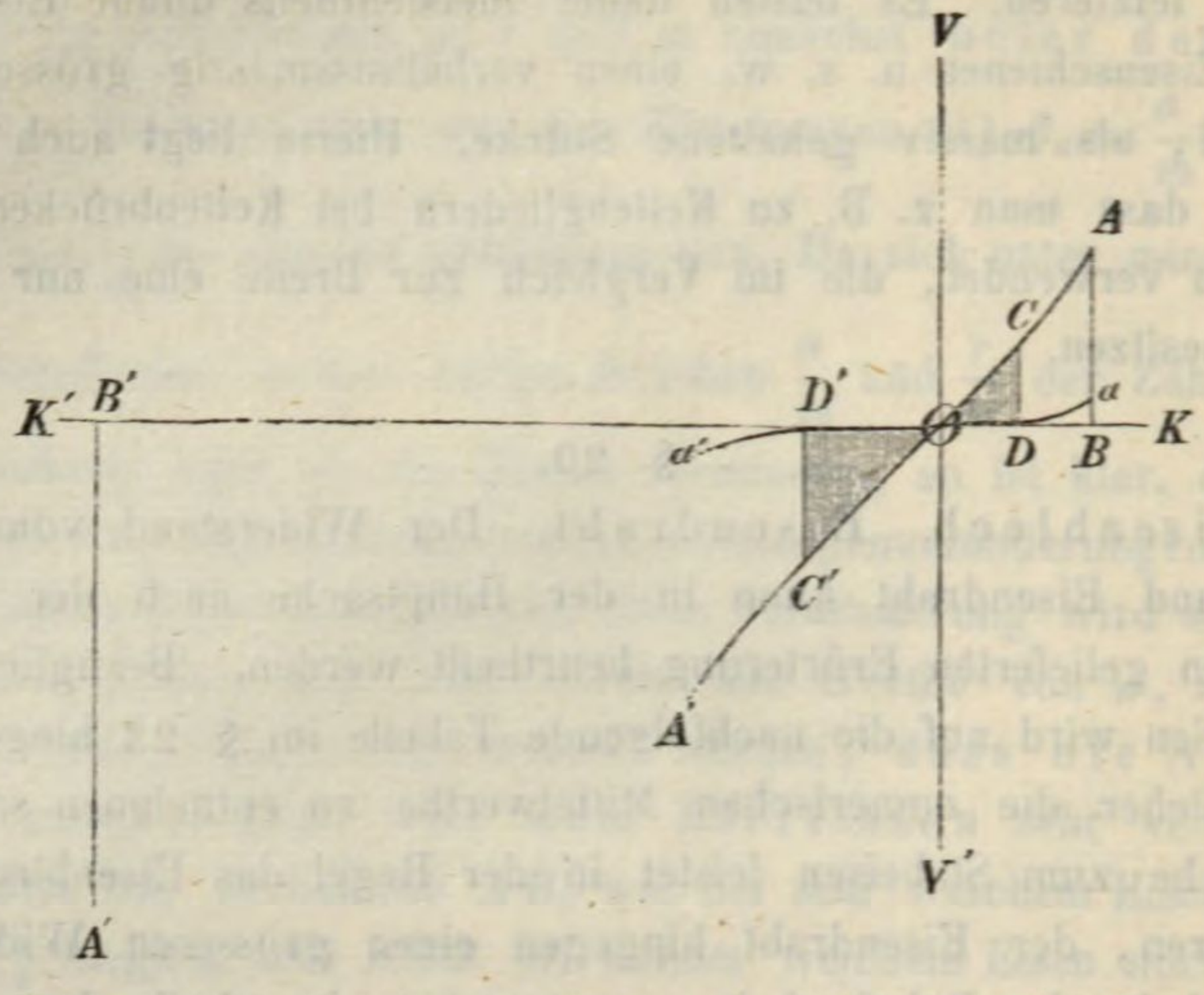
Eisenblech. Eisendraht. Der Widerstand vom Eisenblech und Eisendraht kann in der Hauptsache nach der für das Stabeisen gelieferten Erörterung beurtheilt werden. Bezüglich dieser Materialien wird auf die nachfolgende Tabelle im § 23 hingewiesen, aus welcher die numerischen Mittelwerthe zu entnehmen sind. Im Vergleiche zum Stabeisen leistet in der Regel das Eisenblech einen geringeren, der Eisendraht hingegen einen grösseren Widerstand, während in der Dehnbarkeit — wenigstens innerhalb der Elasticitätsgränzen — kein grosser Unterschied vorhanden ist. Auch hält man den Unterschied nicht für wesentlich, welcher in dem Widerstande des Eisenbleches dadurch entsteht, dass man die Richtung der Kraftwirkung von der des geschehenen Walzens des Bleches abweichend wählt.

§. 21.

Gusseisen. Erfahrungsresultate. Schätzungen. Der Widerstand des Gusseisens gegen Ausdehnung und Zusammendrückung kann nach den (vorzüglich von Hodgkinson) angestellten Versuchen mittelst Fig. 7 graphisch versinnlicht, und aus nachstehenden Bemerkungen beurtheilt werden:

1. Indem sich AA' auf die totalen, und aa' auf die permanenten Längenveränderungen bezieht, variiren die grösstmöglichste Spannung $OB = A$ und die gleichnamige Pressung $OB' = R$ unter den günstigsten Umständen je nach der verschiedenen Qualität sowohl in ihrem eigentlichen Werthe als auch in ihrem gegenseitigen Verhältnisse bedeutend. In der Regel ist die Grösse A zwischen 100 und 300 Zentnern, das Verhältniss $A : R$ aber zwischen 1 : 4 und 1 : 8 enthalten, und als Mittelwerthe mögen $A = 180$ Zentner und $R = 1000$ Zentner gelten, wenn man das

Fig 7.



Zerquetschen nur auf so kurze Stücke bezieht, dass die Länge ohne merklichen Einfluss ist. Mit dem Eintritte von minder günstigen Umständen vermindern sich diese Werthe.

2. Die grösste zulässige Spannung $OD = a$, so wie die gleichnamige Pressung $OD' = r$ unter den günstigsten Umständen können ebenfalls verschieden sein, und es scheint, dass das Verhältniss $a : r$ je nach der weicheren oder härteren Qualität von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{4}$ variirt. Als Durchschnittswerthe kann man $a = 80$ Ztn., $r = 240$ Ztn. und $a : r = 1 : 3$ gelten lassen, wenn r sich nur auf sehr kurze Stücke bezieht. Mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen vermindern sich die Grössen a und r.

3. Der Modul m innerhalb der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung kann durchschnittlich mit 125,000 angenommen werden. Ausserhalb der Elasticitätsgränzen, so wie mit der Vermehrung von minder günstigen Umständen wird der Modul kleiner. In Ansehung der Bedeutung des Bruches $\frac{1}{m}$ findet die für das Schmiedeeisen angegebene Bemerkung im §. 18 auch hier Anwendung

4. Die grösste zulässige Ausdehnung δ_a und die gleichnamige Zusammendrückung δ_r (im Verhältniss zur

Länge) sind aus den Gleichungen (5) zu entnehmen. Sonach wird mit Rücksicht auf die für die günstigsten Umstände angegebenen Mittelwerthe von a, r und m sofort $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1562}$ und $\delta_r = \frac{r}{m} = \frac{1}{521}$, daher auch $\delta_a : \delta_r = a : r = 1 : 3$. Unter minder günstigen Umständen vermindern sich die Werthe von δ_a und δ_r aus demselben Grunde, wie beim Schmiedeeisen (§. 18). Die Ausdehnung AB unmittelbar vor dem Zerreissen hat man mit $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{600}$ der Länge beobachtet.

5. Die auf die totalen und permanenten Ausdehnungen Bezug nehmenden Curvenäste OA und Oa sind in so ferne merkwürdig, als das innerhalb der Elasticitätsgränze zwischen den Spannungen und totalen Ausdehnungen bemerkte Gesetz der Proportionalität auch ausserhalb dieser Gränzen selbst bis zum Zerreissen keine bedeutende Veränderung erleidet.

§. 22.

Holz. Erfahrungsresultate. Schätzungen. Als Bauholz werden vorzüglich verwendet: Tannen, Fichten, Kiefer, Lärchen und Eichen. Die bisherigen Versuche lassen nicht mit Bestimmtheit die Curven angeben, welche sich auf den Widerstand dieser Materialien gegen Ausdehnung und Zusammendrückung beziehen. Man muss sich daher mit denjenigen Angaben begnügen, welche den Zustand derselben innerhalb der Elasticitätsgränzen darstellen. Die Praxis bedarf übrigens nicht mehr. Diese Angaben sind aus der nachfolgenden Tabelle im §. 23 zu entnehmen. Es scheint, dass überhaupt für Holzmaterialien, so weit die bisherigen Erfahrungen eine Schätzung ermöglichen, ungefähr die Relationen $R = \frac{1}{2}A$ und $r = \frac{3}{4}a$ angenommen werden können, obgleich die die Elasticitätsgränzen bestimmenden Grössen a und r einer sehr grossen Veränderung unterliegen. Nur für Eichenholz mag man sich die Annahmen $R = \frac{2}{3}A$ und $r = \frac{5}{6}a$ erlauben. Die Verhältnisse $\frac{A}{R}$ und $\frac{a}{r}$ sind zwar bei vorzüglich guten Holzstücken etwas grösser, allein für die Anwendung muss man darauf Rücksicht nehmen, dass die Mängel in der Materialsqualität auf A und a in der Regel einen nachtheiligeren Einfluss nehmen, als auf R und r, daher es gerathen erscheint, die ersteren Grössen (insbesondere beim Eichenholze) verhältnissmässig

niedriger zu stellen, als die letzteren, wenn die Pressung nur auf sehr kurze Stücke bezogen wird. Uebrigens haben auf die Wahl der Grössen a und r von den obwaltenden Umständen vorzüglich die verlangte Zeitdauer für den sicheren Bestand und die stattfindenden chemischen Einwirkungen grossen Einfluss.

So z. B. wird diese Wahl wesentlich verschieden sein, je nachdem man beabsichtigt, eine Holzconstruction bloss in provisorischer Weise auf einige Jahre herzustellen, oder aber in definitiver Weise auf die grösstmöglichste Dauer auszuführen. Eben so wird man zu berücksichtigen haben, ob die Bestandtheile der Construction, etwa wie bei Brücken, abwechselnd der

Benennung des Materiales	Durchschnittswerthe auf den												
	Unter den günstigsten Umständen							Unter					
								Grösstentheils con-					
								Mässige Er-					
								Dauer einige Jahre *)					
	A	R	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$
Schmiedeeisen	500	$\frac{4}{5}A$	200	a	250000	$\frac{1}{1250}$	δ_a	—	—	—	—	—
Eisenblech	450	—	180	—	220000	$\frac{1}{1222}$	—	—	—	—	—	—
Eisendraht	800	—	320	—	270000	$\frac{1}{848}$	—	—	—	—	—	—
Gusseisen	180	$5\frac{1}{2}A$	80	$3a$	125000	$\frac{1}{1562}$	$3\delta_a$	—	—	—	—	—
Tannenholz	120	$\frac{1}{2}A$	32	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{500}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	24	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{667}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Fichtenholz	100	$\frac{1}{2}A$	28	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{536}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	20	$\frac{3}{4}a$	5000	$\frac{1}{750}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Kieferholz	130	$\frac{1}{2}A$	36	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{444}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	26	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{615}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Lärchenholz	140	$\frac{1}{2}A$	40	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{400}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	28	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{571}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Eichenholz	100	$\frac{2}{3}A$	32	$\frac{5}{6}a$	15000	$\frac{1}{469}$	$\frac{5}{6}\delta_a$	20	$\frac{5}{6}a$	15000	$\frac{1}{750}$	$\frac{5}{6}\delta_a$

*) Wie z. B. für hölzerne Nothbrücken. **) Wie z. B. für definitive

Nässe und Trockenheit ausgesetzt, oder — wie bei Wohngebäuden — von diesem nachtheiligen Einflusse mehr oder weniger geschützt seien.

§. 23.

Tabellarische Zusammenstellung. Zur Erlangung einer Uebersicht und Vergleichung in Betreff des Widerstandes der im Constructionswesen gebräuchlichsten Holz- und Eisenmaterialien unter gewissen Umständen kann die nachfolgende Tabelle, auf welche bereits in den §§. 20 und 22 aufmerksam gemacht wurde, manche Anhaltspuncte gewähren. Es wird jedoch bei dieser Gelegenheit der Inhalt des §. 17 wiederholt empfohlen.

Wiener Zentner und Wiener Zoll bezogen.

folgenden Umständen:

stante Krafteinwirkung und gewöhnlicher Einfluss der Atmosphärilien

schütterungen	Möglichst lange Dauer ***)													
Möglichst lange Dauer **)					wenige Erschütterungen					bedeutende Erschütterungen				
a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$
—	—	—	—	—	166	a	240000	$\frac{1}{1446}$	δ_a	83	a	230000	$\frac{1}{2771}$	δ_a
—	—	—	—	—	150	—	210000	$\frac{1}{1400}$	—	75	—	200000	$\frac{1}{2667}$	—
—	—	—	—	—	266	—	260000	$\frac{1}{977}$	—	133	—	250000	$\frac{1}{1880}$	—
—	—	—	—	—	50	$4a$	120000	$\frac{1}{2400}$	$4\delta_a$	—	—	—	—	—
12	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1250}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	$\frac{3}{4}a$	14000	$\frac{1}{1400}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1154}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1071}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	$\frac{5}{6}a$	14000	$\frac{1}{1400}$	$\frac{5}{6}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

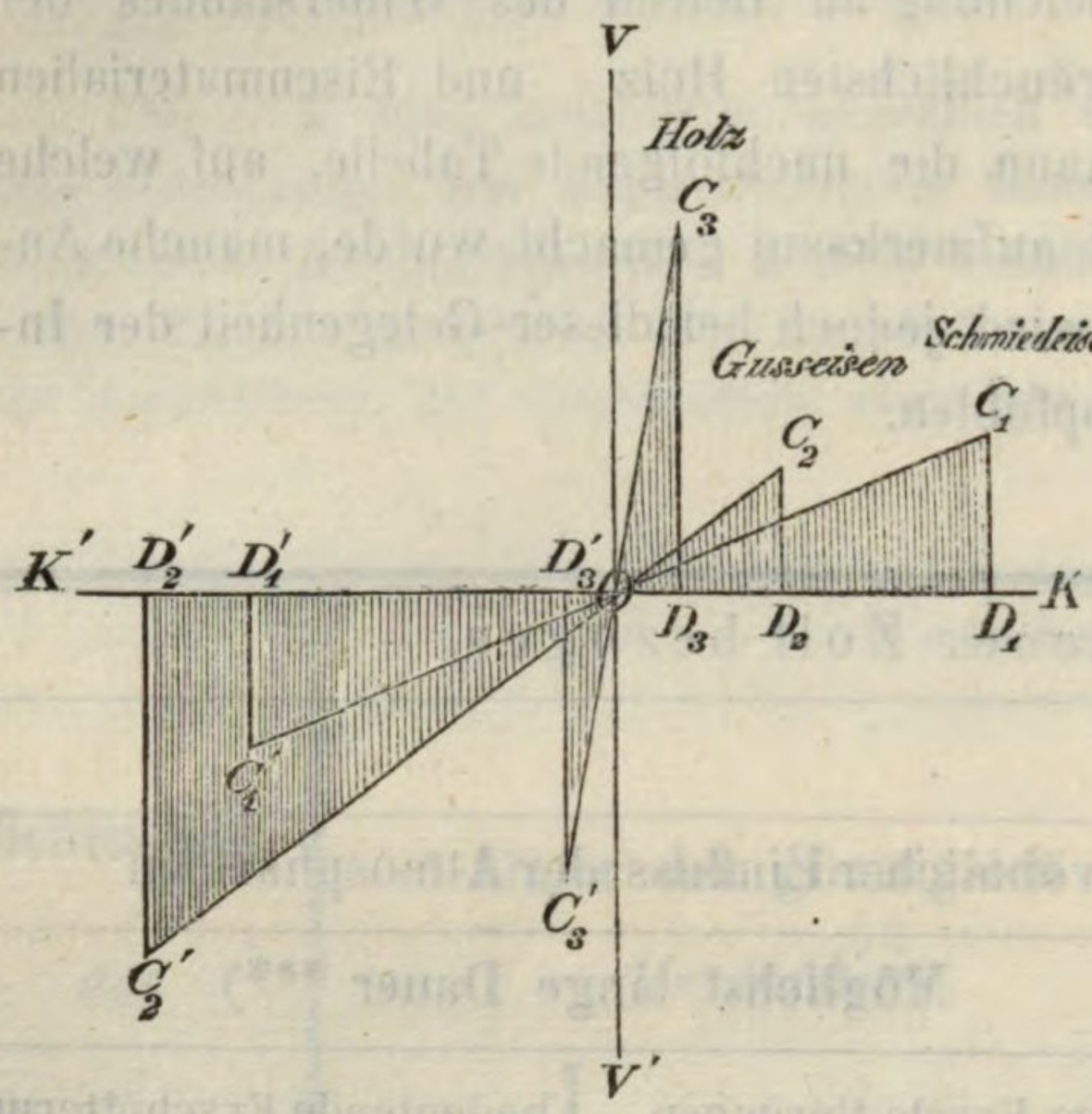
Holzbrücken.

***) Wie z. B für eiserne Brücken.

§. 24.

Graphische Vergleichung zwischen Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz. Die Vergleichung des Widerstandes von Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz gegen Ausdehnung und Zusammendrückung innerhalb der Elasticitätsgränzen kann mittelst Fig. 8 graphisch dargestellt werden, in welcher die Linien $C_1 C'_1$, $C_2 C'_2$ und $C_3 C'_3$ aufeinanderfolgend mit den totalen Längenveränderungen der angeführten Materialien correspondiren. Setzt man die günstigsten Umstände voraus, und nimmt man als bestimmte Holzgattung etwa Tannenholz an, so stellen sich mit Benützung der im vorigen §. angegebenen tabellarischen Mittelwerthe in der in Rede stehenden Figur folgende Verhältnisse heraus:

Fig. 8.



$$\text{f. Schmiedeeisen} \begin{cases} OD_1 = 200 \\ OD'_1 = 200 \\ C_1 D_1 = \frac{1}{1250} \\ C'_1 D'_1 = \frac{1}{1250} \end{cases} \quad \text{für Gusseisen} \begin{cases} OD_2 = 80 \\ OD'_2 = 240 \\ C_2 D_2 = \frac{1}{1562} \\ C'_2 D'_2 = \frac{1}{521} \end{cases} \quad \text{für Tannenholz} \begin{cases} OD_3 = 32 \\ OD'_3 = 24 \\ C_3 D_3 = \frac{1}{500} \\ C'_3 D'_3 = \frac{1}{667} \end{cases}$$

daher auch

$$\begin{aligned} &OD_1 : OD_2 : OD_3 : OD'_1 : OD'_2 : OD'_3 = \\ &= 200 : 80 : 32 : 200 : 240 : 24 \\ &= 25 : 10 : 4 : 25 : 30 : 3 \\ &= 1 : 0{\cdot}4 : 0{\cdot}16 : 1 : 1{\cdot}2 : 0{\cdot}12 \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} &C_1 D_1 : C_2 D_2 : C_3 D_3 : C'_1 D'_1 : C'_2 D'_2 : C'_3 D'_3 = \\ &= \tfrac{1}{1250} : \tfrac{1}{1562} : \tfrac{1}{500} : \tfrac{1}{1250} : \tfrac{1}{521} : \tfrac{1}{667} \\ &= 0{\cdot}0008 : 0\,00064 : 0{\cdot}002 : 0{\cdot}0008 : 0{\cdot}00192 : 0{\cdot}0015 \\ &= 1 : 0{\cdot}8 : 25 : 1 : 2{\cdot}4 : 1{\cdot}9. \end{aligned}$$

Demgemäss kann in der Ueberzeugung, dass die Wahl einer andern Holzgattung anstatt Tannenholz die Hauptsache nicht wesentlich beirre, geschlossen werden:

1. dass bei einer und derselben Kraft die totalen Längenveränderungen innerhalb der Elasticitätsgränzen beim Holze ungefähr 16mal und beim Gusseisen doppelt so gross sind, wie beim Schmiedeeisen, daher das letztere die geringste Formveränderung erleidet;

2. dass der kleinste Spielraum für die Elasticitätsgränzen beim Holze vorhanden ist, ferner das Schmiedeeisen den grössten Zug, das Gusseisen aber den grössten Druck aushalten kann;

3. dass daher bei gespannten Constructionstheilen das Schmiedeeisen dem Gusseisen, und bei gepressten Constructionstheilen das Gusseisen dem Schmiedeeisen vorzuziehen ist, wenn man lediglich die Widerstandsfähigkeit im Auge hat,

4. dass aber bei gepressten Constructionstheilen in dem Falle, als man die geringste Formveränderung derselben bezweckt, das Schmiedeeisen bessere Dienste leistet, als das Gusseisen, und man sich deshalb veranlasst finden kann, das erstere dem letzteren vorzuziehen, wenn überhaupt auch die anderen vorkommenden Verhältnisse, z. B. die öconomischen, nicht dagegen sprechen *).

§. 25.

Anwendung der Gleichung (4). Nach dem §. 13 bezieht sich die Gleichung (1) $v = \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ auf die totalen und elastischen Längenveränderungen, wenn durch die als Spannung oder Pressung wirkende Kraft k die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Da übrigens in der Gleichung $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ vier Grössen vorkommen, also auch die Proportion $\Delta l : l = k : m$ gebildet werden kann, so lässt sich jede einzelne Grösse durch die 3 andern ausdrücken.

Es ist nämlich

$$\Delta l = \frac{k l}{m},\ l = \frac{m \Delta l}{k},\ k = \frac{m \Delta l}{l} \text{ und } m = \frac{k l}{\Delta l}.$$

Für die 3 ersten Relationen muss der Modul bekannt sein, während

---

*) Aus Anlass dieses Vorzuges des Schmiedeeisens vor dem Gusseisen hat sich z. B. Fairbairn entschlossen, bei den grossen englischen Röhrenbrücken sowohl die gespannten als auch die gepressten Röhrentheile (beziehungsweise Boden und Decke der Röhren) ganz aus Schmiedeeisen herzustellen.

Staatl.Bibliothek
Regensburg

die letzte Relation dazu dient, den Modul aus directen Versuchen über Ausdehnung und Zusammendrückung zu bestimmen *).

Um die Anwendung durch ein Beispiel zu zeigen, werde die Frage gestellt, um wie viel sich eine 10 Klafter lange Stange aus Schmiedeeisen bei einem Zuge von 125 Zentnern pr. Quadratzoll verlängern würde, wenn der Modul $m = 250{,}000$ anzunehmen wäre und von dem eigenen Gewichte der Stange abstrahirt würde. In diesem Falle hätte man wegen $l = 720''$ und $k = 125$ Ztr. zunächst $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m} = \frac{1}{2000}$, also auch die Ausdehnung $\Delta l = \frac{l}{2000} = 0{\cdot}36$ Zoll.

§. 26.

Gefährlicher Querschnitt**). Unter allen Querschnitten des materiellen Prismas nennt man denjenigen **den gefährlichen Querschnitt**, in welchem vergleichungsweise bei hinreichender Grösse der Anspruchsnahme **zuerst** die Gränze der Elasticität entweder für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung erreicht wird, daher die geringste Sicherheit für den Zusammenhang der Materie vorhanden ist. Hiernach leuchtet ein, dass auf diesen besonderen Querschnitt, welcher die schwächste Stelle des Prismas bezeichnet, das vorzüglichste Augenmerk gerichtet werden muss, weil die nöthige Sicherheit, wenn sie an dieser Stelle vorhanden ist, um so mehr an den übrigen Stellen gegenwärtig sein wird. Auf die Lage des gefährlichen Querschnittes hat übrigens der grössere oder geringere Grad der Homogenität der Materie einen wesentlichen Einfluss. Wenn man daher die schwächste Stelle des Prismas mit Rücksicht auf die Hypothese der vollkommenen Homogenität der Materie aufgefunden hat, so darf man den Umstand nicht aus den Augen verlieren, dass die Lage dieser Stelle nach der grösseren oder geringeren Verschiedenheit in der Qualität der Materie mehr oder weniger unsicher gemacht wird.

---

*) Hodgkinson hat den Modul für Schmiede- und Gusseisen aus Versuchen auf diese Weise bestimmt.

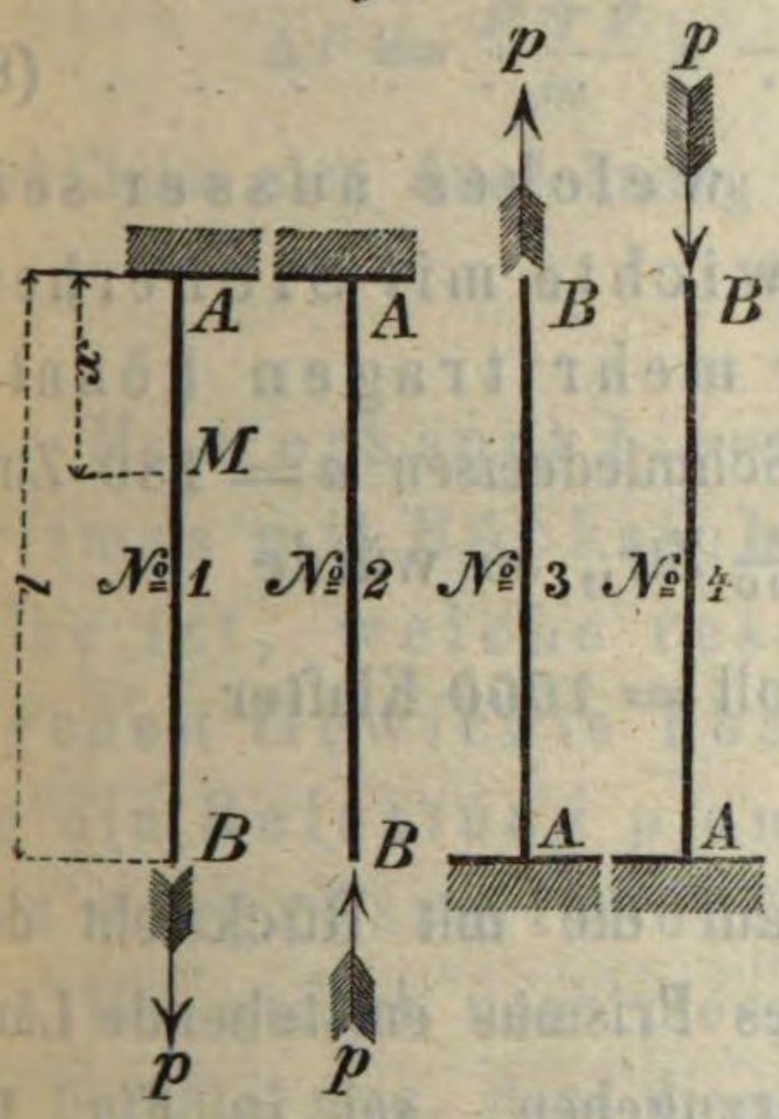
) Nach der von **Poncelet eingeführten Bezeichnung.

Stadt. Bibliothek
Regensburg

§. 27.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas. Um den Einfluss kennen zu lernen, welchen das eigene Gewicht des Prismas sowohl auf die Anspruchsnahme des Materiales, als auch auf die entstehende Längenveränderung hat, beachte man, dass in dieser Beziehung, da mit Rücksicht auf §. 9 ein Ausbiegen der Längenaxe des Prismas ausser Betracht bleibt, sich nur die in Fig. 9 dargestellten 4 Fälle ergeben, in welchen nämlich stets ein vertical gerichtetes Prisma AB an einem Ende festgehalten und am andern Ende in der Richtung der Längenaxe von einer Kraft in Anspruch genommen wird; jedoch darin ein Unterschied vorhanden ist, dass das festgehaltene Ende entweder oben oder unten sich befinden, und die Kraft entweder als Spannung oder als Pressung wirken kann. Es wird nicht nothwendig sein, in eine detaillirte Besprechung aller 4 Fälle einzugehen, sondern genügen, einen einzigen Fall zu behandeln. Wählt man zu diesem Zwecke gleich den 1. Fall, wo das vertical aufgehängte Prisma mit einem Gewichte belastet ist, und bezeichnet dieses letztere mit p, das eigene Gewicht des Prismas hingegen mit g (beide Werthe auf die Quadrateinheit des Querschnitts bezogen), setzt ferner die Länge des Prismas $AB = l$ und heisst für eine beliebige Stelle M, $AM = x$, so entsteht an dieser letzteren offenbar eine Spannung, welche — mit k bezeichnet — sofort mittelst der Gleichung $k = p +$ Gewicht $BM = p + g\frac{l-x}{l}$ auszudrücken ist, daher mit der Abnahme von x zunimmt, und mit Rücksicht auf den vorliegenden Fall für $x = o$ ein Maximum wird.

Fig. 9.



Da dieser Werth $x = o$ die Lage des gefährlichen Querschnittes anzeigt, so befindet sich derselbe an der befestigten Stelle in A, und die daselbst entstehende Spannung pr. □″ ist $k = p + g$ . . . (6) die grösste, welche in dem materiellen Prisma vorwaltet.

Der grösste zulässige Werth von $k = a$ bestimmt sodann auch die grösste zulässige Belastung p, und man hat hiefür

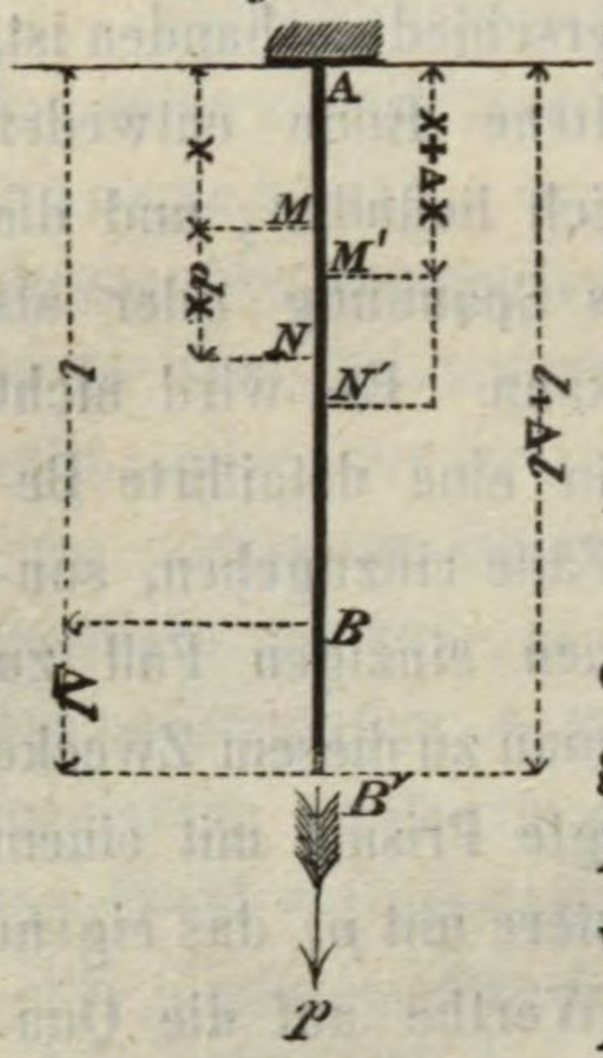
$$p = a - g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Soll $p = o$, d. h. schon in Folge der durch das eigene Gewicht des Prismas hervorgerufenen Anspruchsnahme die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung erreicht werden, so müsste dasselbe so gross sein, dass $g = a$ wird. Ist daher das Gewicht der cubischen Einheit des Materials — also eines Kubikzolles — gleich γ, so erhält man wegen $g = l\gamma$ sofort

$$l = \frac{a}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

nämlich die Länge des Prismas, welches ausser seinem eigenen Gewichte mit Sicherheit keine Belastung mehr tragen könnte.

Fig. 10.



Sei z. B. für Schmiedeeisen $a = 180$ Ztr., und $\gamma = \frac{1}{4}$ Pfd. $= \frac{1}{400}$ Ztr., so würde

$$l = \frac{180}{\frac{1}{400}} \text{ Zoll} = 1000 \text{ Klafter}$$

resultiren.

Um sogleich auf die mit Rücksicht des eigenen Gewichtes des Prismas entstehende Längenveränderung überzugehen, sei in Fig. 10 MN ein Element des materiellen Prismas AB, wie solches vor der Ausdehnung gelegen war, $M'N'$ aber die Lage desselben Elementes nach geschehener Ausdehnung. Nach der in der Figur ersichtlich gemachten Cotirung bedeutet

$MN = dx$ das fragliche Längenelement des Prismas,

$MM' = \Delta x$ die Ausdehnung des Stückes . . . $AM = x$,

$NN' = \Delta x + d.\Delta x$ detto detto . . . $AN = x + dx$,

$NN' - MM' = M'N' - MN = d.\Delta x$ detto . . . . $MN = dx$,

$BB' = \Delta l$ detto des ganzen Prismas . . . $AB = l$ und

$k = p + g\frac{l-x}{l}$ die Spannung per $\square''$ in M.

Wendet man nunmehr unter der Voraussetzung, dass hiebei die Elasticitätsgränze nicht überschritten werde, die im §. 13 gegebene Gleichung (4) $v = \frac{k}{m}$ auf das Element MN an, und beachtet hiebei,

dass $v = \frac{\Delta . dx}{dx} = \frac{d . \Delta x}{dx}$ und m der Modul ist, so hat man

$$\frac{d . \Delta x}{dx} = \frac{k}{m} = \frac{p}{m} + \frac{g(l-x)}{lm}, \text{ daher auch}$$

$$d . \Delta x = \left(\frac{p+g}{m} - \frac{g}{lm} . x\right) . dx,$$

und die ganze Ausdehnung

$$\Delta l = \int_o^l d . \Delta x = \frac{p+g}{m} \int_o^l dx - \frac{g}{lm} \int_o^l x\, dx \text{ oder}$$

$$\Delta l = \frac{p+g}{m} l - \frac{gl}{2m} = \frac{p+\frac{1}{2}g}{m} l, \text{ und endlich für das}$$

Verhältniss der Ausdehnung zur Länge

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p+\frac{1}{2}g}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Man erkennt hienach, dass die Ausdehnung des Prismas mit Rücksicht auf sein eigenes Gewicht dieselbe ist, welche resultirt hätte, wenn von diesem eigenen Gewichte abstrahirt, dafür aber gleichzeitig die Belastung p um das halbe Gewicht des Prismas vergrössert worden wäre.

Um endlich noch die grösste zulässige Ausdehnung zu erhalten, beachte man, dass dieselbe mit der grössten zulässigen Belastung correspondirt, und zu diesem Zwecke in die Gleichung (9) für p der Werth aus der Gleichung (7), nämlich $p = a - g$ zu setzen ist. Demgemäss wäre der zulässige Maximalwerth

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{a-\frac{1}{2}g}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

also kleiner, als wenn das Prisma als gewichtlos betrachtet, und bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommen würde, wo nämlich nach den Gleichungen (5) $\frac{\Delta l}{l} = \delta_a = \frac{a}{m}$ resultirt hätte.

Für den Fall, als das eigene Gewicht des Prismas zur Erreichung der Elasticitätsgränze allein schon genügte, wäre wegen der Gleichung (8) $g = a$, und sofort

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{a}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wornach die ad Gleichung (10) erwähnte Verkleinerung sogar bis auf die Hälfte des Werthes von δ_a gehen kann.

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.

§. 28.

Erklärung. Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung und gegen Zusammendrückung sind derart geformte, bei welchen unter hinreichender Grösse der Anspruchsnahme die betreffende Elasticitätsgränze in allen Querschnitten zugleich erreicht wird. Bei solchen Körpern bleibt daher die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt.

§. 29.

Form solcher Körper. Wird von dem eigenen Gewichte des Körpers abstrahirt, und die Materie als homogen angesehen, so ist die der gestellten Bedingung entsprechende Form offenbar die prismatische; sie weicht jedoch von derselben ab, wenn auf das eigene Gewicht des Körpers Rücksicht genommen wird. Es ist klar, dass man sodann Körperformen wie in Fig. 11 erhalten werde, bei welchen zwar eben so wie bei einem Prisma eine geradlinige Längenaxe AB vorkommen muss, jedoch an den verschiedenen Stellen ungleiche Querschnitte vorhanden sind. Um diese Form näher kennen zu lernen, sei Fig. 12 ein solcher Körper einer spannenden oder pressenden Kraft P ausgesetzt, und man nenne

Fig. 11.

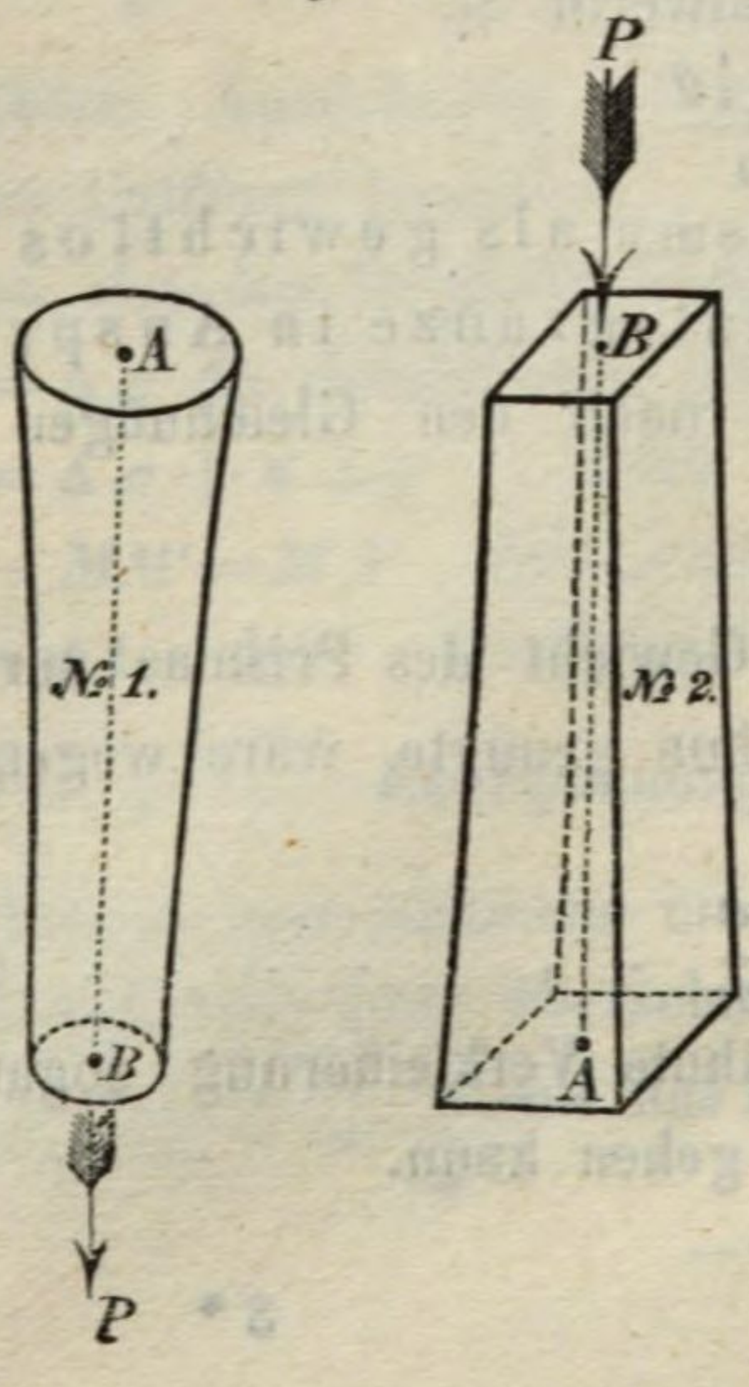
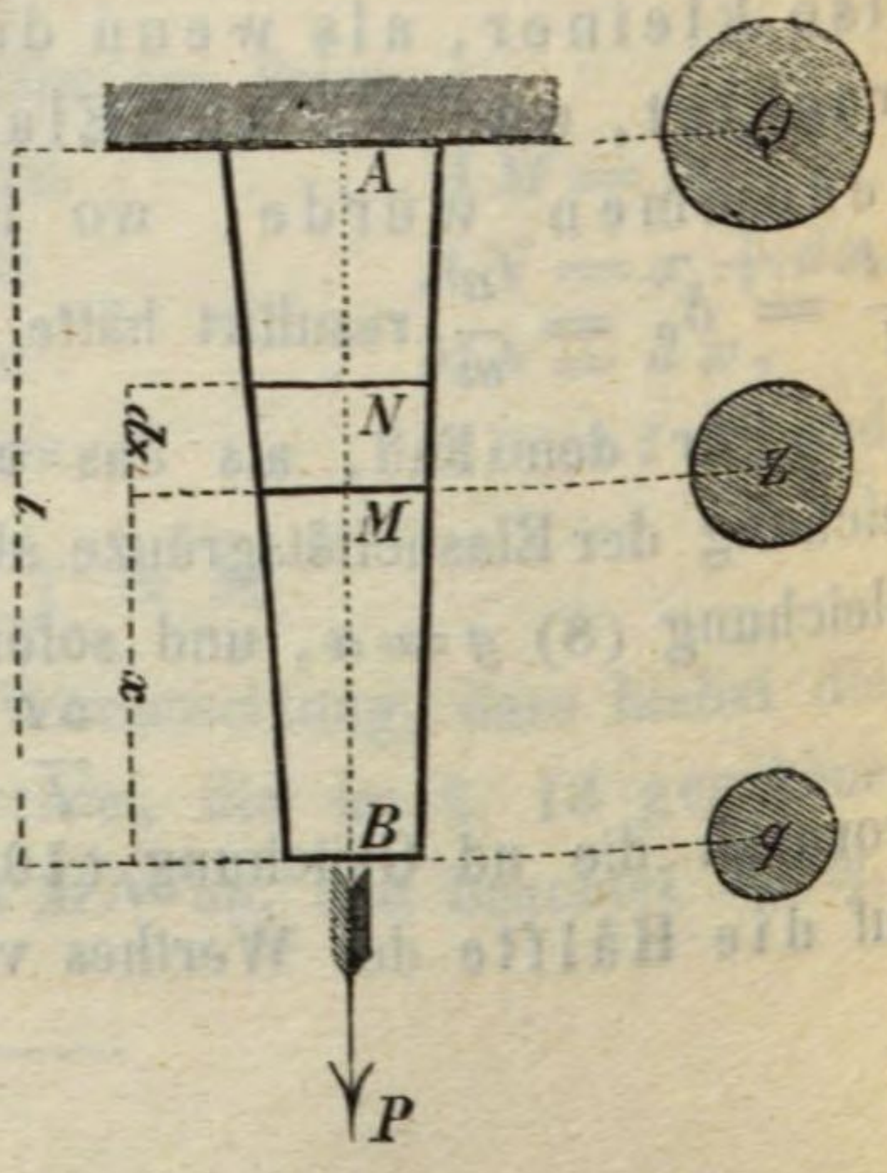


Fig. 12.



die Länge des Körpers AB . . . . . $= l$,
„ „ eines beliebigen Theiles BM . . . $= x$,
„ „ des Elementes MN . . . . . $= dx$,
den Querschnitt des Körpers in B . . . . . $= q$,
„ „ „ „ „ A . . . . . $= Q$,
„ „ „ „ „ M . . . . . $= z$,
„ „ „ „ „ N . . . . . $= z + dz$,
den Körperraum zwischen B und M . . . . $= u$,
das Gewicht des Körpertheiles u . . . . . $= G$
und „ „ der cubischen Einheit . . . . . $= \gamma$.

Es ist vor Allem

$$du = z\,dx,\ u = \int_o^x z\,dx \text{ und } G = \gamma u = \gamma \int_o^x z\,dx,$$

ferner die in dem Querschnitte z entstehende Anspruchsnahme pr. □″

$$\frac{P+G}{z} = \frac{P + \gamma \int_o^x z\,dx}{z}.$$

Soll nun durch diese Anspruchsnahme, wie vorausgesetzt, die Gränze der Elasticität geradezu erreicht werden, so muss

$$\frac{P+G}{z} = k, \text{ und}$$

hiebei nach §. 12 entweder $k = a$ oder $k = r$ sein, je nachdem man einen Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung oder gegen Zusammendrückung betrachtet.

Hienach erhält man

$$\frac{P + \gamma \int_o^x z\,dx}{z} = k, \text{ daher auch}$$

$$P + \gamma \int_o^x z\,dx = kz,$$

und durch Differentiation $\gamma z\,dx = k\,dz$, weiters aber $\frac{\gamma}{k}\,dx = \frac{dz}{z}$, und endlich durch Integration $log.\ nat.\ \frac{z}{q} = \frac{\gamma}{k} x$, wenn man dabei berücksichtigt, dass für $x = o$, $z = q$ werden muss.

Demgemäss wird für Körper von gleichem Widerstande

$$z = q\, e^{\frac{\gamma}{k} x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo $e = 2{\cdot}71828\,18\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Die Gleichung (12) lehrt, die Grösse des Querschnittes an den verschiedenen Stellen der Körper von gleichem Widerstande sowohl gegen Ausdehnung als gegen Zusammendrückung zu finden, wenn man statt k beziehungsweise die Werthe a und r setzt, und überdiess die Bedingung festhält, dass die Längenaxe AB keine Ausbiegung erleidet.

Zufolge dieser Gleichung (12) kann man noch Folgendes bemerken:

1. dass die Querschnitte mit x wachsen, nämlich von B gegen A zunehmen, daher der kleinste Querschnitt q für $x = o$ in B, der grösste aber $Q = q \cdot e^{\frac{\gamma l}{k}}$ für $x = l$ in A vorhanden ist;

2. dass der ganze Körperraum AB sich mit

$$u = \int_o^l z\, dx = \frac{kq}{\gamma} \left(e^{\frac{\gamma l}{k}} - 1\right) = \frac{k}{\gamma} (Q - q)$$

berechnet, und daher der Flächendifferenz $Q - q$ proportional ist;

3. dass, indem man $e^{\frac{\gamma l}{k}}$ auf die bekannte Weise durch eine Reihe ausdrückt, sodann auch

$$\frac{Q}{q} = 1 + \frac{\gamma l}{k} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\gamma l}{k}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\gamma l}{k}\right)^3 + \ldots$$

wird, wobei man übrigens bei der ausserordentlichen Kleinheit des Bruches $\frac{\gamma}{k}$ selten in die Lage kommt, von dem 3. Glied Gebrauch machen zu müssen, indem selbst in den meisten Fällen schon das 2. Glied unwesentlich erscheinen wird. Um diess durch ein Beispiel zu zeigen, nehme man für Schmiedeeisen $k = a = 180$ Ztr. und $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztr. an, und suche den Quotienten $\frac{Q}{q}$, so wie die Differenz zwischen Q und q bei einer Länge von 20 Klaftern.

Nach diesen Annahmen hat man

$$\frac{\gamma}{k} = \frac{1}{72000},\ l = 1440''\ \text{und}\ \frac{\gamma l}{k} = \frac{1}{50},$$

daher schon nach Berücksichtigung des 2. Gliedes genau genug

$$\frac{Q}{q} = \frac{51}{50}\ \text{und sofort}\ Q - q = \frac{1}{50}\ q.$$

Durch die auf diese Art berechnete Zunahme der Querschnitte ihrem Flächenmasse nach ist eigentlich die Körperform noch nicht vollständig bestimmt, indem ausserdem in Betracht zu ziehen ist, welche Gestalt den Querschnitten selbst gegeben werden will. So könnte z. B. verlangt werden, es sollen die Querschnitte wie in Fig. 11 ad 1 ähnlich (etwa kreisförmig), oder aber, wie in Fig. 11 ad 2 solche Rechtecke bilden, in welchen stets eine Seite constant bleibt.

Ist nun eine derartige Bedingung bekannt, so unterliegt die Vervollständigung der Formbestimmung des Körpers von gleichem Widerstande keinem Anstande, da die betreffende Bedingung für die Querschnittsform in der Formel (12) leicht zu berücksichtigen ist.

§. 30.

Längenveränderung solcher Körper. Da bei einem Körper von gleichem Widerstande die Anspruchsnahme des Materiales pr. □″ in jedem Querschnitte dieselbe ist, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die Längenveränderung durch die Formel $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ ausgedrückt werde, wenn Δl eben jene Längenveränderung und m den Modul bezeichnet, l und k aber die Bedeutungen im vorigen §. beibehalten.

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung. *) Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung der Längenaxe.

§. 31.

Erklärung. Die totalen Längenveränderungen eines materiellen Prismas gehen nicht plötzlich, sondern successive vor sich, indem

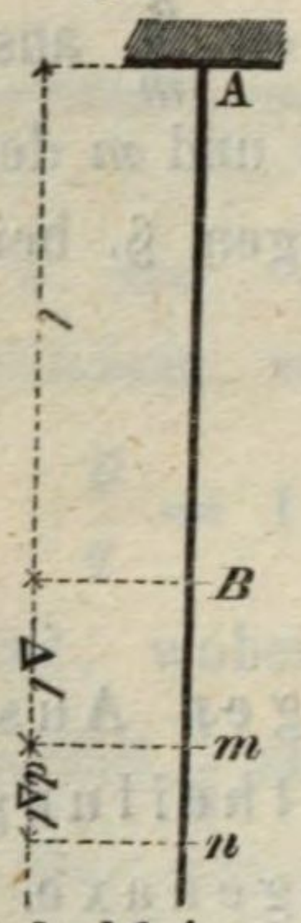
*) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand genannt.

das freie Ende desselben eine verzögerte Bewegung annimmt, welche bei Beginn der Wirkung am grössten ist, dann allmälig abnimmt, und endlich nach Verlauf einer gewissen Zeit aufhört. Während dieser Zeit wird der Widerstand mit der Zunahme der Längenveränderung nach und nach bis zu dem Grade gesteigert, welcher der am Schlusse der Bewegung hervorgebrachten totalen Längenveränderung entspricht. Nachdem der jeweilige Widerstand als Gegenkraft auftritt, welche an dem freien Ende des Prismas den Angriffspunct hat, so leuchtet ein, dass dieser Widerstand einen Weg zurücklegt, der jederzeit der erzeugten Längenveränderung gleich ist. Aus dieser Ursache wird bei jeder Längenveränderung ein mechanisches Moment des Widerstandes in's Leben gerufen, welches von der jeweiligen Grösse des Widerstandes und der correspondirenden Längenveränderung abhängt. Die Kenntniss dieses Momentes ist in manchen Fällen benützbar, wie z. B. bei der Beurtheilung der Wirkung eines Stosses auf ein materielles Prisma in der Richtung der Längenaxe.

§. 32.

Bestimmung dieses Widerstandsmomentes. Zu diesem Behufe sei AB Fig. 13 ein materielles Prisma von der

Fig. 13.



Länge . . . . . $= l$

einer Ausdehnung oder Zusammendrückung ausgesetzt, und dadurch das freie Ende aus seiner Lage B in Folge der eingetretenen Bewegung im Verlaufe der Zeit . . $= t$ bis nach m gekommen; sei ferner der von B mittlerweile zurückgelegte Weg, nämlich die erzeugte Längenveränderung Bm . . $= \Delta l$, und der sich in diesem Augenblicke einstellende Widerstand pr. □″ Querschnitt . . $= k$, so wird man nunmehr während des unendlich kleinen Zeitzuwachses . . . . . $= dt$ die Vermehrung der Längenveränderung mn . . . . $= d.\Delta l$, so wie das Wachsen des Widerstandes pr. □″ Querschnitt $= dk$ zu setzen, und sofort anzunehmen haben, dass diese Veränderungen

bis zum Stillstand der Bewegung fortschreiten, wo sodann das freie Ende des Prismas ***B*** in's Gleichgewicht gelangt sein wird. Uebrigens hat man auch hier die Bemerkung sich gegenwärtig zu halten, dass positive Werthe von Δl Ausdehnungen, und negative Werthe Zusammendrückungen repräsentiren.

Aus Ursache der vorhin bemerkten Veränderlichkeit der Grössen k und Δl muss man zur Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes während der Zeit t zunächst auf das unendlich kleine Moment Rüksicht nehmen, welches nämlich von dem Widerstande k während des Zeitelementes dt in's Leben gerufen wird. Diess letztere ist aber offenbar das Product aus k und dem während der Zeit dt zurückgelegten Weg $d.\Delta l$, also $dW = k.d\Delta l$, wenn das fragliche Widerstandsmoment während der Zeit t mit W, daher der unendlich kleine Zuwachs desselben mit dW bezeichnet wird.

Es ist nun nach §. 10 $\Delta l = vl$, daher auch $dW = lk\,dv$ und sofort durch Integration

$$W = l\int_o^v k\,dv,$$

indem o und v die Gränzen für die Veränderung in der t Zeit sind.

Das Resultat $W = l\int_o^v k\,dv$ kann graphisch dargestellt werden. Da nämlich k den Widerstand gegen die Längenveränderung $v = \frac{\Delta l}{l}$ bezeichnet, so lässt sich die mittelst Fig. 2 erörterte Anschauungsweise im §. 11 vortheilhaft benützen. Nur wähle man zu diesem Zwecke Fig. 14 VV' als die Axe der Abscissen, und KK' als die der Ordinaten, so dass man für einen beliebig gewählten Punct M der Curve $O\mu = v$ und $M\mu = k$ hat.

Man wird nunmehr ohne Schwierigkeit erkennen, dass

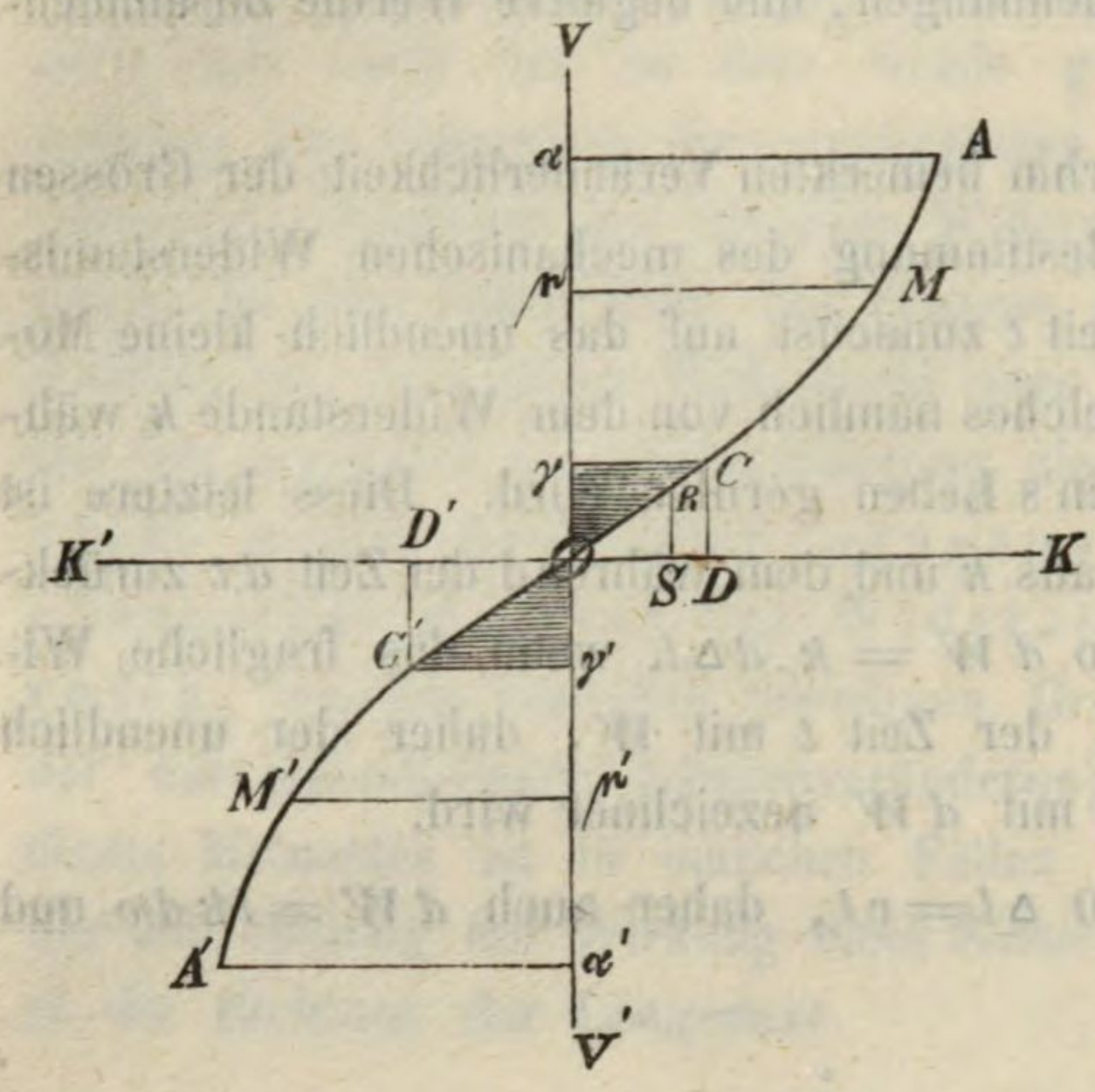
$$\int_o^v k\,dv = Area\ OM\mu \text{ ist,}$$

und daher, wenn diese *Area* mit f bezeichnet wird, der vorgefundene Ausdruck für das mechanische Moment des Widerstandes auf die ganz einfache Form

$$W = lf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gebracht werden kann, die sich zur übersichtlichen und vergleichenden Darstellung vorzüglich eignet.

Fig. 14.



Selbstverständlich ist dieses mechanische Moment mit Rücksicht auf die nach §. 8 zu Grunde gelegten Einheiten mit Zoll-Zentner zu benennen, wie diess auch in der That der Ausdruck (13) zeigt, wo l eine Längendimension in Zollen ist, f aber nichts anders als ein Product aus einer in Zentnern ausgedrückten Kraft und einer absoluten Verhältnisszahl vorstellt.

Die Gleichung (12) lehrt, dass das mechanische Moment des Widerstandes, welcher sich der Längenveränderung (z. B. Verlängerung $O\mu$, Verkürzung $O\mu'$) entgegensetzt, durch das Product aus der Länge l des Prismas, und der mit f bezeichneten Fläche gemessen wird, welche mit eben dieser Längenveränderung correspondirt. (Beispielweise *Area* $OM\mu$, $OM'\mu'$.)

Da übrigens der Werth von W in der Formel (13) sich auf die Quadrateinheit des Querschnittes q bezieht, so hat man mit diesem letzteren noch das Resultat zu multipliciren, wenn man das Widerstandsmoment für den ganzen Querschnitt des Prismas erhalten will.

Wäre z. B. eine schmiedeeiserne Stange von 3^0 Länge und 5 □'' Querschnitt durch einen Stoss um den 1000^{sten} Theil verlängert worden, und dabei bekannt, dass für diesen Werth von $v = O\mu = \frac{1}{1000}$ der dazu gehörige Flächenraum etwa $f = Area\ OM\mu = \frac{1}{6}$ sei, so würde sich das entwickelte Widerstandsmoment mit $W = lf = 3 \times 72 \times \frac{1}{6} = 36$ Zoll-Zentner für einen Quadratzoll-Querschnitt,

und sofort wegen $q = 5$ mit $qW = 180$ Zoll-Zentner für den ganzen Querschnitt berechnen, und hieraus auf die Intensität des Stosses geschlossen werden können, indem man beachtet, dass das mechanische Moment desselben eben so gross sein müsse. Drückt man nämlich diese Stosswirkung durch das Product Ph aus, wo P ein Gewicht bedeutet, welches sich im Augenblicke des Stosses mit einer Geschwindigkeit bewegt, zu welcher die Geschwindigkeitshöhe h gehört, so hätte man in dem betrachteten Falle wegen $Ph = qW$ für das betreffende Stossgewicht allgemein $P = \frac{qW}{h}$, also, wenn dasselbe im Augenblicke des Stosses etwa $10''$ hoch gefallen wäre, wegen $qW = 180$ und $h = 10''$ speciell $P = 18$ Zentner. Dieses Resultat heisst mit Worten, dass die gegebene Stange, wenn von ihrem eigenen Gewichte abgesehen würde, durch den Stoss eines $10''$ hoch frei gefallenen Gewichtes von 18 Zentnern einer totalen Ausdehnung von $\frac{1}{1000}$ der Länge unterworfen wäre.

§. 33.

Besondere Resultate. Wird sich der Inhalt der §§. 31 und 32 gegenwärtig gehalten, so kann man folgende besondere Resultate für die Widerstandsmomente zur Kenntniss nehmen:

1. Das mechanische Moment des Widerstandes gegen Zerreissen, also das grösstmöglichste gegen Ausdehnung *), ist der Fläche $OA\alpha$ proportional. Es werde diese Fläche mit f_A und das fragliche Moment mit W_A bezeichnet, so dass $W_A = lf_A$ ist.

Das gleichnamige Moment gegen Zerquetschen, also das grösstmöglichste gegen Zusammendrückung **) ist eben so der Fläche $OA'\alpha'$ proportionirt. Unter Beibehaltung der gewählten symbolischen Bezeichnung hat man daher analog $W_R = lf_R$.

2. Das grösste zulässige Widerstandsmoment, also bis zu den Elasticitätsgränzen ***), ist für die Ausdehnung dem $\Delta OC\gamma$ und für die Zusammendrückung dem

---

*) Nach Poncelet auch lebhafter Widertsand gegen Zerreissen genannt.

**) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand gegen Zerquetschen genannt.

***) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand der Elasticität genannt.

$\Delta\, O\, C'\, \gamma'$ proportionirt. Nach § 13 können diese Dreiecke als geradlinig, und daher den beiden benachbarten Dreiecken $O\, C\, D$ und $O\, C'\, D'$ als äquivalent gelten. Setzt man $O\, C\, D = f_a$ und $O\, C'\, D' = f_r$, und bezeichnet die bezüglichen Widerstandsmomente mit W_a und W_r, so hat man wegen $f_a = \frac{1}{2}\, a\, \delta_a = \frac{a^2}{2m}$ und $f_r = \frac{1}{2}\, r\, \delta_r = \frac{r^2}{2m}$ einerseits

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für die Ausdehnung . . . . .} & W_a = \frac{a^2\, l}{2m} \\ \text{und andererseits für die Zusammen-} & \\ \text{drückung . . . . . .} & W_r = \frac{r^2\, l}{2m} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

als diejenigen Widerstandsmomente, welche das Prisma pr. □″ Querschnitt ohne Gefahr für seinen Bestand entwickeln kann.

Zugleich bemerkt man, dass in diesem Falle die Relation

$$W_a : W_r = a^2 : r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

stattfindet, und ausserdem die beiden Widerstandsmomente für den ganzen Querschnitt q des Prismas dem Producte $q\, l$ oder dem Körperinhalte proportionirt sind.

Es werden daher prismatische Körper von verschiedenen Längen und Querschnitten unter sonst gleichen Umständen dennoch gleiche mechanische Widerstandsmomente entwickeln, wenn nur der Körperraum der Prismen derselbe ist. Selbstverständlich müssen sich hiebei vorzüglich die Bedingungen der vollkommenen Homogenität der Materie, und der gleichmässigen Verbreitung der Anspruchsnahme über den Querschnitt der Prismen gegenwärtig gehalten werden. Allerdings werden diese Bedingungen desto schwieriger zu erfüllen sein, je grösser und unregelmässiger ein Querschnitt ist, und aus diesem Grunde werden sich für die Genauigkeit der obigen Regel in der Praxis gewisse Gränzen ergeben, welche bei den betreffenden Schlussfolgerungen stets zu beachten sind.

3. Wird durch die erzeugte Wirkung die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung nicht überschritten, und der hervorgerufene Widerstand pr. □″ mit k bezeichnet, so ist die dazu gehörige Fläche entweder $O\, R\, S$ oder $O\, R'\, S'$ Fig. 2 mit $f = \frac{1}{2}\, k\, v$ anzunehmen, und sofort wegen $v = \frac{k}{m}$ das betreffende Widerstandsmoment aus der Gleichung $W = \frac{k^2\, l}{2m}$ . . . . . (16)

zu berechnen. Offenbar wird sodann für $k = a$, $W = W_a$ und für $k = r$, $W = W_r$.

4. Wird auch dermalen auf die mehr oder minder günstigen Umstände, welche das Widerstandsmoment begleiten, in so ferne Rücksicht zu nehmen sein, als es offenbar nicht gleichgiltig ist, ob z. B. Stösse kürzere oder längere Zeit anhalten, ob sie periodisch wiederkehren, u. ε. w., und als jedenfalls die anfängliche Sicherheit im Laufe der Zeit durch chemische Processe gefährdet werden kann. Sind nämlich die behufs der anfänglichen Sicherheit angenommenen Grössen a, r und m, daher die bezüglichen grössten zulässigen Widerstandsmomente W_a und W_r, und seien sodann die unter ungünstigen Umständen anzunehmenden Grössen α' r' und m', daher die analogen Widerstandsmomente $W_{a'}$ und $W_{r'}$, so hat man nach den Gleichungen (14)

$$\left.\begin{aligned} W_a : W_{a'} &= \frac{a^2}{m} : \frac{a'^2}{m'} \\ \text{und} \qquad W_r : W_{r'} &= \frac{r^2}{m} : \frac{r'^2}{m'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Nachdem nun mit der Vermehrung der ungünstigen Umstände im Allgemeinen die Grössen a und r sich bedeutender, als der Modul m, vermindern, so ergibt sich, dass auch die anfänglichen Widerstandsmomente W_a und W_r im Laufe der Zeit eine namhafte Reduction erfahren können. Wäre etwa $a' = \frac{1}{2}a$, $r' = \frac{1}{2}r$ und $m' = \frac{7}{8}m$, so hätte man im Sinne der Relation (17)

$$W_a : W_{a'} = W_r : W_{r'} = 3\tfrac{1}{2} : 1.$$

Hieraus geht zugleich hervor, wie vorsichtig man bei der Beurtheilung einer Stosswirkung sein müsse.

§. 34.

Schmiedeeisen. Legt man die aus Versuchen abgeleitete und im §. 18 besprochene Curve, welche den totalen Längenveränderungen für das Schmiedeeisen entspricht, zu Grunde, so hat man zunächst zu bemerken, dass, nachdem sich der Modul m mit der Qualität der Materie innerhalb der Elasticitätsgränzen nur wenig, ausserhalb derselben aber bedeutend verändert, auch ein ähnliches Verhalten hinsichtlich der Widerstandsmomente innerhalb und ausserhalb der erwähnten Gränzen zu erwarten sei.

In der That hat man nach einer Mittheilung des französischen Generalen Morin aus den von Bornet und Ardant angestellten Versuchen

1. für sehr weiches dehnbares Eisen

$$f_A = 55{\cdot}8 \text{ und } f_a = 0{\cdot}085,$$

2. für hartes ausgeglühtes Eisen

$$f_A = 6{\cdot}2 \text{ und } f_a = 0{\cdot}082 \text{ und}$$

3. für hartes nicht ausgeglühtes Eisen

$$f_A = 8{\cdot}4 \text{ und } f_a = 0{\cdot}073$$

gefunden, wonach sich die betreffenden Widerstandsmomente mit

$$\text{ad 1. } W_A = 55{\cdot}8\,l \text{ und } W_a = 0{\cdot}085\,l,$$

$$\text{ad 2. } W_A = 6{\cdot}4\,l \text{ und } W_a = 0{\cdot}082\,l$$

$$\text{und ad 3. } W_A = 8{\cdot}4\,l \text{ und } W_a = 0{\cdot}073\,l$$

berechnen *), und das gegenseitige Verhältniss $W_A : W_a$ sich beziehungsweise mit 656 : 1, 78 : 1 und 114 : 1 herausstellt.

Aus diesen Resultaten ist zu ersehen, dass das bis zur Elasticitätsgränze für die Ausdehnung entwickelte Widerstandsmoment ungeachtet der so sehr verschieden gewählten Eisensorten von dem durchschnittlichen Werthe $0{\cdot}08\,l$ nicht bedeutend abweicht, während das Widerstandsmoment gegen Zerreissen wesentlich verschieden ausgefallen ist, indem dasselbe bei dem harten Eisen nur 78- und respective 114mal, bei dem weichen Eisen aber sogar 656mal grösser gefunden worden ist, als das ersterwähnte Moment bis zur correspondirenden Elasticitätsgränze.

Wenn daher das harte Eisen im Vergleiche zu dem weichen einerseits den Vortheil einer grösseren Widerstandsfähigkeit darbietet, so ist anderseits wieder der Nachtheil vorhanden, dass das erstere unter der Wirkung eines Stosses leichter zerreisst als das letztere. Diese Wahrnehmung ist für die Praxis vorzüglich wichtig, denn obgleich es sich daselbst nicht um das Zerreissen, sondern vielmehr um das Einhalten der Elasticitätsgränze handelt, so muss doch die Besorgniss als gegründet erkannt werden, dass das Schmiedeeisen im Verlaufe der Zeit durch die Einwirkung von Stössen desto eher Schaden nehmen könne, je grösser die Härte desselben ist, indem nämlich der von Seite

*) Diese Zahlen sind im Sinne des §. 8 auf Wiener Mass und Gewicht reducirt.

des Widerstandsmomentes zu durchlaufende Spielraum bis zum Zerreissen mit der Zunahme der Härte kleiner wird, und daher der Zeitpunct der Zerstörung bei der harten Eisengattung näher anzunehmen ist, als bei der weichen Qualität.

Der vorher angegebene Durchschnitt für das Widerstandsmoment bis zur Elasticitätsgränze bezüglich der Ausdehnung $W_a = 0{\cdot}08\,l$ correspondirt übrigens ganz gut mit den betreffenden Mittelwerthen im §. 18. Indem nämlich daselbst $a = 200$, $m = 250{,}000$ und $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1250}$ angegeben ist, so erhält man für die Fläche

$$f_a = \tfrac{1}{2}\,a\,\delta_a = \frac{a^2}{2m} = 0{\cdot}08,$$

und sofort $W_a = 0{\cdot}08\,l$, also übereinstimmend mit dem aus jenen vorcitirten Versuchen entzifferten Durchschnitt.

Es erübrigt nur noch beizufügen, dass bei dem Schmiedeeisen, wegen $a = r$, das Widerstandsmoment bis zur Elasticitätsgränze für die Zusammendrückung eben so gross, wie für die Ausdehnung anzunehmen sei, und demgemäss durchschnittlich

$$W_a = W_r = \frac{a^2\,l}{2m} = \frac{r^2\,l}{2m} = 0{\cdot}08\,l \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

gesetzt werden könne.

Es ist klar, dass die gefundenen Werthe der Widerstandsmomente desto mehr zu reduciren sein werden, je ungünstiger sich die Umstände gestalten. Mit Rücksicht auf den §. 33 wird man erkennen, dass diese Reduction in den meisten Fällen wenigstens bis auf die Hälfte gehen werde, was mit den Angaben Poncelet's nahe genug übereinstimmt.

§. 35.

Eisenblech. Eisendraht. Für diese Materialien gilt nach §. 20 im Allgemeinen das im vorigen §. Angegebene. Benützt man zur Auffindung der grössten zulässigen Widerstandsmomente die in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten Mittelwerthe, so erhält man im Durchschnitt zur Beurtheilung der anfänglichen Sicherheit gegen eine Stosswirkung

1. für Eisenblech wegen $a = r = 180$ und $m = 220{,}000$

$$W_a = W_r = 0{\cdot}0736\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und

2. für Eisendraht wegen $a = 320$ und $m = 250{,}000$

$$W_a = 0{\cdot}2048\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Hieraus geht hervor, dass der Draht eine verhältnissmässig grosse Fähigkeit besitzt, Stössen zu widerstehen.

§. 36.

Gusseisen. Für Gusseisen kann mit Beziehung auf die im §. 21 besprochene Curve $A\,A'$ (Fig. 7) und die daselbst angegebenen Mittelwerthe im Durchschnitt zur Richtschnur dienen:

1. dass das mechanische Widerstandsmoment gegen Zerreissen bei der mit $f_A = 0{\cdot}154$ anzunehmenden *Area* $O\,A\,\alpha$ (Fig. 14) sofort $W_A = 0{\cdot}154\, l$ werde;

2. dass die Widerstandsmomente bis zu Elasticitätsgränze einerseits für die Ausdehnung, anderseits für die Zusammendrückung wegen $a = 80$, $r = 160$ und 125,000 nach Massgabe der Gleichungen (14) sich mit

$$\left.\begin{aligned} W_a &= \frac{a^2 l}{m} = 0{\cdot}0256\, l \\ \text{und} \qquad W_r &= \frac{r^2 l}{2m} = 0{\cdot}1024\, l \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

berechnen, und

3. dass demgemäss das beiläufige Verhältniss $W_A : W_a = 6 : 1$, so wie in Uebereinstimmung mit der Relation (15) das weitere Verhältniss

$$W_a : W_r = 1 : 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

resultire. Durch diese Ergebnisse werden die bekannten Erfahrungen erklärt, wonach das Gusseisen gegen die Einwirkung von Stössen im Sinne der Ausdehnung wenig Sicherheit gewährt, während dessen Fähigkeit, der Wirkung von Stössen im Sinne der Zusammendrückung zu widerstehen, im Verhältniss bedeutend grösser ist.

Uebrigens wird sich ebenfalls mit der Vermehrung von ungünstigen Umständen die Sicherheit vermindern, ohne dass jedoch hierüber etwas Verlässliches bekannt wäre.

§. 37.

Holz. Beschränkt man sich in Hinblick auf den §. 22 auf die Erörterung des mechanischen Widerstandsmomentes ohne Ueberschrei-

tung der Elasticitätsgränzen, so hat man durchschnittlich für Holzmaterialien (ausschliesslich Eichenholz) wegen $r = \frac{3}{4} a$ in Folge der Relation (15) im §. 33

$$\left.\begin{array}{l} W_a : W_r = a^2 : r^2 = 16 : 9 \\ \text{für Eichenholz aber} \quad = 36 : 25 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (23),$$

wonach also die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung durch eine bedeutend grössere Stosswirkung, als für die Zusammendrückung erreicht würde.

Legt man ferner die in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten Werthe zu Grunde, so hat man hinsichtlich der anfänglichen Sicherheit durchschnittlich

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. für Tannenholz } W_a = 0{\cdot}032\, l \text{ und } W_r = 0{\cdot}018\, l \\ \text{2. „ Fichtenholz } W_a = 0{\cdot}026\, l \text{ „ } W_r = 0{\cdot}015\, l \\ \text{3. „ Kieferholz } W_a = 0{\cdot}040\, l \text{ „ } W_r = 0\,023\, l \\ \text{4. „ Lärchenholz } W_a = 0{\cdot}050\, l \text{ „ } W_r = 0{\cdot}026\, l \\ \text{und 5. „ Eichenholz } W_a = 0{\cdot}034\, l \text{ „ } W_r = 0{\cdot}024\, l \end{array}\right\} (24)$$

Für eine mehr oder minder andauernde Sicherheit werden diese Werthe nach Massgabe der Umstände einer grösseren oder geringeren Reduction unterliegen, die sich nach den betreffenden Werthen von a, r und m ergeben wird, und begreiflicher Weise sehr bedeutend ausfallen kann. In Erwägung des §. 33 wird man in der Ausübung nicht selten nur den 10ten Theil der angeführten Werthe annehmen dürfen, was mit den Angaben Tredgold's und Barlow's übereinstimmt.

§. 38.

Vergleich zwischen Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz. Der Vergleich zwischen diesen Materialien hinsichtlich der grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomente kann sowohl ziffermässig als graphisch durchgeführt werden.

Zum Behufe der **ziffermässigen** Darstellung hat man nämlich nur die Gleichungen (18), (21) und (24) zu benützen.

Wird hiebei als zu vergleichende Holzgattung Tannenholz gewählt, so bekäme man folgende Relation:

$$\underbrace{W_a : W_r}_{\text{Schmiedeeisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Gusseisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Holz}}$$

$$= 0{\cdot}08 : 0{\cdot}08 : 0{\cdot}0256 : 0{\cdot}1024 : 0{\cdot}032 : 0{\cdot}018$$

$$= 1 : 1 : 0{\cdot}32 : 1{\cdot}28 : 0{\cdot}4 : 0{\cdot}225$$

Zum Behufe der graphischen Vergleichung kann die Figur 8 ad §. 24 dienen. Man erinnere sich nämlich, dass nach §. 33 die fraglichen Widerstandsmomente sich gerade so, wie die in jener Figur ersichtlich gemachten correspondirenden Dreiecke — ihrem Flächenraume nach — verhalten müssen.

Dieser Bemerkung gemäss erhält man sofort

$$\underbrace{W_a : W_r}_{\text{Schmiedeeisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Gusseisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Holz}}$$

$$= \Delta OC_1D_1 : \Delta OC'_1D'_1 : \Delta OC_2D_2 : \Delta OC'_2D'_2 : \Delta OC_3D_3 : \Delta OC'_3D'_3$$

Hienach kann, abgesehen von ungünstigen Umständen und in der Ueberzeugung, dass die Wahl einer der anderen Holzgattungen anstatt Tannenholz die Hauptsache nicht wesentlich beirre, als durchschnittliches Ergebniss für die zu vergleichen beabsichtigten Materialien gelten:

1. dass das Gusseisen die kleinste und das Schmiedeeisen die grösste Fähigkeit besitze, einem Stosse im Sinne der Ausdehnung zu widerstehen, das Holz aber in der fraglichen Beziehung nur wenig vortheilhafter, als das Gusseisen sei; und

2. dass bei einem Stosse im Sinne der Zusammendrückung das Holz die kleinste und das Gusseisen die grösste sichere Gegenwirkung entwickeln könne, welch' letztere indess die des Schmiedeeisens nicht viel übertrifft.

§. 39.

Besondere Bemerkungen. Die in diesem Kapitel gegebenen Resultate dürfen in Hinblick auf den §. 17 nicht einseitig betrachtet, und nicht ohne Weiters auf practische Fälle übertragen werden, indem die Qualität der Materie, so wie die Richtung und Vertheilung des Stosses wohl in Erwägung zu ziehen, und die hienach entstehenden im § 33 erwähnten Gränzen für die Grösse und Gestalt des Körperquerschnittes einzuhalten sid, überdiess aber die von den jeweiligen ungünstigen Umständen im Laufe der Zeit zu besorgenden Nachtheile sorgfältig abzuschätzen kommen, um die danach nöthig erachtete Reducirung der berechneten anfänglichen Widerstandsmomente vornehmen zu können. Man kann sich bei dieser

Gelegenheit keineswegs verhehlen, dass solchen Abschätzungen zuweilen unübersteiglich scheinende Hindernisse in den Weg treten, zumal man überhaupt nur wenige Erfahrungen aufweisen kann, die einige Anhaltspuncte zu bieten gestatten. Vorzüglich ist dieses der Fall, wenn es sich um die Beurtheilung langandauernder Stosswirkungen handelt. Es ist daher in der fraglichen Beziehung noch manche Belehrung durch die Erfahrung zu erwarten.

Anmerkung 1. In Betreff vollkommen elastischer Körper. So wie nach dem im 1. Kapitel befolgten Wege die den speciellen Materialien entsprechenden Curven erfahrungsgemäss abgeleitet, und hieran die Erörterungen über das Verhalten der Materialien gegen eine Längenveränderung geknüpft worden sind, so könnte auch umgekehrt aus der Kenntniss dieses Verhaltens die Gestalt der betreffenden Curven aufgefunden werden. Durch diese Bemerkung wird man unmittelbar auf die Frage geleitet, von welcher Beschaffenheit wohl die Curven sein mögen, die vollkommen elastischen Körpern entsprechen würden. Es leuchtet ein, dass in diesem Falle nur von den totalen Längenveränderungen die Rede sein könne. Im Folgenden soll ein Versuch gemacht werden, um in die Beantwortung der angeregten Frage etwas näher einzugehen. Zuerst kann man behaupten, dass die betreffenden Curven, wie sie auch gestaltet sein mögen, doch niemals vollkommen geradlinig sein können, weil sonst bei der steten Zunahme der Ausdehnung und Zusammendrückung mit den bezüglichen Kräften die Unmöglichkeit zugegeben werden müsste, dass das Prisma mittelst einer endlichen Kraft um seine ganze Länge, und bei Vergrösserung dieser Kraft sogar noch mehr verkürzt werden könnte. Daraus geht unmittelbar hervor, dass die Proportionalität der Ausdehnungen und Zusammendrückungen mit den correspondirenden Spannungen und Pressungen keineswegs, wie es ohne diese Betrachtung scheinen mag, das Gesetz für vollkommen elastische Körper sein könne, sondern für dieselben vielmehr ein anderes Gesetz vorhanden sein müsse. Gleichwohl wird zugegeben, dass dasselbe innerhalb gewisser und vielleicht sehr weiter Gränzen jene Proportionalität annäherungsweise in sich enthalten könne.

Zum Behufe der beabsichtigten Untersuchung sei die Länge des in Betracht stehenden Prismas . . . . . $= l$,
die Anspruchsnahme, welche durch eine als Spannung oder Pressung wirkende Kraft per. □″ Querschnitt hervorgerufen wird . . $= k$
und die correspondirende Längenveränderung (Ausdehnung oder Zusammendrückung) . . . . . $= \Delta l$;

es entstehe ferner eine unendlich kleine Vermehrung der Kraft k um . . . . . dk
und hiedurch eine unendlich kleine Vermehrung der Längenveränderung um . . . . . $d.\Delta l.$

In dem Augenblicke, als k die Vergrösserung dk erfährt, beträgt die Länge des Prismas $l + \Delta l$. Da nun im nächsten Augenblicke die Längenveränderung um $d.\Delta l$ vermehrt wird, so zeigt der Quotient $\frac{d.\Delta l}{l+\Delta l}$ offenbar an, den wie vielten Theil von der unmittelbar zuvor bestandenen Länge die neue Veränderung betrage.

Würde der ursprüngliche Zustand des Materiales im Augenblicke der Betrachtung noch unverändert vorhanden sein, so könnte man sich erlauben, den vorerwähnten Quotienten lediglich als proportional mit dk anzunehmen, und demgemäss die Gleichung

$$\frac{d.\Delta l}{l+\Delta l} = \frac{dk}{m}$$

aufzustellen, in welcher m eine constante und nur von dem Materiale abhängige Grösse zu bezeichnen hätte. Da aber im Augenblicke der Betrachtung, wo bereits die Längenveränderung Δl erzeugt ist, der Zustand des Materiales nicht mehr dem ursprünglichen gleich gehalten werden kann, so wird man im Allgemeinen nicht berechtigt sein, m als constant, sondern vielmehr als variabel mit k anzusehen. Behält man nun die Bezeichnung im §. 10 $\frac{\Delta l}{l} = v$ bei, so geht die obige Gleichung wegen $\Delta l = vl$ und $d.\Delta l = l\,dv$ in die Relation

$$\frac{dv}{1+v} = \frac{dk}{m}$$

über, welche man nach dieser Anschauungsweise in der besprochenen Hinsicht für vollkommen elastische Körper annehmen könnte.

Diese Relation integrirt gibt *log. nat.* $(1+v) = \int \frac{dk}{m}$ und sofort $1 + v = e^{\int \frac{dk}{m}}$, oder endlich

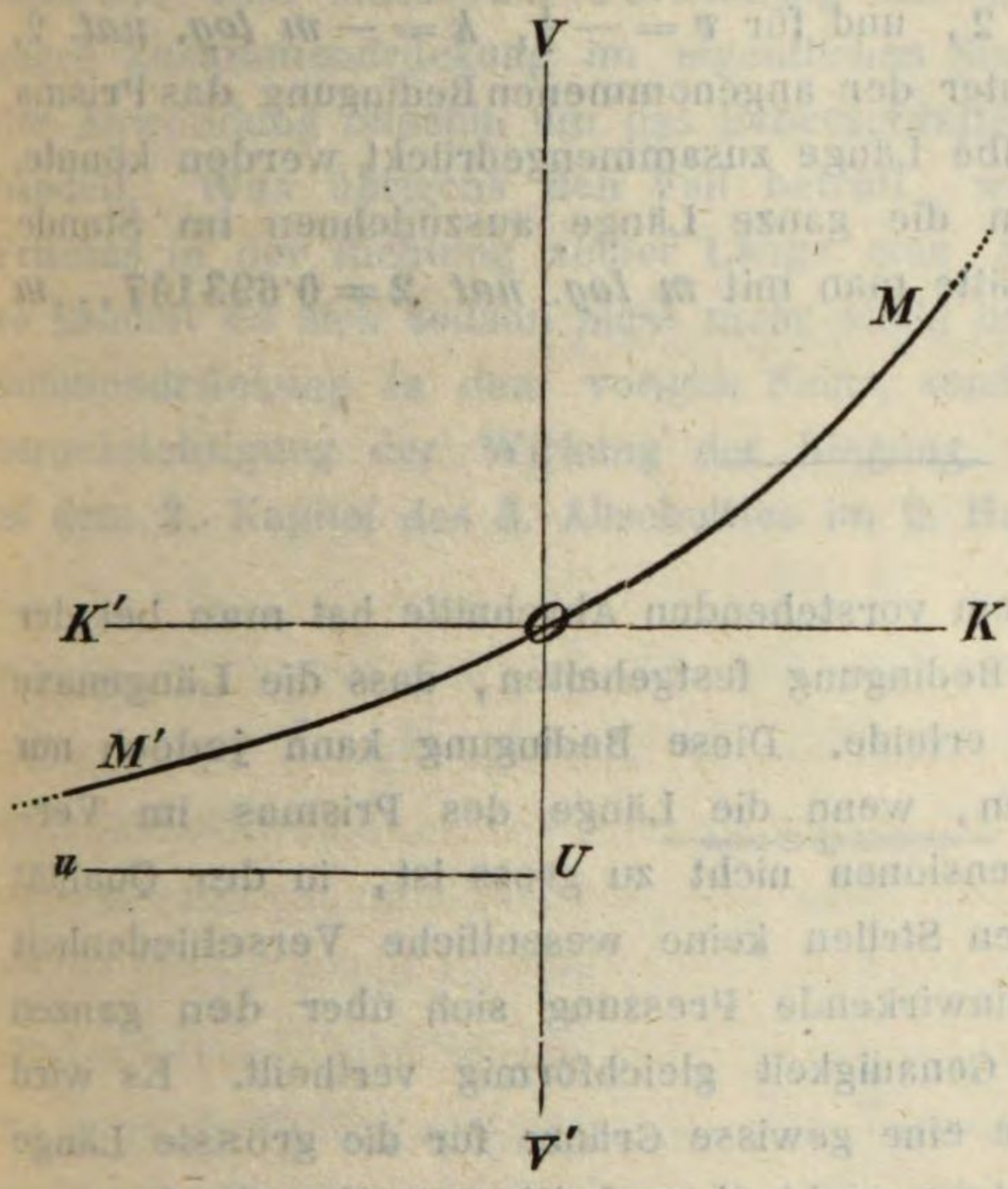
$$v = e^{\int \frac{dk}{m}} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wenn $e = 2{\cdot}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Gleichung (25) bleibt offenbar in so lange unbestimmt, als nicht die Abhängigkeit zwischen k und m bekannt ist. Es kann hier um so weniger verlangt werden, diese Abhängigkeit näher anzugeben, als es scheint, dass dieselbe durch die alleinige Eigenschaft der vollkommenen Elasticität der Materie nicht vollständig bestimmt sei. Wie übrigens diese Abhängigkeit auch sein mag, so lässt sich doch mit Rücksicht auf die graphische Dar-

stellung der Gleichung (25) mittelst einer Curve im Geiste des §. 11 Folgendes behaupten:

1. Da v und k gleichzeitig verschwinden, positiv oder negativ werden, überdiess aber mit einander wachsen müssen, so wird $\int \frac{dk}{m}$ zugleich mit v Null, positiv oder negativ, und es hat die bezügliche Curve Fig. 15 gleichfalls die im §. 11 ad 1 erwähnten Eigenschaften,

Fig. 15.



2. Wird zu Grunde gelegt, dass bei einem vollständig elastischen Körper die Längenveränderungen ohne Ende zunehmen würden, so gelangt man zu der Ueberzeugung, dass die beiden auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Curvenäste OM und OM' sich bis in's Unendliche erstrecken, wobei übrigens nur für $k = +\infty$ ebenfalls $v = +\infty$ werden könne, hingegen für $k = -\infty$ $v = -1$ werden müsse, weil unter dieser Annahme die Zusammendrückung gleich der ganzen Länge zu setzen wäre. Aus dieser Ursache muss für $k = \pm\infty$ gleichfalls $\int \frac{dk}{m} = \pm\infty$ werden, und die fragliche Curve auf der Seite der negativen Coordinaten eine Assymtote Uu besitzen, welche in der Entfernung $OU = 1$ von der Abscissenaxe mit dieser letzteren parallel läuft.

3. Drückt man die in der Gleichung (25) vorkommende Exponentialgrösse mittelst einer Reihe aus, so erhält man

$$v = \int \frac{dk}{m} + \frac{1}{1.2}\left(\int \frac{dk}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\int \frac{dk}{m}\right)^3 + \cdots,$$

woraus in Uebereinstimmung mit §. 11 ad 3 hervorgeht, dass — weil für sehr kleine Werthe von v nahezu m constant sein wird — sodann wie im §. 13 die genäherte Relation $v = \frac{k}{m}$ entstehen, und demnach die Proportionalität zwischen den Längenveränderungen v und den betreffenden Kräften k desto mehr vorhanden sein werde, je kleiner diese Grössen selbst sind.

Für den Fall, als man m als constant betrachten wollte, ginge die Gleichung (25) in $v = e^{\frac{k}{m}} - 1$

$$= \frac{k}{m} + \frac{1}{1.2}\frac{k^2}{m^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{k^3}{m^3} + \ldots$$

oder auch in $\frac{k}{m} = log.\ nat.\ (1+v)$ über, wo sodann die Curve selbst die sogenannte Logistik repräsentiren würde. Es wäre bei dieser Curve für $v = +1$, $k = m\ log.\ nat.\ 2$, und für $v = -\frac{1}{2}$, $k = -m\ log.\ nat.\ 2$, und daraus zu folgern, dass unter der angenommenen Bedingung das Prisma mit derselben Kraft auf die halbe Länge zusammengedrückt werden könnte, mit welcher man dasselbe um die ganze Länge auszudehnen im Stande wäre. Die hiezu nöthige Kraft hätte man mit $m\ log.\ nat.\ 2 = 0{\cdot}693147\ldots m$ anzunehmen.

Anmerkung 2. In dem vorstehenden Abschnitte hat man bei der Zusammendrückung stets die Bedingung festgehalten, dass die Längenaxe des Prismas keine Ausbiegung erleide. Diese Bedingung kann jedoch nur annäherungsweise erfüllt werden, wenn die Länge des Prismas im Vergleiche zu den Querschnittsdimensionen nicht zu gross ist, in der Qualität des Materiales an den einzelnen Stellen keine wesentliche Verschiedenheit stattfindet, und endlich die einwirkende Pressung sich über den ganzen Querschnitt mit hinreichender Genauigkeit gleichförmig vertheilt. Es wird daher in einem gegebenen Falle eine gewisse Gränze für die grösste Länge des Prismas sich ergeben, welche nicht überschritten werden darf, wenn ein Ausbiegen desselben vermieden werden soll. Diese Gränze hängt von mehreren Umständen ab. Vorzüglich kann man die zulässige Länge vermehren, wenn man das Prisma nicht frei stehen lässt, sondern künstliche Vorrichtungen zur Verhinderung der Biegung in Anwendung bringt. So z. B. hat Hodgkinson bei seinen Versuchen über die Zusammendrückung die Länge von gusseisernen Stangen mit 1 engl. □" Querschnitt sogar bis auf 10 engl. Fuss treiben können. Diese Stangen befanden sich jedoch in einem eisernen Gestelle, welches das Biegen derselben verhinderte. Auch mussten sie geschmiert werden, um die Seitenreibung in den Führungen möglichst zu beseitigen. Allein auch in diesem Falle darf man die Pressung nicht zu gross werden lassen. Wenn nämlich dieselbe die Elasticitätsgränze schon merklich überschritten hat, und sofort bis zum Zerquetschen gesteigert wird, so müssen die Stücke, wenn sie sich nicht ausbiegen sollen, desto kürzer sein, je grösser die Pressung ist, so dass man am Ende der Würfelform ziemlich nahe rückt. Bei so kurzen Stücken tritt sodann der Uebelstand ein, dass die Zusammendrückungen nicht mehr mit Verlässlichkeit sich erheben

lassen. Dadurch erklärt es sich, warum die auf das Verhalten der Materialien gegen Zusammendrückung Bezug nehmenden Curven und die hieran geknüpften Eigenschaften bloss für Pressungen, welche die Elasticitätsgränze nicht oder nur wenig überschreiten, angegeben werden konnten, während die Kenntniss über das weitere Verhalten bis zum Zerquetschen mangelhaft bleiben musste, und nur der Widerstand gegen das Zerquetschen selbst nach den Experimenten mit kurzen Stücken angeführt worden ist. Diese Resultate sind indess zur Feststellung der Ansicht über den Widerstand gegen Zusammendrückung im eigentlichen Sinne genügend, da es sich in der Anwendung ohnehin um das Ueberschreiten der Elasticitätsgränze nicht handelt. Was übrigens den Fall betrifft, wenn durch die Pressung eines Prismas in der Richtung seiner Länge eine Ausbiegung desselben erfolgt, so handelt es sich sodann nicht mehr allein um den Widerstand gegen Zusammendrückung in dem vorigen Sinne, sondern auch um die gleichzeitige Berücksichtigung der Wirkung der Biegung. Die Erörterung dieses Falles ist dem **3.** Kapitel des **3.** Abschnittes im **2.** Hauptstücke vorbehalten.

Zweiter Abschnitt.

Biegung.

Erstes Kapitel.

Widerstand gegen Biegung.

§. 40.

Erklärung. Wird Fig. 16 ein Prisma aus homogenem Materiale von einer beliebigen Anzahl Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, ... Q_N in Anspruch genommen, welche sämmtlich in einer Ebene liegen und senkrecht auf die Längenaxe gerichtet sind, so besteht, wie im §. 7 erwähnt, die Formveränderung des Prismas in einer Biegung, indem sodann Fig. 17 die Längenaxe eine krumme Linie wird. Der Widerstand, welcher sich der Biegung entgegensetzt, ist aus der Grösse derselben zu beurtheilen.

Fig. 16.

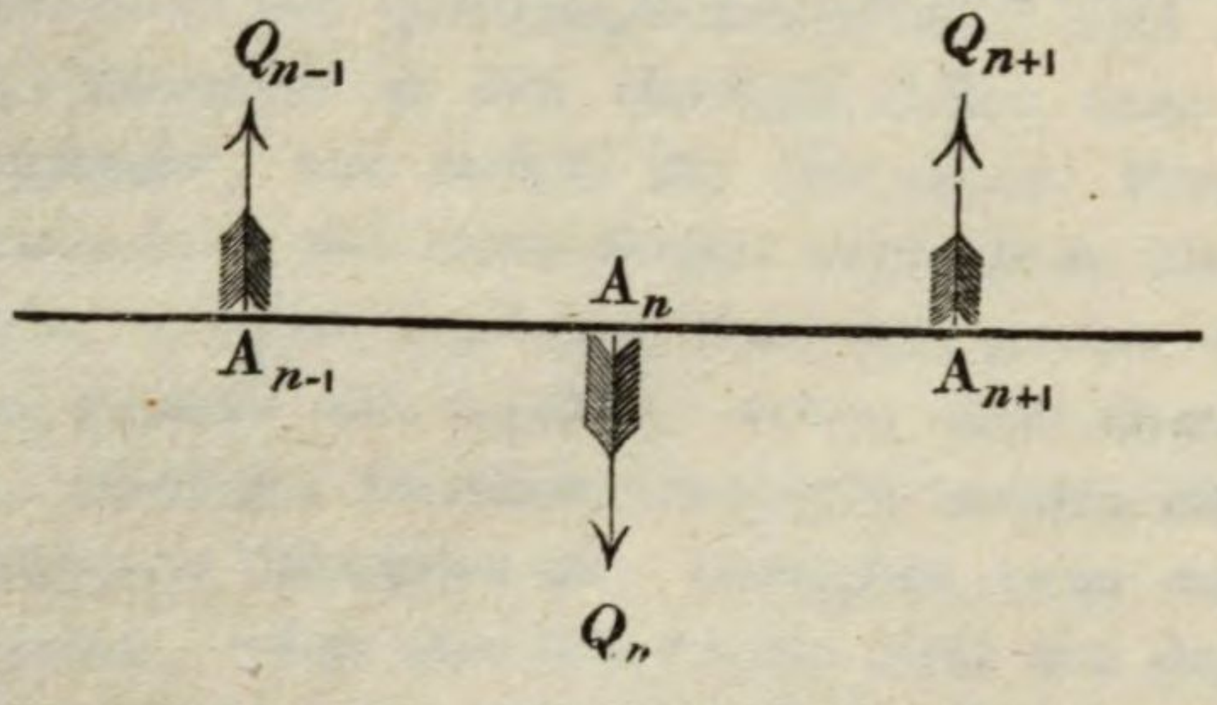
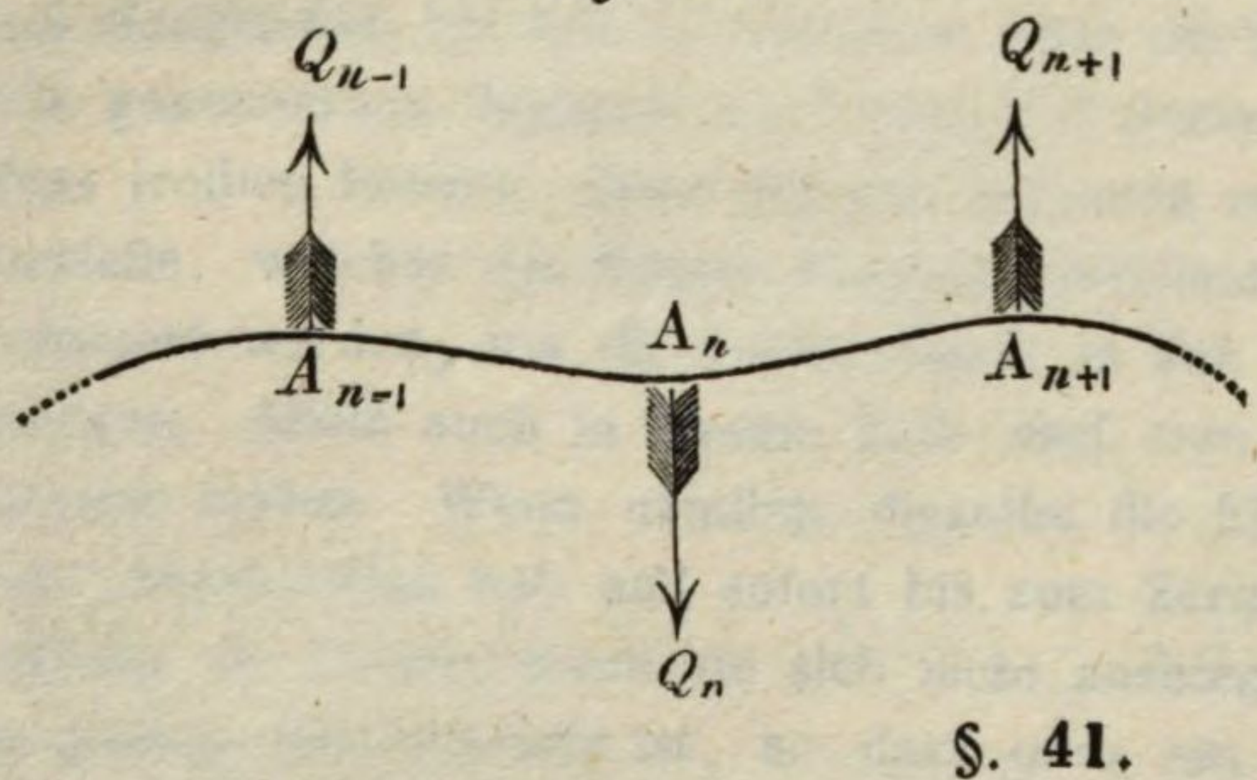


Fig. 17.



§. 41.

Hypothesen. Man stelle sich vor, dass das Prisma aus unendlich vielen Fasern zusammengesetzt sei, welche mit der Längen-

axe desselben parallel laufen, übrigens aber unter sich verbunden sind. Solche Fasern sind daher materielle Linien, die als Körperelemente auftreten. Die Zulässigkeit dieser Vorstellung unterliegt offenbar keinem Anstande. Man ist ferner, um die Untersuchung über das Verhalten des Prismas gegen Biegung anzubahnen, im Sinne der §§. 1 und 2 genöthigt, gewisse Hypothesen zu Grunde zu legen. Die Hypothesen, welche zur Erreichung einer genügenden Genauigkeit, wenigstens so lange, als durch die Anspruchsnahme die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, für den practischen Gebrauch als zulässig gelten können, sind folgende:

1. Die Fasern des Prismas sind auch nach der Biegung unter sich parallel, und bilden ebene Curven in der Richtung der einwirkenden Kräfte;

2. die Querschnitte des Prismas stehen vor und nach der Biegung senkrecht auf den Fasern, und werden in der Grösse und Form nicht verändert.

Diese Annahmen sind bisher von den Schriftstellern stets gemacht, obgleich nicht immer ausdrücklich erwähnt worden. Eine nähere analytische Untersuchung lehrt zwar, dass dieselben im Allgemeinen keineswegs genau vorhanden seien, und insbesondere bei verzerrten Querschnittsformen, sehr weichem Materiale und verhältnissmässig grosser Anspruchsnahme desselben eine nicht unwesentliche Veränderung erleiden können. In der Ueberzeugung jedoch, dass diese Umstände in der Praxis beinahe gar nie vorhanden sind, und daher die Benützung der angeregten Hypothesen in der Regel keinen wesentlichen Irrthum veranlassen kann, ist die Beibehaltung derselben als Annäherung zur Wahrheit um so mehr gestattet, als es sich in der Ausübung ohnehin nur um solche Anspruchsnahmen handelt, bei welchen die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

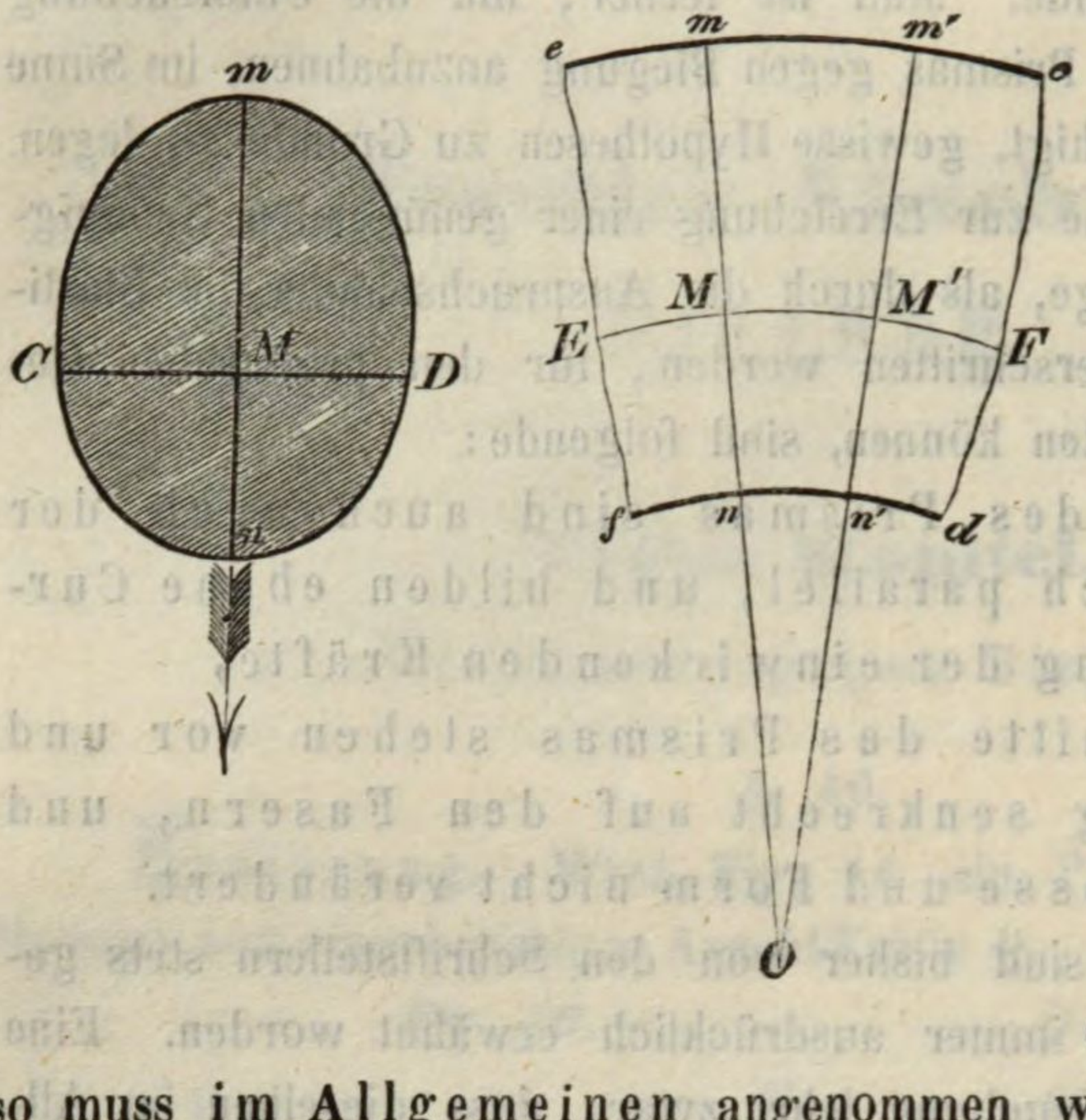
§. 42.

Neutrale Fasern. Neutrale Axe. Neutrale Schichte.

Bezeichnen in Fig. 18 mn und $m'n'$ die Lagen zweier unendlich nahen Querschnitte nach der Biegung, welche ursprünglich zu einander parallel gewesen sind, gegenwärtig aber normal auf den gekrümmten Fasern stehen, so werden sich die beiden so gebildeten

Normalen in der Verlängerung *O* schneiden, welcher Durchschnitt als Centrum für die Krümmung der von den Fasern gebildeten Curven zwischen den Querschnitten *m n* und *m' n'* anzusehen ist. Dieser Bemerkung gemäss haben die zwischen diesen Querschnitten gelegenen Fasern, welche ursprünglich gleiche Länge besassen, in Folge der Biegung verschiedene Längen bekommen, und da die Längenveränderungen sowohl Ausdehnungen, als auch Zusammendrückungen sein können,

Fig. 18.



so muss im Allgemeinen angenommen werden, dass von jenen Fasern ein Theil gespannt und ein Theil zusammengepresst worden ist, wobei zugegeben wird, dass auch Fasern vorkommen werden, bei welchen weder das Eine noch das Andere geschehen sein mag. Eine solche Faser, etwa *MM'*, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt worden wäre, also vor und nach der Biegung dieselbe Länge hätte, nennt man eine neutrale Faser. Die Verbindung der sämmtlichen neutralen Fasern in einem Querschnitte, etwa *CD*, heisst sodann die neutrale Axe desselben, und die Verbindung der neutralen Axen der verschiedenen Querschnitte des Prismas, beispielweise *EF*, die neutrale Schichte dieses letzteren. Zufolge der im §. 41 aufgestellten Hypothesen ist man berechtigt, die neutrale Axe als gerade Linie senkrecht auf die Kraftrichtung, die neutrale Schichte aber als Cylinderfläche anzusehen. Es leuchtet jedoch ein, dass im Falle, als die Fasern nach der Biegung keine ebenen Curven wären, die neutrale Schichte in eine doppelt gekrümmte Fläche übergehen würde. Eben so muss zugegeben werden, dass zwischen den Querschnitten *m n* und *m' n'* möglicher Weise gar keine neutralen Fasern vorhanden sein könnten,

wenn nämlich der Bogen MM', dessen Länge die ursprüngliche Entfernung jener Querschnitte anzeigt, ausserhalb des prismatischen Körpers zu liegen käme, und gewissermassen nur einer imaginären Faser zugehörig wäre. Jedenfalls aber werden alle Fasern, welche zwischen der etwaigen neutralen Schichte und der convex gekrümmten Seite des Prismas liegen, ausgedehnt, während die übrigen vorhandenen Fasern eine Zusammendrückung erleiden. Hienach darf man die Lage der neutralen Axe in dem Querschnitte von der örtlichen Lage dieses letzteren nicht als unabhängig betrachten, daher es nicht gerechtfertigt wäre, die Neutralität der Fasern durch die ganze Länge des Prismas stets in einer und derselben Faserschichte anzunehmen.

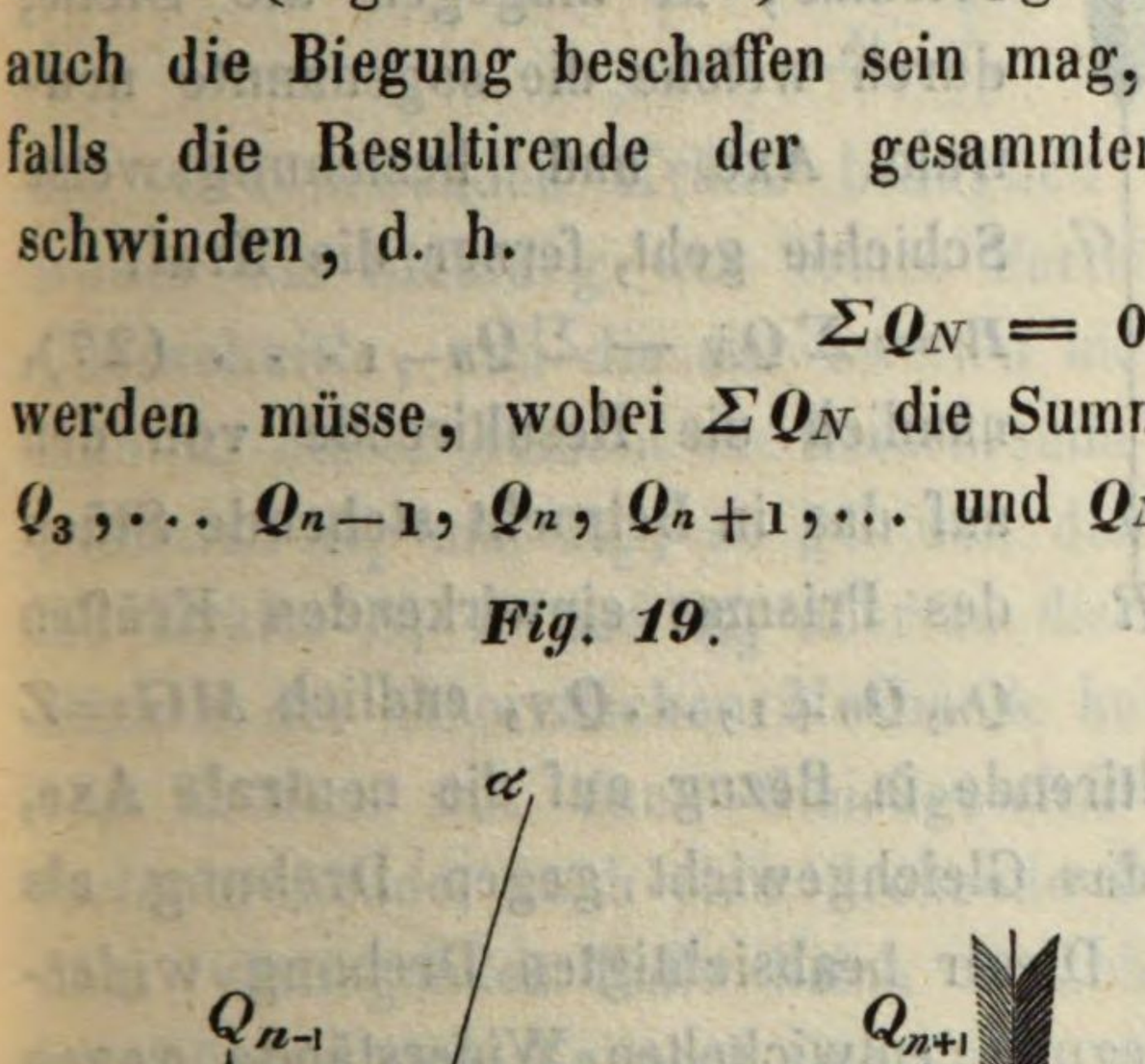
§. 43.

Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts. Statisches Kraftmoment. Statisches Widerstandsmoment. Um sogleich auf das Verhalten des in Anspruch genommenen Prismas (Fig. 16 und 17) überzugehen, beachte man, dass, wie auch die Biegung beschaffen sein mag, für das Gleichgewicht jedenfalls die Resultirende der gesammten einwirkenden Kräfte verschwinden, d. h.

$$\Sigma Q_N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

werden müsse, wobei ΣQ_N die Summe aus den Kräften Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, ... und Q_N im algebraischen Sinne bedeutet, daher etwaige entgegengesetzte Richtungen mit den entgegengesetzten Zeichen + und — anschaulich zu machen sind. In den Figuren möge die Richtung nach abwärts als die positive, daher die nach aufwärts als die negative gelten. Ausserdem aber muss nach vollendeter Biegung in jedem einzelnen Querschnitte des Prismas zwischen den in Betracht kommenden Kräften Gleichgewicht herrschen. Man betrachte daher Fig. 19 irgend einen Quer-

Fig. 19.

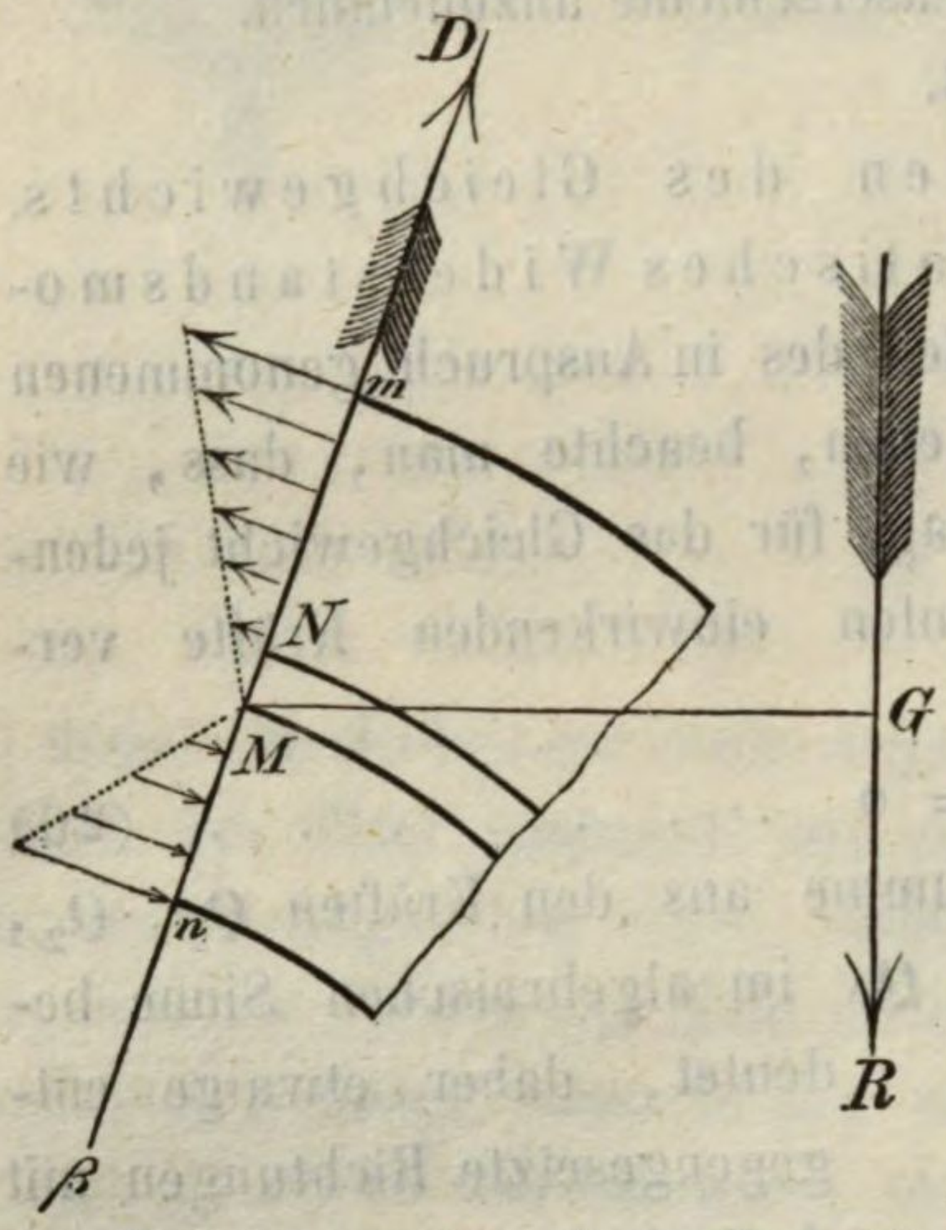


schnitt, etwa den durch die Richtung der Normalen $\alpha\beta$ bestimmten, für welchen mit Rücksicht auf den §. 9 N der Schwerpunct ist, wenn A_{n-1} A_n A_{n+1} etc. die Längenaxe des Prismas bezeichnet. Stellt man sich nun den gewählten Querschnitt in der Lage, welche er nach vollendeter Biegung einnimmt, vollkommmen festgehalten und zugleich den einen Theil des durch diesen Querschnitt abgetheilten Prismas, etwa den Theil $NA_{n-1}\ldots$ weggenommen vor, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass der andere Theil $NA_nA_{n+1}\ldots$ in einem Zustande sich befindet, wie solcher in der Figur 20 anschaulich gemacht wird. In dieser Figur ist mn die Höhe des Prismas in der Gegend des betrachteten Querschnittes, N der obenerwähnte Schwerpunct desselben, durch welchen die Längenaxe des Prismas, M hingegen die Stelle, durch welche die sogenannte neutrale Axe und beziehungsweise Schichte geht, ferner die Kraft

$R = \Sigma Q_N - \Sigma Q_{n-1} \ldots$ (27),

nämlich die Resultirende von den auf das in Betracht stehende Stück des Prismas einwirkenden Kräften $Q_n, Q_{n+1}, \ldots Q_N$, endlich $MG = Z$ der Hebelsarm für diese Resultirende in Bezug auf die neutrale Axe, welch' letztere offenbar für das Gleichgewicht gegen Drehung als Drehungsaxe zu fungiren hat. Dieser beabsichtigten Drehung widersetzen sich die durch die Biegung entwickelten Widerstände gegen Ausdehnung und Zusammendrückung, welche in der Figur durch kleine Pfeile senkrecht auf den Querschnitt angezeigt sind. Es werden nämlich die Fasern zwischen M und m Spannungen, zwischen M und n aber Pressungen erleiden. Diese Spannungen und Pressungen haben je eine Resultirende. Bezeichnet man diese beziehungsweise mit S und P, so wird schliesslich die Aufmerksamkeit auf das in Fig. 21 dargestellte Hebelsystem geleitet, wobei H und J die Angriffspuncte jener partiellen Resultirenden S und P sind.

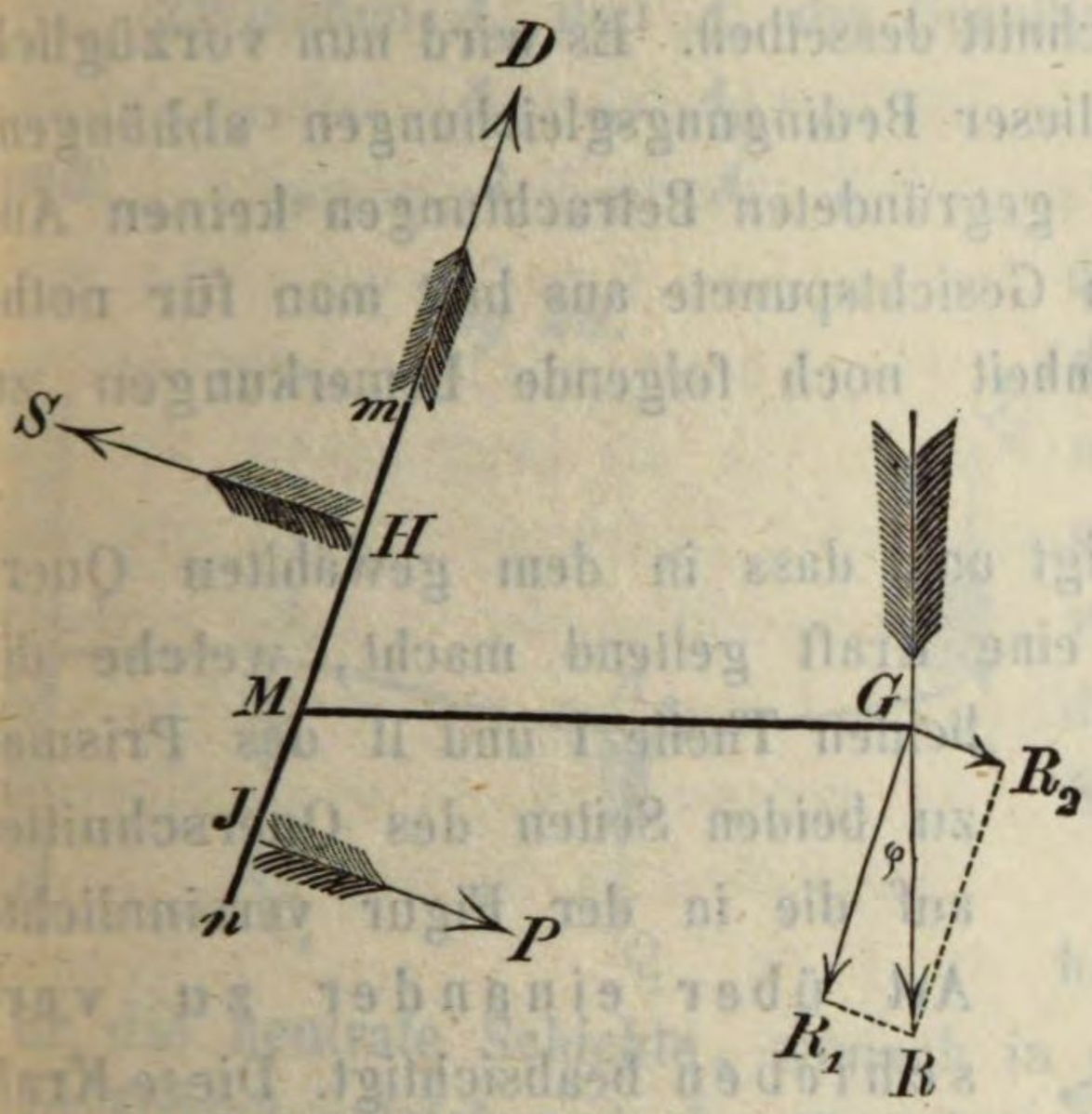
Fig. 20.



Ueberdiess hat man in der Richtung $\alpha\beta$ noch eine Kraft D als

wirkend anzunehmen, welche mit dem Widerstande correspondirt, der sich dem Uebereinanderschieben der beiden in dem gewählten Querschnitte zusammenhängenden Theile des Prismas entgegensetzt. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts für dieses so erhaltene freie Hebelsystem identisch sind, mit den für das zu untersuchende materielle Prisma, daher es die nächste Aufgabe sein wird, den Zustand dieses Hebelsystems zu analysiren. Zu diesem Behufe bringe man die vorkommenden Kräfte bezüglich ihrer Richtung in 2 Partien, wobei die Richtung der ersten Partie parallel zu dem bezüglichen Querschnitte, und die der zweiten hierauf normal sein soll. Zerlegt man in dieser Absicht die Resultirende R in die entsprechenden Componenten R_1 und R_2, so gehören die Kräfte R_1 und D in die eine, die Kräfte S, P und R_2 aber in die andere Partie. Nach bekannten Sätzen der theoretischen Mechanik kann bei einem freien Systeme von Kräften nur dann Gleichgewicht herrschen, wenn weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung möglich ist. Soll in dem vorliegenden Falle keine fortschreitende Bewegung stattfinden, so müssen sich die nach den zwei gewählten Richtungen wirkenden Kräfte aufheben, und daher die beiden Gleichungen

Fig. 21.



$$D = R_1 = R \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\text{und } S - P = R_2 = R \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

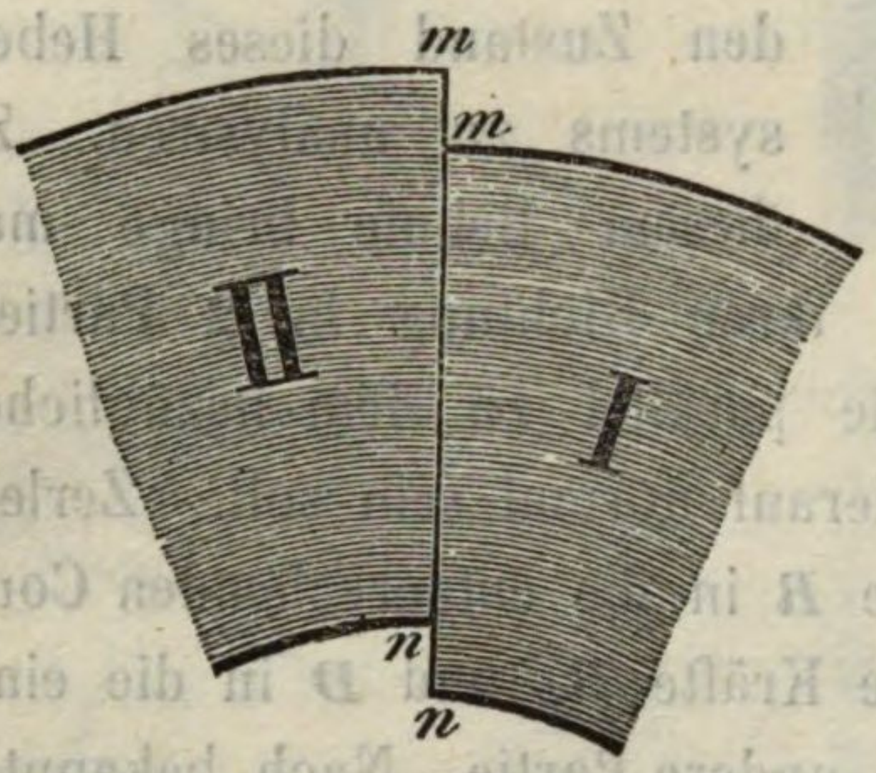
vorhanden sein. Soll weiters auch keine drehende Bewegung eintreten, so müssen sich ausserdem die bezüglichen statischen Kraftmomente gegenseitig vernichten. Demgemäss entsteht die weitere Gleichung $R \cdot \overline{MG} = S \cdot \overline{MH} + P \cdot \overline{JM}$, oder, wenn $MH = u$ und $JM = v$ gesetzt wird, wegen $MG = Z$ auch

$$RZ = Su + Pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Diese so resultirenden 3 Gleichungen (28), (29) und (30) enthalten die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes bei dem der Biegung ausgesetzten Prisma in Bezug auf jeden beliebig gelegenen Querschnitt desselben. Es wird nun vorzüglich von der klaren Auffassung dieser Bedingungsgleichungen abhängen, um in den weiteren darauf gegründeten Betrachtungen keinen Anstand zu finden. Von diesem Gesichtspuncte aus hält man für nothwendig, bei dieser Gelegenheit noch folgende Bemerkungen zu machen:

1. Die Gleichung (28) zeigt an, dass in dem gewählten Querschnitt mn (Fig. 22) sich eine Kraft geltend macht, welche die beiden Theile I und II des Prismas zu beiden Seiten des Querschnittes auf die in der Figur versinnlichte Art über einander zu verschieben beabsichtigt. Diese Kraft ist so gross, wie die eine Componente $R_1 = R \cos\varphi$. Soll nun dieses Verschieben nicht besorgt werden, so muss die Möglichkeit vorhanden sein, dass der aus dem Zusammenhange der beiden Theile I und II hervorgeruefne Widerstand D sich in dem verlangten Grade entwickeln könne. Indem aber zufolge der in Rede stehenden Gleichung stets $R = \frac{D}{\cos.\varphi}$ ist, und der Widerstand D nach Massgabe des für das Prisma verwendeten Materiales, so wie der Form und Grösse des Querschnittes einen Maximalwerth besitzen muss, so leuchtet ein, dass sich für R eine Gränze ergeben werde, über welche hinaus die Anspruchsnahme nicht gesteigert werden darf, wenn das Gleichgewicht gegen das erwähnte Uebereinanderverschieben nicht gestört werden soll. Nachdem ferner bei kleinen Biegungen φ ein kleiner Winkel sein, und sodann $\cos.\varphi$ sich von der Einheit nicht weit entfernen wird, so ist in diesem Falle näherungsweise $R = D$. Es ist jedoch wohl zu beachten, dass im Allgemeinen die fragliche Resultirende R mit der Lage des Querschnittes variirt, und bald positiv, bald negativ, bald Null werden, übrigens aber diese Verän-

Fig. 22.



derung entweder successive oder sprungweise geschehen kann. So z. B. hätte man nach Fig. 23, wenn von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird, für die Querschnitte

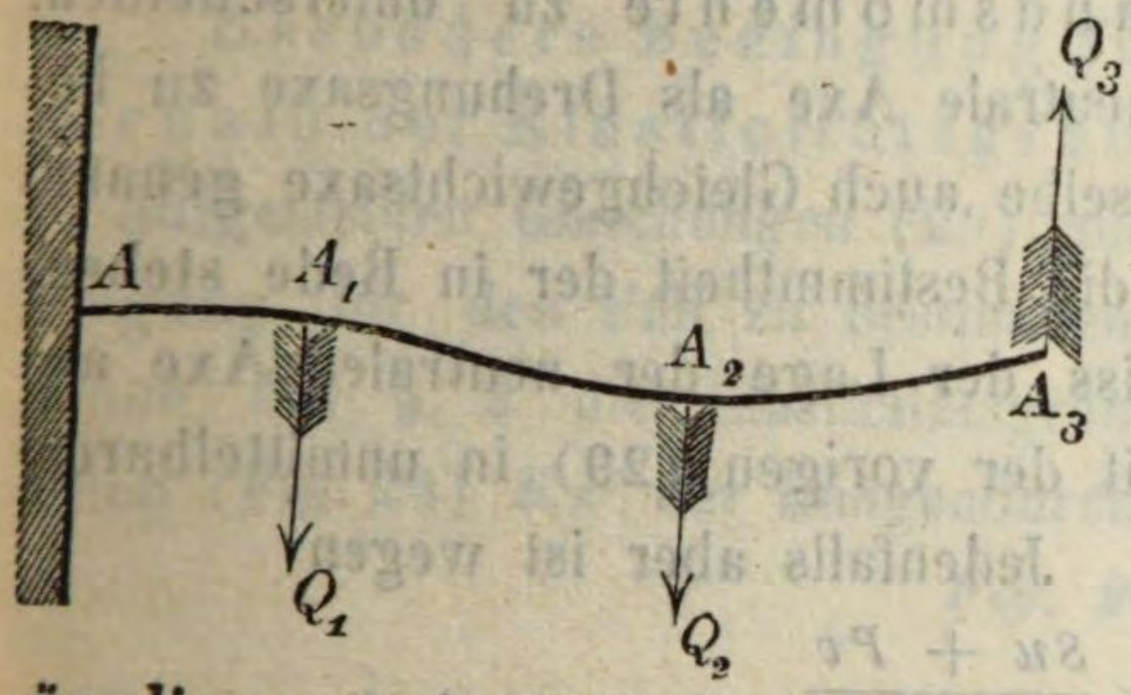
zwischen A_2 und A_3 die Resultirende $R = -Q_3$,

„ A_1 „ A_2 „ „ $R = Q_2 - Q_3$

und „ A „ A_1 „ „ $R = Q_1 + Q_2 - Q_3$,

daher 3 besondere Werthe, und die Veränderung der Grösse R mit der Lage des Querschnittes wäre noch immer sprungweise vorhanden, wenn man auch auf das eigene Gewicht des Prismas Rücksicht nehmen würde.

Fig 23.



2. Die Gleichung (29) enthält die bedungene Eigenschaft für die neutrale Schichte, wonach in derselben weder ein Zug noch ein Druck entstehen darf. Sie lehrt, dass zur Erreichung dieser Bedingung die Differenz $S - P$ zwischen den gesammten hervorgerufenen Spannungen und Pressungen der mit $R_2 = R \cdot \sin\varphi$ bezeichneten Componenten äquivalent, und, wie man nach einiger Ueberlegung erkennen wird, jedenfalls positiv sein muss. Hieraus folgt, dass die gesammten in einem Querschnitte entwickelten Spannungen stets grösser, als die gleichzeitig hervorgerufenen gesammten Pressungen sind. Nur in den speziellen Fällen, wo R oder $\varphi = o$ wäre, würde ausnahmsweise die angeregte Differenz verschwinden, und die Gleichheit der resultirenden Spannung S und der Pressung P behauptet werden können. Es muss jedoch zugegeben werden, dass bei kleinen Biegungen, wo φ ebenfalls klein ist, die fragliche Differenz $S - P$ so unwesentlich werden kann, dass man sodann mit hinreichender Genauigkeit $S = P$ annehmen dürfte. Zu dieser Berechtigung ist übrigens nothwendig, dass S und P selbst keine zu kleinen Grössen seien, weil sonst die Vernachlässigung ihrer, wenn auch kleinen Differenz nicht zulässig wäre, und einen merklichen Fehler herbeiführen würde. In demjenigen Querschnitte, wo man $P = o$ also $S = R \sin\varphi$ erhielte, wären offenbar nur Spannungen und keine Pressungen vorhanden, und die neutrale Axe käme in die unterste Kante des Querschnittes nach n Fig. 20 zu liegen. Aus

diesen Bemerkungen erkennt man, dass die Gleichung (29) zur Bestimmung der Lage der neutralen Schichte vorzüglich berufen ist.

3. Die Gleichung (30) enthält die Bedingung des Gleichgewichtes gegen Drehung. In derselben ist RZ das statische Moment der einwirkenden (offensiven) Kräfte, während $Su+Pv$ das statische Moment der hervorgerufenen Kräfte (Widerstände) ausdrückt. Hienach hat man zwischen dem statischen Kraftmomente und dem statischen Widerstandsmomente zu unterscheiden. Beide Momente sind auf die neutrale Axe als Drehungsaxe zu beziehen, aus welchem Grunde dieselbe auch Gleichgewichtsaxe genannt wird. Man sieht hieraus, dass die Bestimmtheit der in Rede stehenden Gleichung von der Kenntniss der Lage der neutralen Axe abhängt, daher diese Gleichung mit der vorigen (29) in unmittelbarem Zusammenhange zu bringen ist. Jedenfalls aber ist wegen

$$R = \frac{Su + Pv}{Z}$$

der Werth von R in so ferne begränzt, als die gesammten Spannungen und Pressungen gewisse Maximalwerthe haben, welche keine weitere Steigerung zulassen. Da überdiess bei den vorkommenden prismatischen Körpern in der Regel die Längendimension bei Weitem die Breite und Höhe übertrifft, so wird für die meisten Lagen des Querschnittes der Hebelsarm Z bedeutend grösser als u und v, wonach man im Allgemeinen R viel kleiner als S und P erhält.

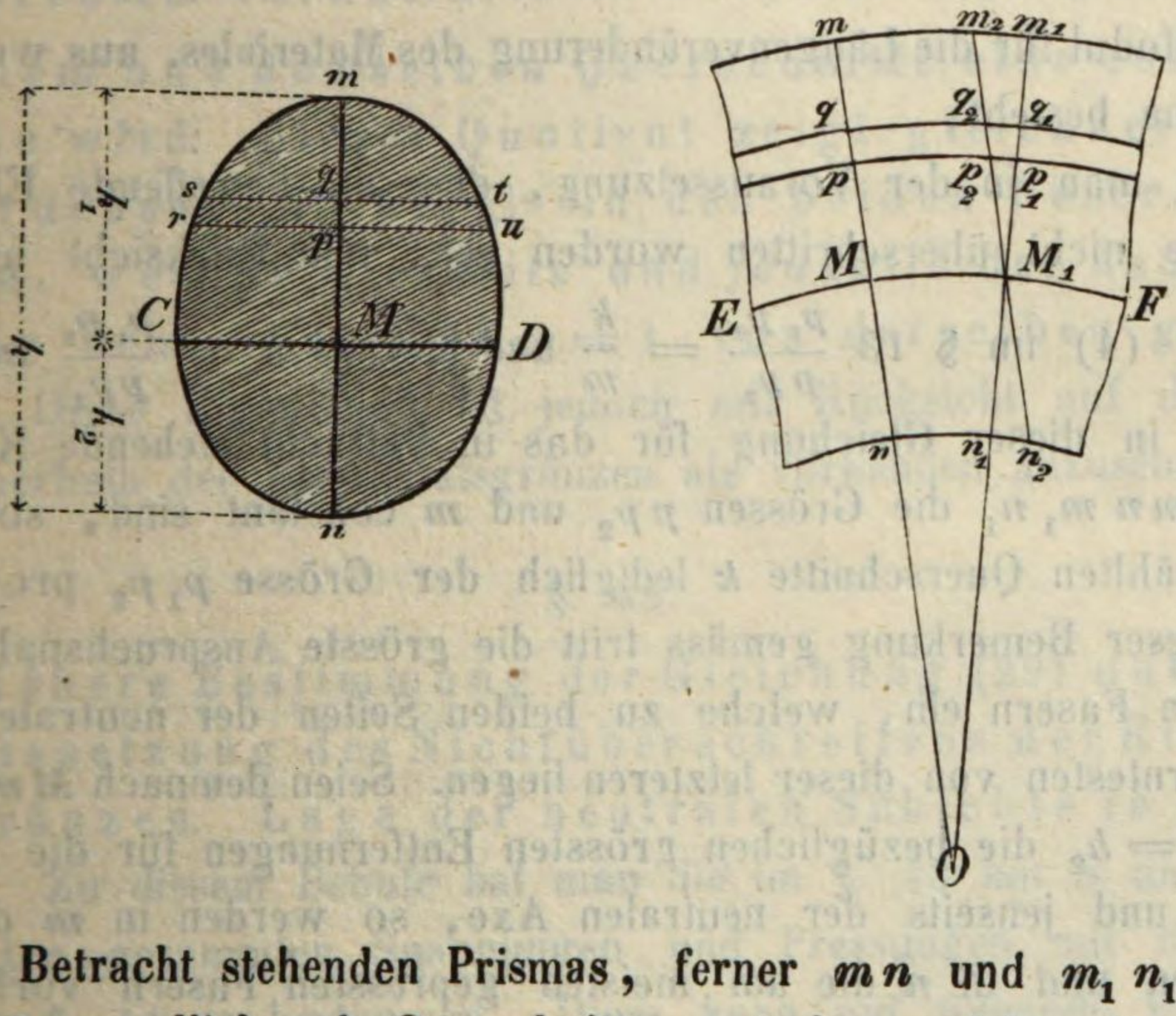
4. Die Intensität der einwirkenden Kräfte ist zufolge der Bemerkungen ad 1 und 3 in doppelter Hinsicht begränzt. Es muss nämlich einerseits $R = \frac{D}{\cos\varphi}$, anderseits aber $R = \frac{Su+Pv}{Z}$ sein, und es darf keine dieser Gleichungen unmöglich werden. Da in der Regel wegen einer Störung des Gleichgewichtes gegen das ad 1 erwähnte Uebereinanderverschieben eine geringere Besorgniss, als wegen einer Störung desselben gegen die ad 3 angeführte Drehung vorwaltet, so wird man in der Regel die erste Gleichung in der Ueberzeugung, dass sie möglich ist, keiner besonderen Untersuchung zu unterziehen, hingegen die vorzüglichste Aufmerksamkeit der zweiten Gleichung zuzuwenden haben. Man wird indess in der Folge sehen, und man kann diess auch schon jetzt erkennen, dass bei einer kleinen Länge des Prismas im Verhältniss zu den Querschnittsdimensionen, wie etwa

bei Bolzen, Zapfen, Nieten u. s. w., der aus der Gleichung $\frac{Su + Pv}{Z}$ hervorgehende Werth von R zu gross ausfallen könnte, um gleichzeitig der Relation $R = \frac{D}{\cos \varphi}$ zu genügen, und dass daher in einem solchen Falle ausnahmsweise die Berücksichtigung des Gleichgewichtes gegen das Uebereinanderverschieben in den Vordergrund träte.

§. 44.

Besondere Bedingung für das Gleichgewicht innerhalb der Elasticitätsgränzen. Um ausser den im vorigen §. aufgestellten Gleichungen (29) und (30) noch die besondere Bedingung für den Fall zu bestimmen, wenn durch die Biegung im Sinne des §. 5 die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, seien (Fig. 24) EF der Längendurchschnitt und CD der Querschnitt

Fig. 24.



des in Betracht stehenden Prismas, ferner mn und $m_1 n_1$ in demselben 2 unendlich nahe Querschnitte, zwischen welchen der unendlich kleine Theil des Prismas $mn m_1 n_1$ liegt. Man untersuche jetzt das Verhalten der in diesem Körperelemente vorhandenen Fasern. Zunächst leuchtet ein, dass, wenn EF die neutrale Schichte und CD die neutrale Axe vorstellt, sämmtliche Faserschichten zwischen Mm und $M_1 m_1$ ausgedehnt, zwischen Mn und $M_1 n_1$ hingegen zusammengedrückt werden. Die bezüglichen Längenveränderungen entnimmt

man deutlich, wenn man beachtet, dass die beiden Querschnitte mn und $m_1 n_1$ vor der Biegung parallel, also gegenseitig in einer Lage waren, welche man sich durch die gleichlaufenden Richtungen mn und $m_2 n_2$ versinnlichen kann. So z. B. wäre $p_1 p_2$ die Verlängerung der Faserschichte $pp_1\ qq_1$, deren ursprüngliche Länge mit pp_2 zu bemessen ist. Hiebei ist im Querschnitte die Faserschichte *srut* parallel mit CD anzunehmen. Die fragliche Längenveränderung kann im Sinne des §. 10 durch den Quotienten $\frac{p_1 p_2}{pp_2}$ versinnlicht werden, und sowohl eine Ausdehnung als auch eine Zusammendrückung bedeuten, je nachdem die gewählte Faserschichte diesseits oder jenseits der neutralen Axe liegt. Sei nun allgemein die auf den Quadrat-Zoll reducirte Kraft, welche die erwähnte Längenveränderung hervorzubringen im Stande wäre, und welche daher die in der beliebig gewählten Faserschichte vorherrschende Spannung oder Pressung anzeigt, ... $= k$,
und der Modul für die Längenveränderung des Materiales, aus welchem das Prisma besteht, ... $= m$,
so erhält man in der Voraussetzung, dass die betreffende Elasticitätsgränze nicht überschritten worden sei, mit Rücksicht auf die Gleichung (4) im §. 13 $\frac{p_1 p_2}{pp_2} = \frac{k}{m}$ und hieraus $k = \frac{p_1 p_2}{pp_2}\ m$.

Da in dieser Gleichung für das in Betracht stehende Körperelement $mn\ m_1 n_1$ die Grössen pp_2 und m constant sind, so ist in dem gewählten Querschnitte k lediglich der Grösse $p_1 p_2$ proportionirt. Dieser Bemerkung gemäss tritt die grösste Anspruchsnahme in denjenigen Fasern ein, welche zu beiden Seiten der neutralen Axe am entferntesten von dieser letzteren liegen. Seien demnach $Mm = h_1$ und $Mn = h_2$ die bezüglichen grössten Entfernungen für die Fasern diesseits und jenseits der neutralen Axe, so werden in m die gespanntesten und in n die am meisten gepressten Fasern vorhanden sein, und es müssen sich die entsprechende Maximal-Spannung s, so wie die Maximal-Pressung p (gleichfalls per □″ verstanden) aus den Gleichungen

$$s = \frac{m_1 m_2}{m m_2}\ m \quad \text{und} \quad p = \frac{n_1 n_2}{n n_2}\ m$$

ergeben. Mit Hilfe derselben gelangt man wegen $pp_2 = mm_2 = nn_2$ zunächst auf die Proportion $k : s : p = p_1 p_2 : m_1 m_2 : n_1 n_2$ und sofort,

wenn die variable Entfernung $Mp = x$ gesetzt wird, wegen

$$p_1 p_2 : m_1 m_2 : n_1 n_2 = x : h_1 : h_2$$

auf die weitere Relation $k : s : p = x : h_1 : h_2$, oder

$$\frac{k}{x} = \frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31),$$

in welcher k sowohl eine Spannung, als auch eine Pressung bezeichnen kann. Bei dieser Gelegenheit wird festgesetzt, dass im Nachfolgenden die Grössen k und x durch die Zeiger 1 und 2 unterschieden werden, je nachdem dieselben mit den ausgedehnten oder zusammengedrückten Faserschichten correspondiren. Die grösste Höhendimension des Querschnittes (Fig. 24) wird $h_1 + h_2 = h$ gesetzt.

Die Gleichung (31) lehrt, dass die Spannung oder Pressung k, die in einer Faserschichte hervorgerufen wird, mit ihrer Entfernung x von der neutralen Axe im directen Verhältnisse steht, und der Quotient $\frac{k}{x}$ in einem und demselben Querschnitte eine constante Grösse wird. Dieser Quotient zeigt gleichzeitig die Anspruchsnahme pr. □″ in den beiden Faserschichten an, welche diesseits und jenseits der neutralen Axe in dem Abstande $x = 1$ von derselben gelegen sind. Diese Eigenschaft ist jedoch mit Rücksicht auf den §. 13 nur innerhalb der Elasticitätsgränzen als vorhanden anzusehen.

§. 45.

Nähere Bestimmung der Gleichung (29) unter der Voraussetzung des Nichtüberschreitens der Elasticitätsgränzen. Lage der neutralen Schichte in diesem Falle. Zu diesem Behufe hat man die im §. 43 mit S und P bezeichneten gesammten Spannungen und Pressungen mit Rücksicht auf den §. 44 zu bestimmen. Diess kann auf folgende Weise geschehen:

Sei die Querschnittsfläche der Faserschichte *stur* . . $= df_1$
und die gesammte Spannung in dieser Faserschichte . . $= dS$,
so hat man mit Rücksicht auf den §. 10 $dS = k_1 df_1$ und sofort

$$S = \int_o^{h_1} k_1 df_1 ,$$

indem man sich k_1 und df_1 als Functionen der Grösse x_1 vorstellt, und hiebei beachtet, dass letztere bezüglich der gespannten Faserschichten von o bis h_1 variirt. Auf dieselbe Weise findet man für die gesammten Pressungen

$$P = \int_o^{h_2} k_2 \, df_2,$$

wobei die analogen Grössen k_2 und df_2 sich auf die zusammengedrückten Faserschichten beziehen. Sonach geht die Differenz $S - P$, welche man zufolge der Gleichung (29) benöthigt, über in

$$S - P = \int_o^{h_1} k_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} k_2 \, df_2,$$

und da nach der Relation (31)

$$k_1 = \frac{s}{h_1} x_1 \text{ und } k_2 = \frac{p}{h_2} x_2$$

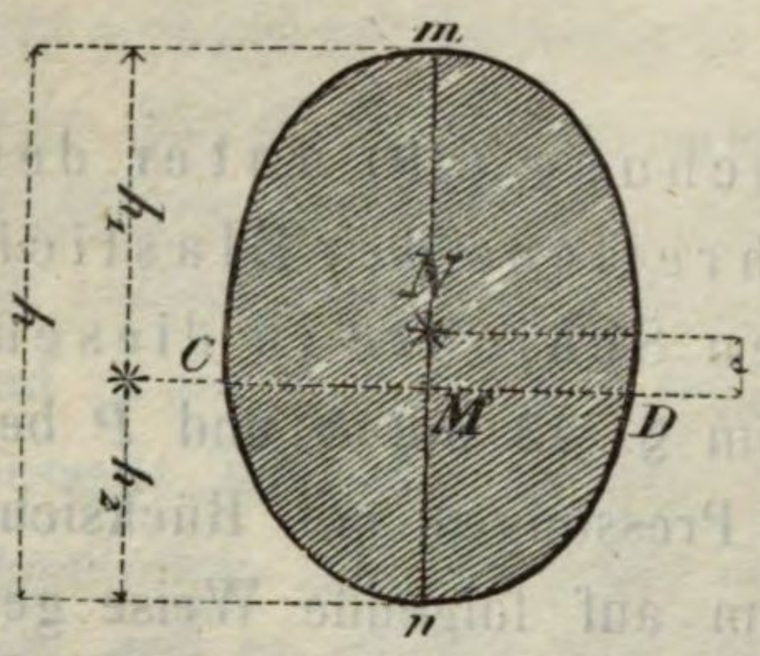
zu setzen ist, auch in

$$S - P = \frac{s}{h_1} \left[\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2\right] = \frac{p}{h_2} \left[\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2\right] \quad (32),$$

wenn man bemerkt, dass $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ ist, und hiebei die Grössen s und p von x_1 und x_2 unabhängig sind.

Die Gleichung (32) kann auf eine einfache Art anschaulich gemacht werden. Ist nämlich CD (Fig. 25) die neutrale Axe im Querschnitte, und N sein Schwerpunct, so hat man bekanntlich nach der Theorie des Schwerpunctes von materiellen homogenen Flächen unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen

Fig. 25.



$$f \cdot \overline{MN} = \int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2 \quad (33),$$

wenn f die *Area* des ganzen Querschnittes vorstellt. Demgemäss kann der Ausdruck

$$\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2$$

auch erhalten werden, wenn man sich die Querschnittsfläche f als materiell und homogen vorstellt, und sodann das statische Moment der ganzen Fläche in Bezug auf die neutrale Axe auf die übliche

Weise ausdrückt, nämlich die Fläche mit der Materie derselben verwechselt. Setzt man die Entfernung des Schwerpunctes N von der neutralen Axe, also $MN = e$, und benützt die Relation (33) in der Gleichung (32), so wird $S - P = \frac{sfe}{h_1} = \frac{pfe}{h_2}$, und hieraus wegen der Gleichung (29) $S - P = R \sin\varphi$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{entweder } e = \frac{h_1 R \sin\varphi}{sf} \\ \text{oder } \quad e = \frac{h_2 R \sin\varphi}{pf} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Diese beiden Gleichungen, welche identische Resultate geben müssen, sind geeignet, die Aufklärung über die Lage der neutralen Axe in einem Querschnitte im Vergleiche zu dem Orte seines Schwerpunctes zu liefern, und zur Ueberzeugung zu führen, dass dieselbe im Allgemeinen nicht durch den erwähnten Schwerpunct geht, sondern diess nur ausnahmsweise dann eintreten würde, wenn wegen R oder $\varphi = o$ auch $S - P = o$ wäre.

Indem vorläufig nur im Allgemeinen auf diese Eigenschaft aufmerksam gemacht wird, wird zugleich auf den spätern §. 49 hingewiesen, welcher die weiters nöthigen Erörterungen über die neutrale Schichte enthält.

§. 46.

Nähere Bestimmung der zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente herrschenden Gleichung (30) unter der Voraussetzung des Nichtüberschreitens der Elasticitätsgränzen. Zu diesem Behufe hat man die im §. 43 mit Su und Pv bezeichneten statischen Momente der sämmtlichen Spannungen und Pressungen aufzusuchen. In dieser Absicht bemerke man, dass $x_1\, dS$ das statische Moment der in der Faserschichte *srut* (Fig. 24) entwickelten Spannungen, daher $\int_o^{h_1} x_1\, dS = Su$ die Summe der statischen Momente aller vorkommenden Spannungen bezeichnet. Es ist aber nach § 45

$$dS = k_1\, df_1 = \frac{s\, x_1\, df_1}{h_1}, \text{ daher auch}$$

$$Su = \frac{s}{h_1} \int_o^{h_1} x_1^2\, df_1.$$

Auf dieselbe Weise hat man für die Summe der statischen Momente der gesammten Pressungen

$$Pv = \frac{p}{h_2} \int_o^{h_2} x_2^2 \, df_2.$$

Mit Rücksicht auf diese Werthe wird sofort die gesuchte Summe der statischen Widerstandsmomente wegen $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$,

$$Su + Pv = \frac{s}{h_1} \left[\int_o^{h_1} x_1^2 \, df_1 + \int_o^{h_2} x_2^2 \, df_2\right] = \frac{p}{h_2} \left[\int_o^{h_1} x_1^2 \, df_1 + \int_o^{h_2} x_2^2 \, df_2\right] \quad (35).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ein Aggregat von Producten, welche je aus einem Flächenelemente und dem Quadrate seines Abstandes von der Drehungsaxe gebildet sind. Indem man diese Wahrnehmung macht, erinnert man sich auf die in der Mechanik vorkommende Lehre über die Trägheitsmomente von materiellen homogenen Flächen. Man würde nämlich ganz denselben Ausdruck für das Trägheitsmoment der Fläche f erhalten haben, wenn man sich dieselbe materiell und um die neutrale Axe CD (Fig. 25) gedreht vorgestellt, dabei aber anstatt der Materie der Flächenelemente diese letzteren selbst substituirt hätte.

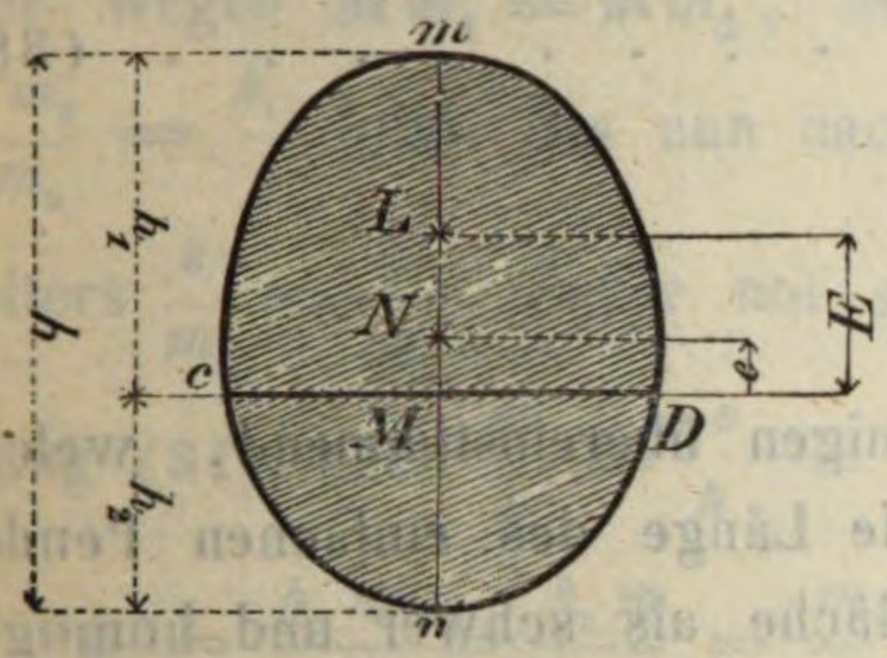
In dieser Erkenntniss kann man jenen Ausdruck eben so, wie man die Gleichung (33) als das statische Moment der ganzen Fläche angesehen hatte, als Repräsentant für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe betrachten, wenn man statt der Materie der Fläche diese letztere selbst gelten lässt. Es ist übrigens durchaus nicht nothwendig, auf die eigentliche Bedeutung des Trägheitsmomentes in der Mechanik zurückzugehen, sondern dasselbe nur der Bildung des Werthes nach in so ferne sich gegenwärtig zu halten, als es für jedes Flächenelement aus dem Producte desselben und dem Quadrate des betreffenden Abstandes von der Drehungsaxe besteht. Hienach leuchtet ein, dass der Werth für das Trägheitsmoment, welches mit T bezeichnet werden soll, stets die Form

$$T = fE^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

haben, nämlich ein Product aus der Fläche f und dem Quadrate einer Dimension E sein müsse, wobei E die Entfernung desjenigen

Punctes L (Fig. 26) von der Drehungsaxe vorstellt, in welchem man sich die ganze Fläche ohne Veränderung ihres Trägheitsmomentes vereinigt vorstellen könnte. Es hat daher der Punct L für das Trägheitsmoment des Querschnittes dieselbe Bedeutung, wie der Schwerpunct N für das statische Moment desselben, und man begreift zugleich, dass wegen $E < h$ ohne Zweifel $E^2 = C.h^2$, also $T = C.fh^2$ sein werde, wo die Zahl C einen gewissen echten Bruch bedeutet, welcher von der Querschnittsform und der Lage der neutralen Axe abhängt. Dies vorausgesetzt, reducirt sich die zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente herrschende Gleichung (30) auf folgende:

Fig. 26.



$$RZ = \frac{s}{h_1} T = \frac{p}{h_2} T \quad \ldots\ldots \quad (37).$$

Dieser Ausdruck zeigt an, dass das statische Moment der hervorgerufenen Spannungen und Pressungen in Bezug auf die Drehungsaxe gefunden wird, wenn man $\left(\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}\right)$ die Anspruchsnahme der Fasern in der Entfernung 1 von dieser Axe mit (T) dem bezüglichen Werthe für das Trägheitsmoment des Querschnittes in dem erwähnten Sinne multiplicirt.

§. 47.

Mittelpuncte für die Spannungen und für die Pressungen. Die beiden Puncte H und J in Fig. 21, als die Angriffspuncte für die partiellen Resultirenden S und P, sind offenbar die Mittelpuncte für die gesammten Spannungen und beziehungsweise Pressungen. Die Lage dieser Puncte bestimmt sich aus der Grösse der Hebelsarme u und v. Es ist nämlich

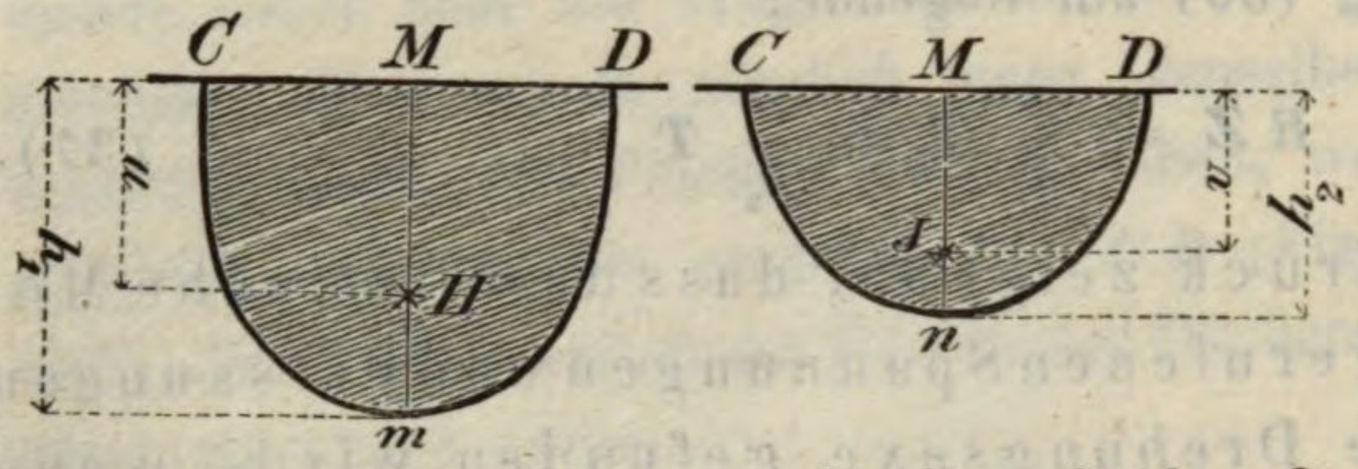
nach §. 46 $$Su = \frac{s}{h_1} \int_o^{h_1} x_1^2 \, df_1 \text{ und } Pv = \frac{p}{h_2} \int_o^{h_2} x_2^2 \, df_2,$$

ferner nach §. 45 $$S = \frac{s}{h_1} \int_o^{h_1} x_1 \, df_1 \text{ und } P = \frac{p}{h_2} \int_o^{h_2} x_2 \, df_2,$$

$$\left.\begin{aligned} \text{daher einerseits } u &= \frac{\int_o^{h_1} x_1^2\, df_1}{\int_o^{h_1} x_1\, df_1} \\ \text{und anderseits } v &= \frac{\int_o^{h_2} x_2^2\, df_2}{\int_o^{h_2} x_2\, df_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

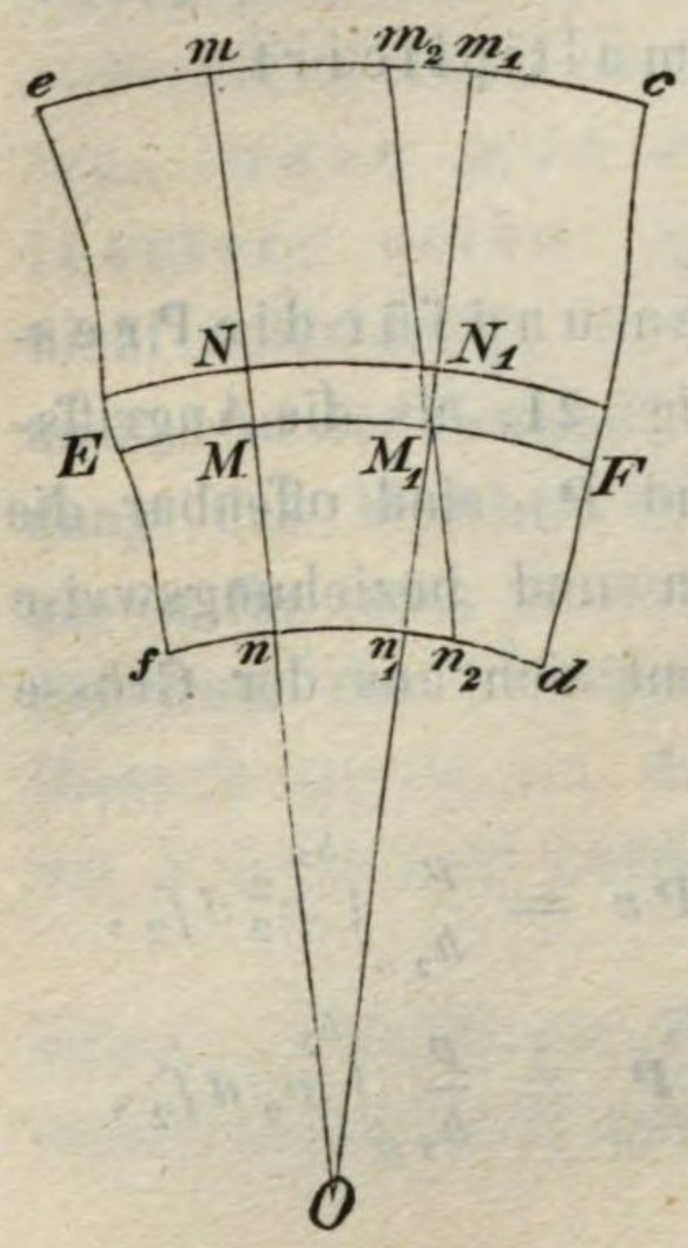
Diese Formeln sind mit denjenigen übereinstimmend, welche man nach der Pendeltheorie für die Länge des einfachen Pendels findet, wenn man die Querschnittsfläche als schwer und homogen betrachten, dann die beiden durch die neutrale Axe entstandenen Theile trennen und jeden dieser Theile abgesondert um jene Axe schwingen lassen würde. Die beiden vorhin erwähnten Mittelpuncte *H* und *J* sind nämlich zugleich die Schwingungspuncte der getrennten Flächentheile *CmD* und *CnD* (Fig. 27). Wären z. B. diese beiden Querschnittstheile Rechtecke, so hätte man bekanntlich $u = \frac{2}{3} h_1$ und $v = \frac{2}{3} h_2$.

Fig. 27.



§. 48.

Fig. 28.



Krümmungshalbmesser für die neutralen Fasern und für die Längenaxe. Vervollständigt man die in der Fig. 18 dargestellte Zeichnung für den Längenschnitt des Prismas noch mit der Längenaxe desselben, so erhält man die Fig. 28, wo in der Gegend des beliebig gewählten Querschnittes *m n* der Krümmungshalbmesser für die neutralen Fasern . . . . . $MO = \varrho$, der für die Längenaxe aber . . $NO = \varrho'$ gesetzt werden soll. Hienach wird die mittelst der Gleichung (34) ausgedrückte Grösse $e = MN = \varrho' - \varrho$, d. h. der Differenz jener Krümmungshalbmesser gleich.

Um zuerst für ϱ eine Relation aufzufinden, bemerke man, dass mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit der beiden $\Delta M_1 m_1 m_2$ und $M_1 M O$ die Proportion $m_1 m_2 : M M_1 = M_1 m_2 : M O$ entseht, aus welcher wegen $M M_1 = m m_2$, $m_2 M_1 = h_1$ und $M O = \varrho$ zunächst $\frac{m_1 m_2}{m m_2} = \frac{h_1}{\varrho}$ folgt. Da nun nach §. 44 $\frac{m_1 m_2}{m m_2} = \frac{s}{m}$ ist, so hat man weiters $\frac{s}{m} = \frac{h_1}{\varrho}$, daher mit gleichzeitiger Rücksicht auf die Gleichung (31) auch $\frac{m}{\varrho} = \frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ und sofort

$$\varrho = \frac{h_1 m}{s} = \frac{h_2 m}{p} = \frac{m}{\frac{s}{h_1}} = \frac{m}{\frac{p}{h_2}} = \frac{h_1}{\frac{s}{m}} = \frac{h_2}{\frac{p}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Diese Gleichungen, welche stets den Krümmungshalbmesser ϱ bestimmen, geben unter den dargestellten verschiedenen Formen Anlass zu interessanten Betrachtungen, wenn man sich erinnert, dass $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ nach §. 44 die Anspruchsnahme der Fasern in dem Abstande 1 von der neutralen Axe bedeutet, $\frac{s}{m}$ und $\frac{p}{m}$ aber nach §. 13 sich auf die hervorgerufenen Längenveränderungen in den gespanntesten und gepresstesten Fasern beziehen. Man erhält nunmehr für den Krümmungshalbmesser der Längenaxe

$$\varrho' = \varrho + e = \frac{h_1}{s}\left(m + \frac{R \sin \varphi}{f}\right) = \frac{h_2}{p}\left(m + \frac{R \sin \varphi}{f}\right) (40),$$

daher auch

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = 1 + \frac{R \sin \varphi}{f m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und

$$\frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} = \frac{e}{\varrho} = \frac{R \sin \varphi}{m f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

welch' letztere Gleichung auch unmittelbar aus den Gleichungen (34) folgt, wenn man dort anstatt $\frac{h_1}{s}$ und $\frac{h_2}{p}$ den äquivalenten Werth $\frac{\varrho}{m}$ setzt. Durch die in der Gleichung (39) gegebenen Werthe für ϱ nimmt zugleich die Gleichung der statischen Widerstandsmomente die Form

$$R Z = \frac{m T}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

also eine solche an, welche die Abhängigkeit zwischen dem Krümmungshalbmesser der neutralen Fasern (ϱ) und dem correspondirenden statischen Kraftmomente (RZ) anzeigt, und zur Bestimmung der Biegung des Prismas dienen wird.

§. 49.

Hauptsätze in Betreff der Lage der neutralen Schichte.

Mit Benützung der bisher aufgestellten Relationen kann man unter der gemachten Voraussetzung, dass durch die Anspruchsnahme die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, in Betreff der Lage der neutralen Schichte folgende Hauptsätze zur Kenntniss nehmen:

1. Da nach der Gleichung (34) für $\varphi = o$ auch $e = o$ wird, so geht die neutrale Schichte durch den Schwerpunct jener Querschnitte, zu welchen auch nach der Biegung die Richtung der einwirkenden Kräfte parallel ist. So z. B. würde die neutrale Schichte in Fig. 29 durch den Schwerpunct N des festgehaltenen Querschnitts mn, in Fig. 30 aber durch die Schwerpuncte N_1, N_2 und N_3 der bezüglichen Querschnitte $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ und $m_3 n_3$

Fig. 29.

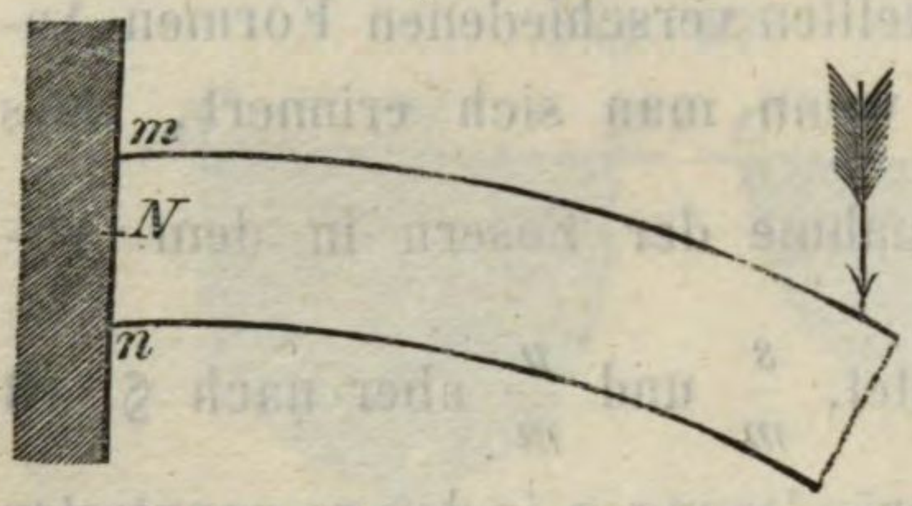
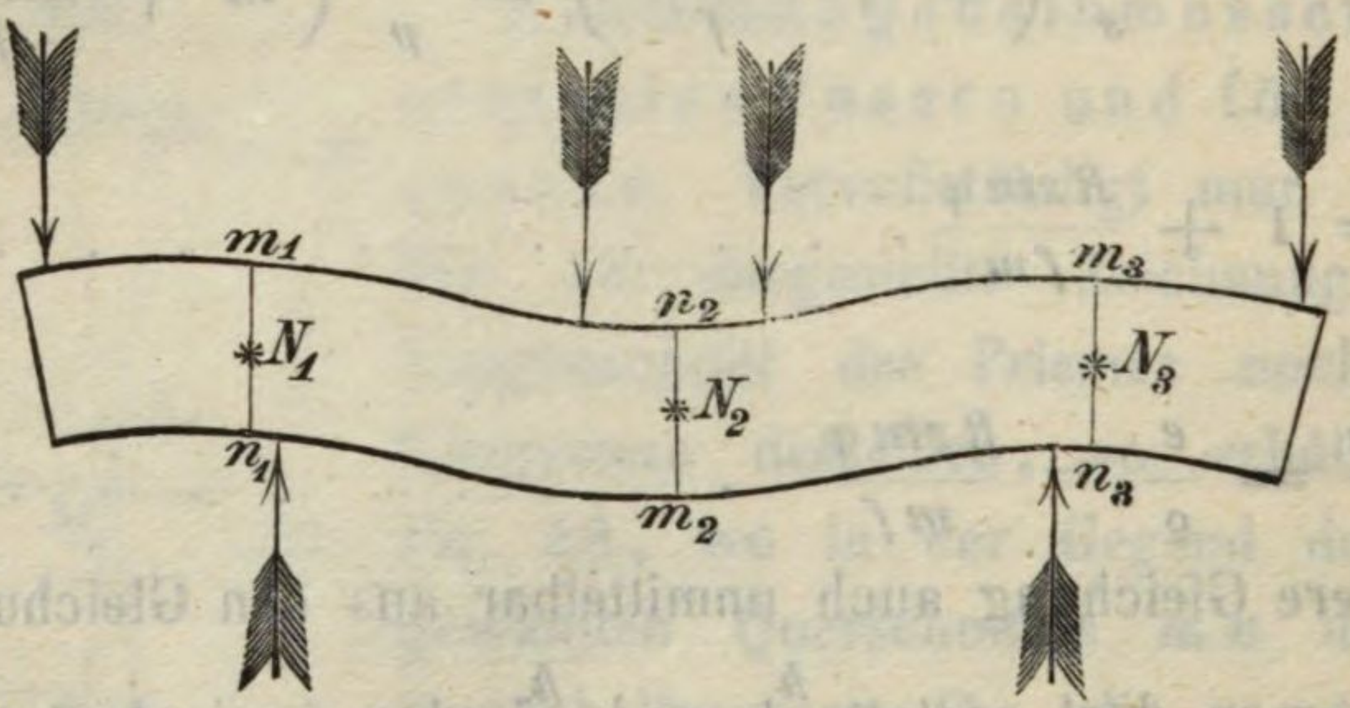


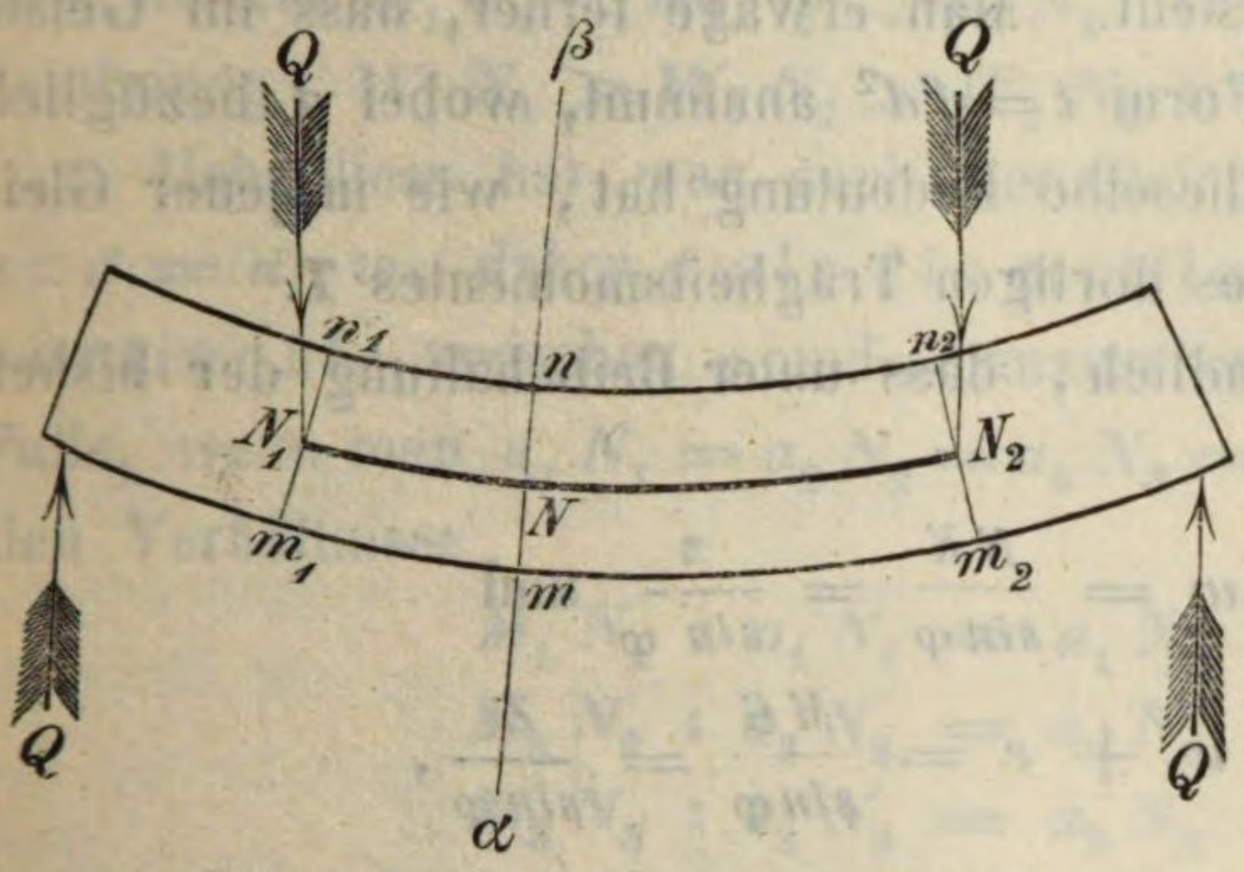
Fig. 30.



gehen, wenn die einwirkenden Kräfte zu jenen Querschnitten auch nach der Biegung parallel laufen. Diese Eigenschaft kann auch durch die Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas nicht beeinträchtigt werden, wenn die Längenaxe desselben ursprünglich horizontal gelegen ist, und demgemäss die hierauf normalen Kräfte und die Schwere des Prismas in einem und demselben Sinne wirken.

2. Für $R = o$ geht wegen $e = o$ die neutrale Schichte gleichfalls durch den Schwerpunct des betreffenden Querschnittes. Auf die Möglichkeit, dass R verschwinden kann, wurde schon im §. 43 hingewiesen. So z. B. wäre in Fig. 31 für jeden beliebigen Querschnitt mn, welcher

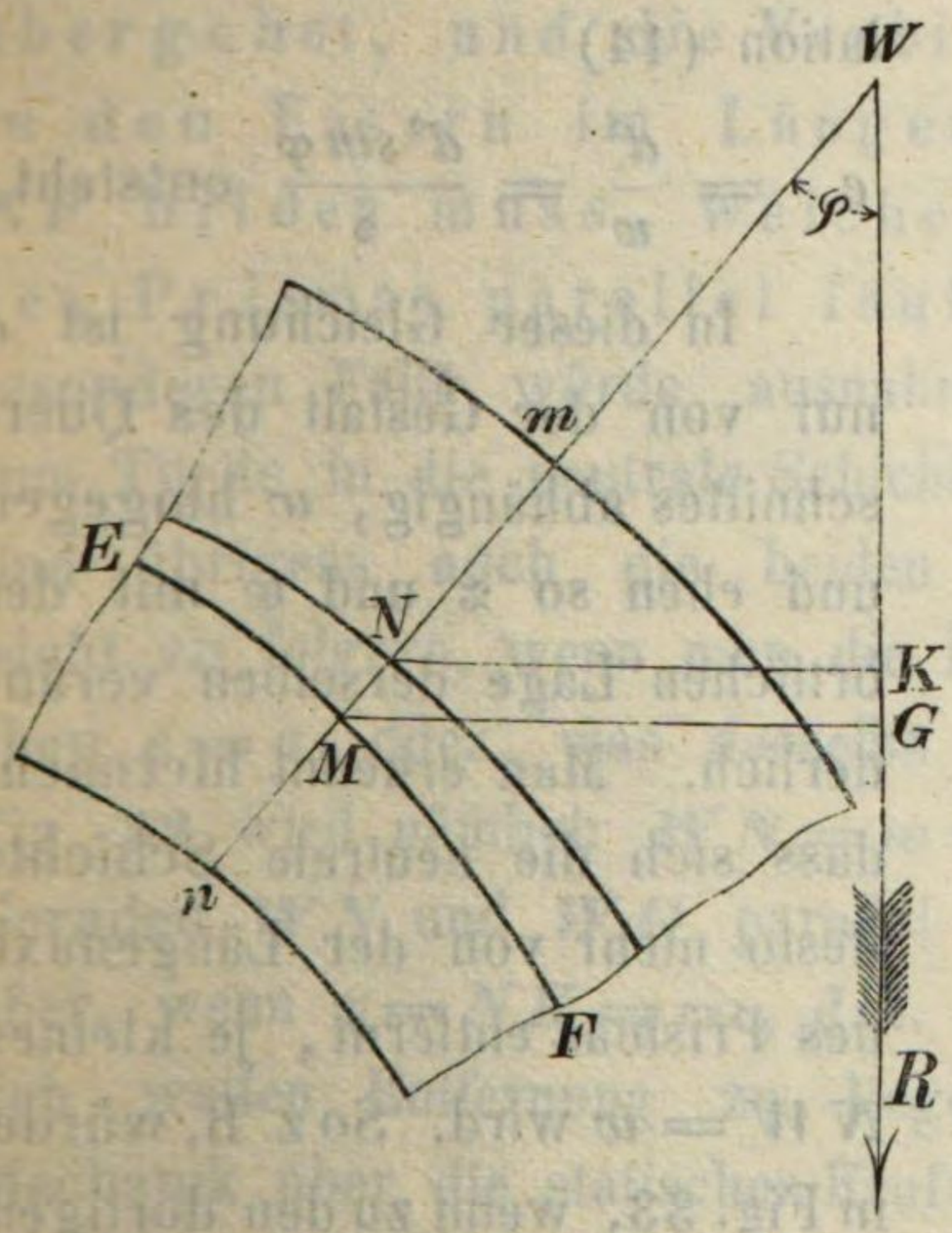
Fig. 31.



zwischen den Normalen $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ liegt, die Resultirende sowohl diesseits als jenseits von $\alpha\beta$, $R = Q - Q = o$, wenn man von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, und es würde unter dieser Voraussetzung die neutrale Schichte $N_1 N N_2$ in der ganzen Strecke zwischen N_1 und N_2 stets durch die Schwerpuncte der daselbst vorkommenden Querschnitte gehen, also die Längenaxe des Prismas in sich enthalten.

3. Für jeden anders gelegenen Querschnitt mn (Fig. 32), wo weder $R = o$ noch $\varphi = o$ wird, geht die neutrale Schichte EMF durch einen Punct M, welcher zwischen dem Schwerpuncte N des Querschnittes und der am meisten gepressten Faserschichte in n derart liegt, dass man für die Entfernung $MN = e$ die eben so einfache, wie merkwürdige Relation

Fig. 32.



$$e = \frac{d^2}{w} = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} \quad \ldots \quad (44)$$

hat, wenn $NW = w$, $NK = z$ und d eine von der Querschnittsform abhängige übrigens constante Grösse ist. Es folgt nämlich aus den Gleichungen (42) und (43) $e = \frac{\varrho R \sin\varphi}{fm}$ und $\frac{R\varrho}{m} = \frac{T}{Z}$, hieraus aber $e = \frac{T \sin\varphi}{fZ}$.

Man beachte nun, dass T das Trägheitsmoment der Fläche f in Bezug auf die durch M ausserhalb des Schwerpunctes N gehende Drehungsaxe ist, und dass man nach einem bekannten Satze der Mechanik $T = t + fe^2$ setzen kann, wo t das Trägheitsmoment dieser Fläche in Bezug auf die durch den Schwerpunct N mit der vorigen parallel gezogene Axe vorstellt. Man erwäge ferner, dass im Geiste der Gleichung (36) t die Form $t = fd^2$ annimmt, wobei d bezüglich des Trägheitsmomentes t dieselbe Bedeutung hat, wie in jener Gleichung (36) E bezüglich des dortigen Trägheitsmomentes T.

Man berücksichtige endlich, dass unter Beibehaltung der bisher gewählten Bezeichnungen

$$NW = w = \frac{NK}{\sin\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi} \text{ und}$$

$$WM = w + e = \frac{MG}{\sin\varphi} = \frac{Z}{\sin\varphi},$$

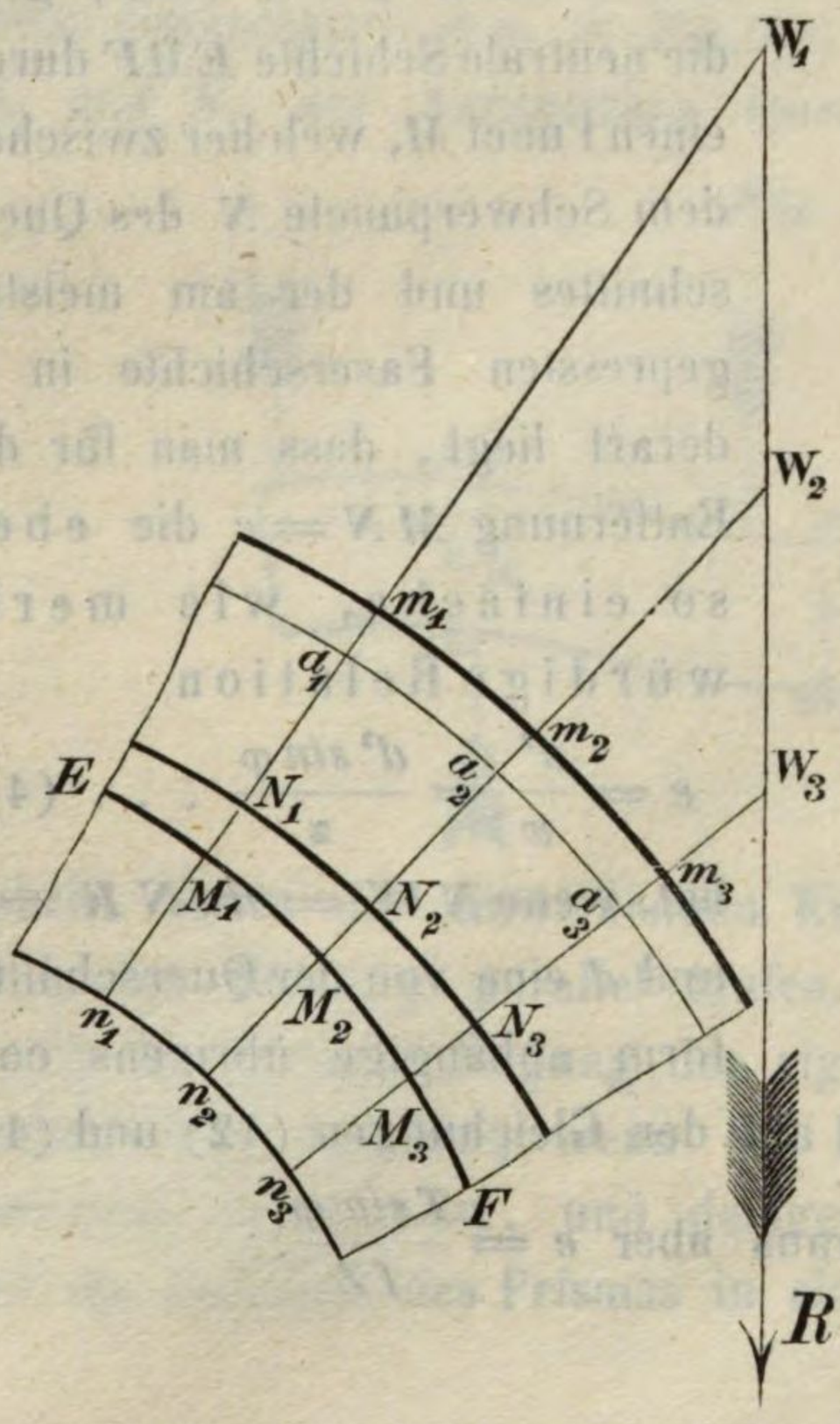
demgemäss aber

$$e = \frac{T.\sin\varphi}{fZ} = \frac{\frac{T}{f}}{\frac{Z}{\sin\varphi}} = \frac{d^2 + e^2}{w + e} \text{ wird,}$$

woraus die zuvor behauptete Relation (44)

$$e = \frac{d^2}{w} = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} \text{ entsteht.}$$

Fig. 33.



In dieser Gleichung ist d nur von der Gestalt des Querschnittes abhängig, w hingegen und eben so z und φ mit der örtlichen Lage derselben veränderlich. Man erkennt hiernach, dass sich die neutrale Schichte desto mehr von der Längenaxe des Prismas entfernt, je kleiner $NW = w$ wird. So z. B. würde in Fig. 33, wenn zu den dortigen Querschnitten $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ stets dieselbe Resultirende R gehörte, die neutrale Schichte EF durch M_1, M_2, M_3 gehen, wobei

$$M_1 N_1 = \frac{d^2}{W_1 N_1}, M_2 N_2 = \frac{d^2}{W_2 N_2}, M_3 N_3 = \frac{d^2}{W_3 N_3},$$

daher auch

$$M_1 N_1 : M_2 N_2 : M_3 N_3 = \frac{1}{W_1 N_1} : \frac{1}{W_2 N_2} : \frac{1}{W_3 N_3}$$

und weiters $M_1 N_1 < M_2 N_2 < M_3 N_3$ wäre, wenn, wie nach der Zeichnung, $W_1 N_1 > W_2 N_2 > W_3 N_3$ ist.

Ueberdiess hat man nach der Gleichung (44) die Proportion $e : d = d : w$, daher d als die mittlere geometrische Proportionale zwischen e und w anzusehen, und es werden in dem Falle, wenn man $a_1 N_1 = a_2 N_2 = a_3 N_3 = d$ macht, die entsprechenden Verhältnisse

$$M_1 N_1 : a_1 N_1 = a_1 N_1 : W_1 N_1,$$
$$M_2 N_2 : a_2 N_2 = a_2 N_2 : W_2 N_2,$$
$$M_3 N_3 : a_3 N_3 = a_3 N_3 : W_3 N_3$$

anschaulich. Aus diesen Bemerkungen leuchtet ein, dass im Allgemeinen die Neutralität der Fasern nicht durch die ganze Länge des Prismas in einer und derselben Faserschichte vorhanden ist, sondern successive von einer Faserschichte auf die nächstgelegene übergehet, und die Verbindung aller neutralen Orte in den Fasern im Längendurchschnitte eine Curve EF bilden muss, welche nicht mit der Längenaxe des Prismas parallel läuft. Nur in dem ad 2 erwähnten besonderen Falle würde ausnahmsweise die erwähnte Längenaxe zum Theile in die neutrale Schichte fallen. Aus der Gleichung (44) sind übrigens auch die beiden ad 1 und 2 besprochenen Fälle leicht zu folgern, wenn man die Bedingungen untersucht, unter welchen $e = o$, oder, was dasselbe ist, $w = \infty$ werden kann. Nach Fig. 32 wird nämlich $WN = w = \infty$, wenn entweder die beiden Geraden WN und WG parallel laufen, also $\varphi = o$ wäre, oder aber, wenn $z = NK = \infty$, d. h. die Resultirende R in einer unendlich weiten Entfernung zu liegen käme. Nach den Lehren der Mechanik über die statischen Kraftmomente tritt bekanntlich das letzte für $R = o$ wie etwa in Fig. 31 — ein.

4. In demjenigen Querschnitte $m_1 n_1$ (Fig. 34), wo $e = \frac{d^2}{w} = N_1 n_1$ wird, liegen die neutralen Orte in der Kante n_1 und in seinen Fasern

sind durchaus Spannungen vorhanden. Geht aber die Richtung der Resultirenden R durch den Schwerpunct N_2 des betreffenden Quer-

Fig. 34.

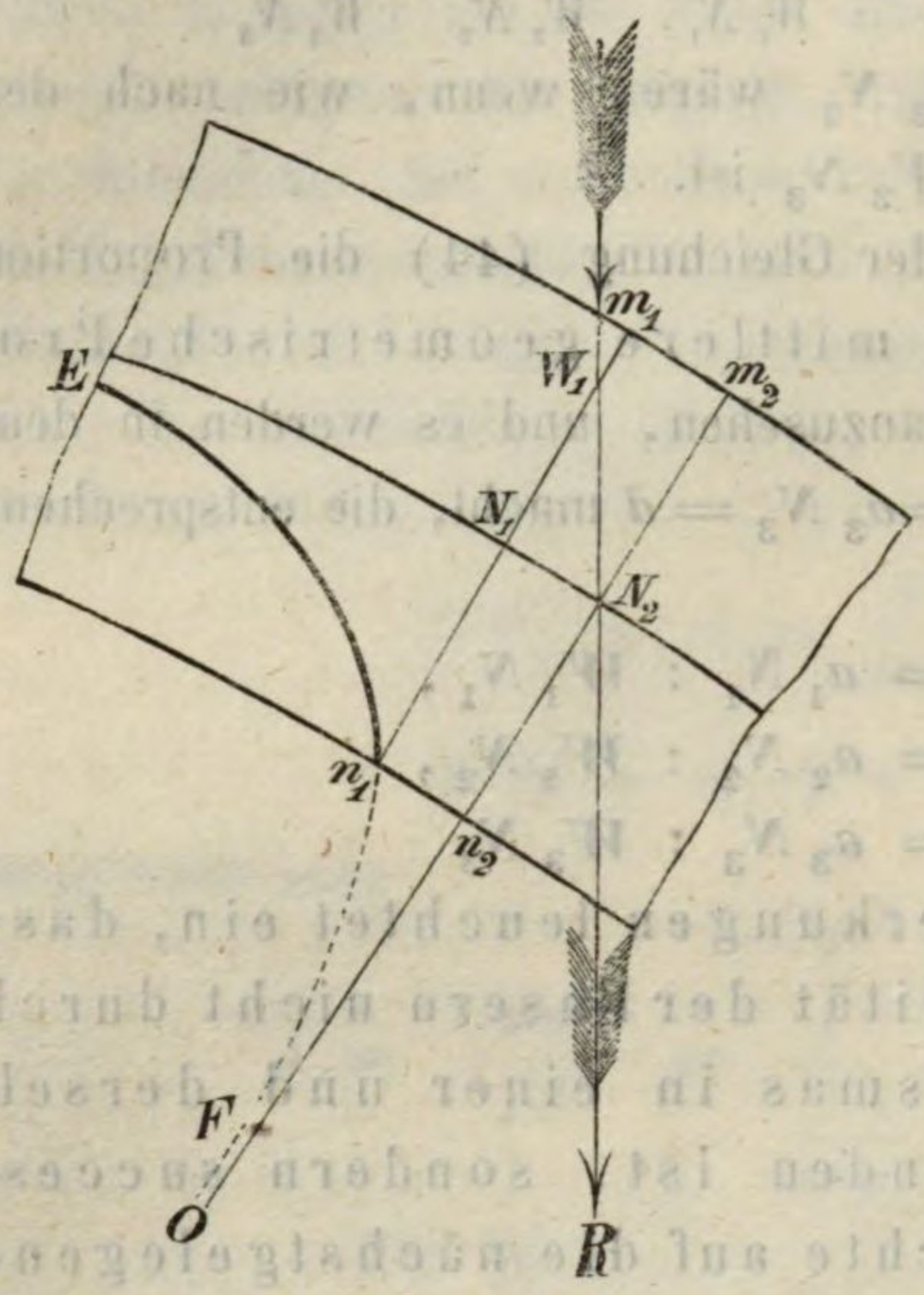
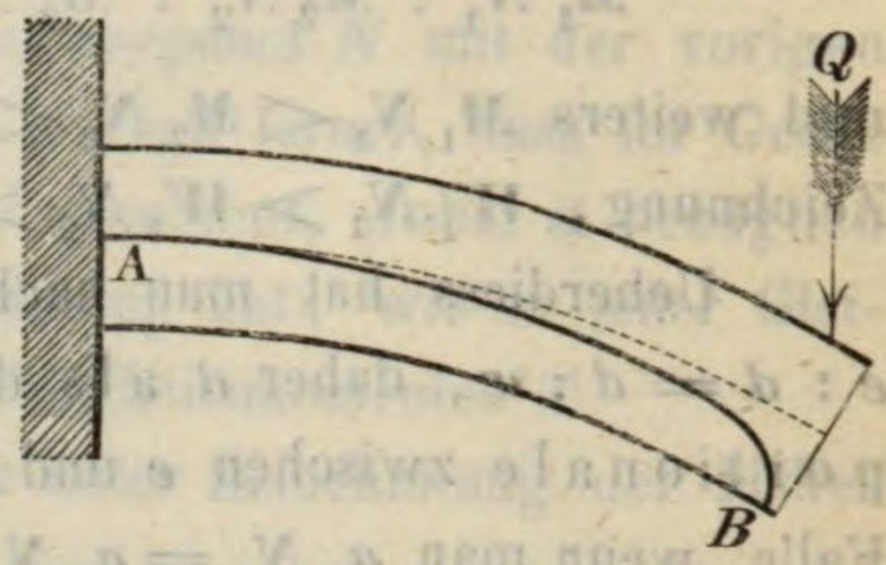
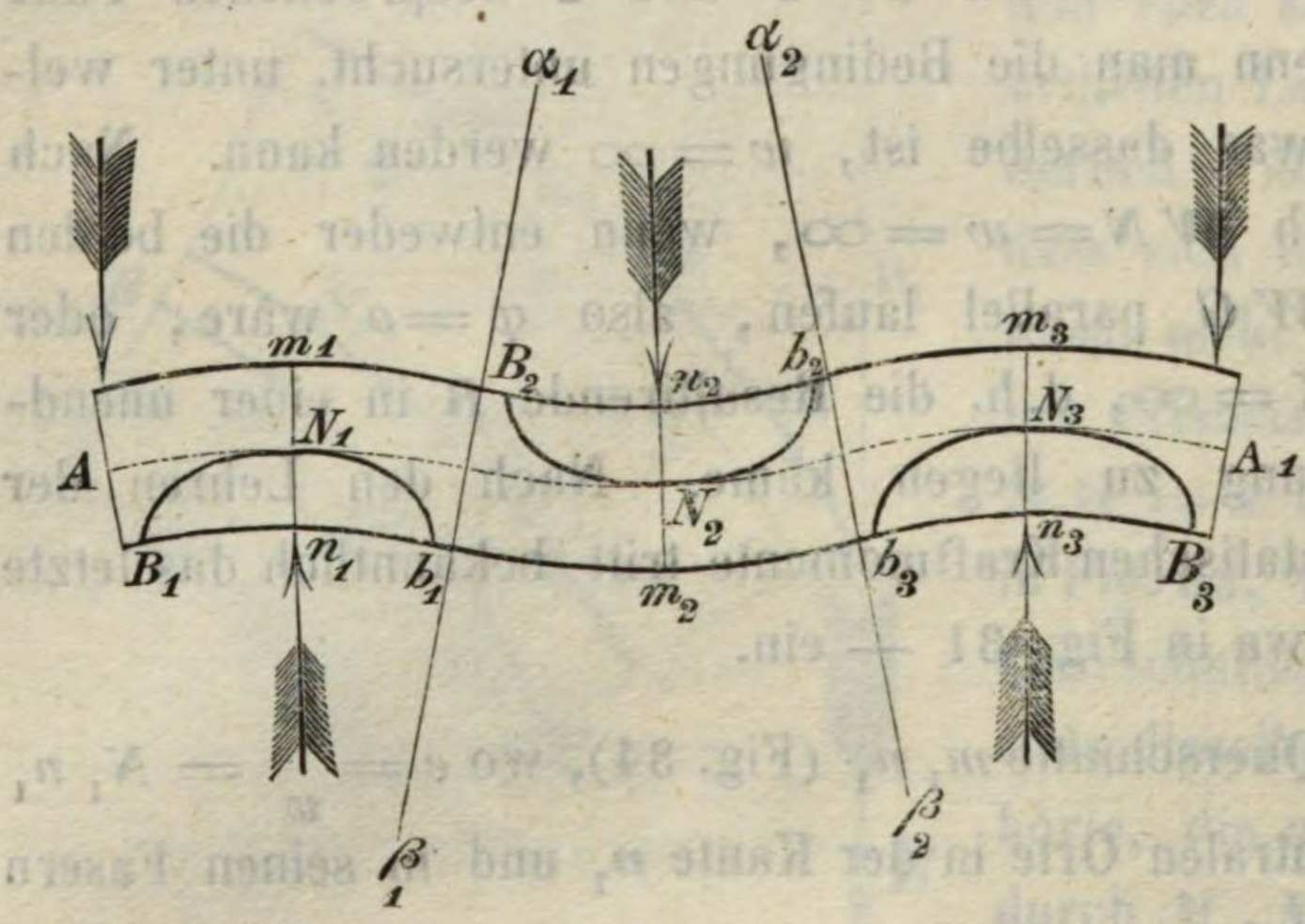


Fig. 35.



schnittes $m_2 n_2$ selbst, so ist wegen $w = z = o$ sodann $e = \infty$, was anzeigt, dass die Normale $N_2 O$ eine Assymtote zu der Curve $E n_1 F$ bildet, wenn man nämlich diese letztere auch ausserhalb des Prismas fortsetzen wollte. Aus diesem Grunde können die zwischen den Querschnitten $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ gelegenen Fasern eigentlich keine neutralen Orte enthalten, sondern müssen sämmtlich ausgedehnt werden. Es ist jetzt nicht schwer einzusehen, dass z. B. bei dem in Fig. 35 dargestellten Prisma, welches an einem Ende festgehalten und am andern Ende belastet wäre, die neutrale Schichte in dem Längendurchschnitte der Wesenheit nach

Fig. 36.

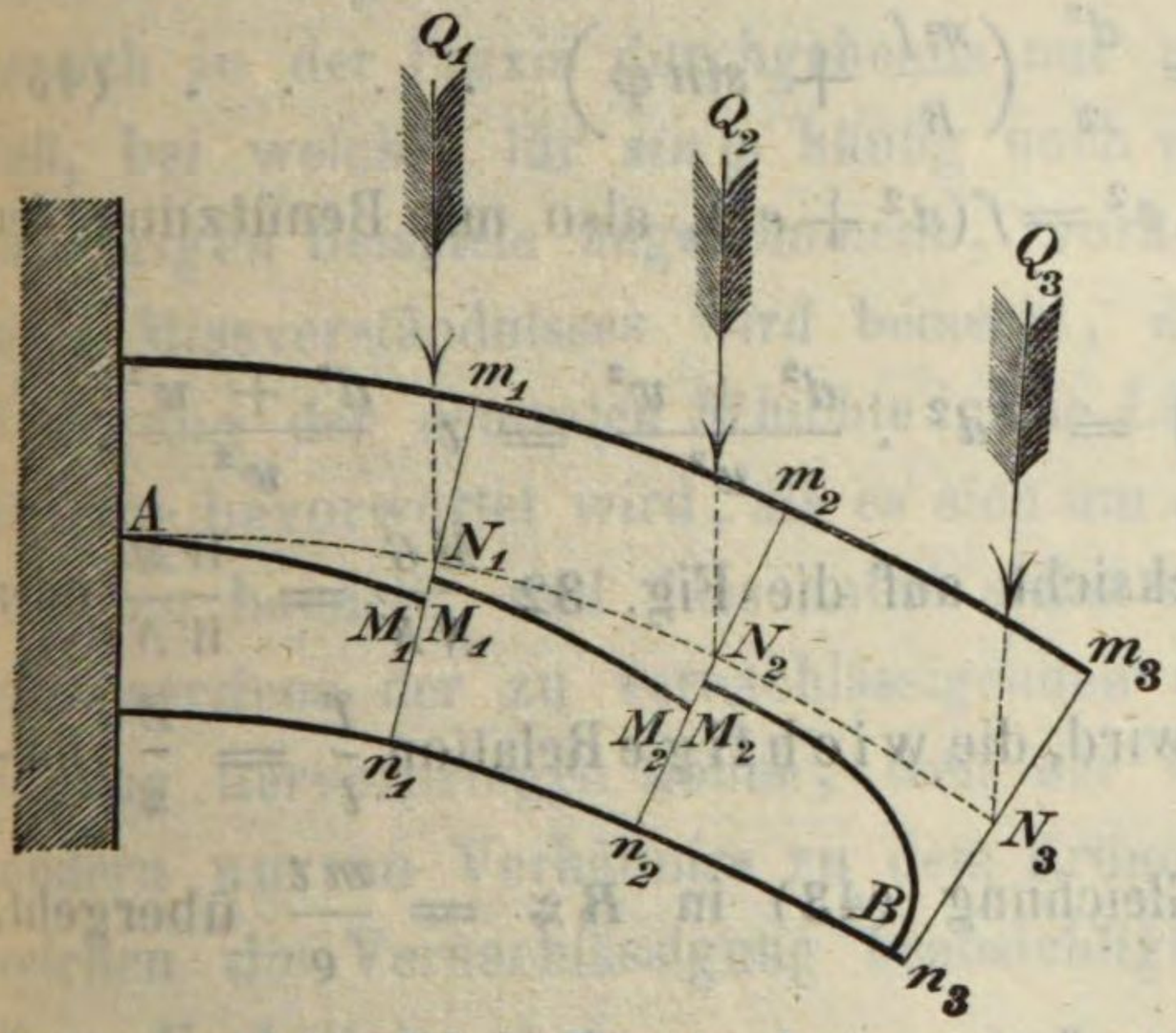


mittelst der Curve AB darzustellen sei. Eben so leuchtet ein, dass in dem mittelst der Fig. 36 dargestellten Falle die neutrale Schichte aus den abgesonderten krummen Flächen $B_1 N_1 b_1$, $B_2 N_2 b_2$ und $B_3 N_3 b_3$ bestehen werde, wenn

die Normalen $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ zu denjenigen Querschnitten gehören, in welchen die Längenaxe des Prismas einen unendlich grossen Krümmungshalbmesser besitzt.

5. Da in der Gleichung (44) $e = \frac{d^2}{w}$ die Grösse w von der jeweiligen Lage des Querschnittes und der dazu gehörigen Resultirenden R abhängt, so ist die neutrale Schichte mit der continuirlichen oder discontinuirlichen Veränderung dieser Resultirenden gleichfalls continuirlich oder discontinuirlich. Auf die zu beachtende Veränderlichkeit der Resultirenden wurde bereits mittelst Fig. 23 ad §. 43 aufmerksam gemacht. Wäre z. B. Fig. 37 ein Prisma in dem Querschnitte in A festgehalten, und von den Kräften Q_1, Q_2 und Q_3 in Anspruch genommen, so bestände die neutrale Schichte aus den 3 abgesonderten Theilen $A M_1$, $M_1 M_2$ und $M_2 B$, da sich in diesem Falle die Grösse w und mit ihr auch e bei den 2 Querschnitten $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ nicht successive, sondern sprungweise ändern würde. Diese Eigenschaft wird auch durch die Berücksichtigung des eigenen Gewichtes nicht beirrt.

Fig 37.



§. 50.

Die Untersuchungen über das Verhalten eines materiellen Prismas gegen Biegung sollen von jetzt an in 2 Theile zerfallen, je nachdem es sich um die Bestimmung der Formveränderung desselben, oder um die der Anspruchsnahme des Materiales handelt.

Formveränderung der Längenaxe. Biegungscurven. Grösse der Biegung.

§. 51.

Erklärung. Die Längenaxe des Prismas, welche vor der Biegung geradlinig war, ist nach derselben eine krumme Linie, welche

man auch Biegungscurve nennt. Die grösste Abweichung dieser Curve von der ursprünglichen geraden Richtung heisst die Grösse der Biegung oder auch kurzweg die Biegung des Prismas.

§. 52.

Hauptsätze für die Form der Biegungscurven.

Indem man auf die Gleichungen für die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' im §. 48 zurückgeht, findet man unter Beibehaltung der gewählten Bezeichnungen folgende Hauptsätze:

1. Es ist für jede beliebige Stelle in der Längenaxe der Krümmungshalbmesser

$$\varrho' = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Denn man hat, $T = t + f.e^2 = f(d^2 + e^2)$, also mit Benützung der Gleichung (44) auch,

$$T = f\left(d^2 + \frac{d^4}{w^2}\right) = fd^2 \cdot \frac{d^2 + w^2}{w^2} = t \cdot \frac{d^2 + w^2}{w^2},$$

und da überdiess mit Rücksicht auf die Fig. 32 $\frac{MG}{NK} = \frac{WM}{WN}$ oder $\frac{Z}{z} = \frac{w + e}{w} = \frac{d^2 + w^2}{w^2}$ wird, die wichtige Relation $\frac{T}{t} = \frac{Z}{z}$, mittelst welcher sofort die Gleichung (43) in $Rz = \frac{mt}{\varrho}$ übergeht, hieraus aber $\varrho = \frac{mt}{Rz}$ und sofort wegen $\varrho' = \varrho + e$ die oben angeführte Relation

$$\varrho' = \frac{mt}{Rz} + \frac{d^2 \sin\varphi}{z} = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right)$$

folgt. Zu Folge dieser Gleichung nimmt der Krümmungshalbmesser für die Längenaxe des Prismas mit der Grösse d^2, dem Modul m und der Querschnittsfläche f zu, hingegen mit der Resultirenden R und ihrem Hebelsarme z in Bezug auf den Schwerpunct des Querschnittes ab. Dabei ist übrigens z von dem in Bezug auf die neutrale Axe vorhandenen Hebelsarme Z wohl zu unterscheiden, indem nach Fig. 32 $MG = Z$ und $NK = z$, weiters aber $Z - z = \frac{e}{\sin\varphi}$ ist.

In der Regel ist $\frac{mf}{R}$ gegen *sin* φ so gross, dass man sich als Annäherung zur Wahrheit wird erlauben können

$$\varrho' = \frac{d^2 mf}{Rz} = \frac{mt}{Rz}, \text{ also } \varrho' = \varrho \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

zu setzen, oder mit andern Worten, die neutrale Schichte durch die Längenaxe des Prismas zu legen. Wäre z. B. für eine schmiedeeiserne Schiene $m = 250000$, $f = 10 \square''$, $R = 25$ Ztr. und $sin\ \varphi = \frac{1}{100}$, so hätte man $\frac{mf}{R} = 100000$ und hienach $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{10000001}{10000000}$, welcher Bruch ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums als die Einheit selbst angenommen werden könnte. Dieses genäherte Verfahren kann in analogen Fällen um so unbedenklicher eingeführt werden, als es sich in der Praxis durchgehends nur um geringe Biegungen handelt, bei welchen für *sin* φ häufig noch viel kleinere Werthe, als der im vorigen Beispiele angenommene, vorkommen. Zur Vermeidung eines Missverständnisses wird bemerkt, dass hier die hypothetische Verlegung der neutralen Schichte in die Längenaxe des Prismas nur in so ferne bevorwortet wird, als es sich um die Formbestimmung dieser letzteren handelt, und dass dabei selbst der Umstand des Unendlichgrosswerdens der zu vernachlässigenden Grösse e keine wesentliche Störung hervorbringen könne, weil der Werth von e nicht absolut, sondern nur im Verhältniss zu dem Krümmungshalbmesser ϱ', gegen welchen die Vernachlässigung beabsichtigt wird, zu betrachten ist, dieses Verhältniss aber

$$\frac{e}{\varrho'} = \frac{\frac{d^2}{z} sin\ \varphi}{\frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + sin\ \varphi\right)} = \frac{sin\ \varphi}{\frac{mf}{R} + sin\ \varphi}$$

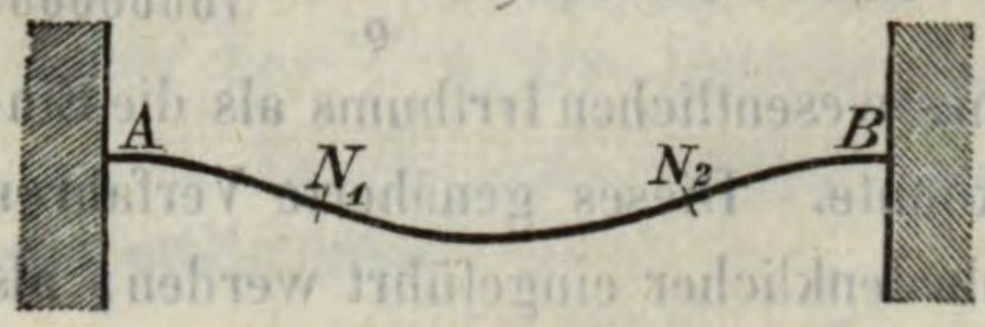
auch für unendlich grosse Werthe von e und ϱ, bei geringen Biegungen in der Regel ausserordentlich klein erscheint.

2. Für $z = o$ werden die beiden Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' gleichzeitig mit der Grösse e unendlich gross, was mit der vorigen Schlussbemerkung, so wie mit dem §. 49 ad 4 in Uebereinstimmung steht.

3. Das Zeichen des statischen Kraftmomentes Rz entscheidet die Richtung des betreffenden Krümmungshalbmessers. In den Figuren

ist daher die Richtung der Krümmungshalbmesser nach abwärts als die positive, nach aufwärts aber als die negative anzusehen. Der Uebergang aus der einen Richtung in die andere wird durch die ad 2 erwähnten unendlich grossen Krümmungshalbmesser angebahnt. Aus diesem Grunde nennt man die Puncte der Längenaxe, wo ein solcher Uebergang stattfindet, die Wendepuncte der Biegungscurve. So z. B. wären in Fig. 38 für die Längenaxe des Prismas AB die Krümmungshalbmesser zwischen A und N_1, so wie zwischen B und N_2 positiv, hingegen zwischen N_1 und N_2 negativ, und diese letztgenannten beiden Puncte die Wendepuncte, wenn daselbst die Krümmungshalbmesser $\pm \infty$ werden. Auch leuchtet ein, dass für diese Stellen das statische Moment Rz verschwinden muss.

Fig 38.



4. Wird $R = o$, so fällt nach §. 49 ad 2 der betreffende Theil der neutralen Schichte $N_1 N_2$ (Fig 31) mit der Längenaxe zusammen, und die Form dieses Theiles im Längendurchschnitte ist insbesondere ein Kreisbogen. Die Richtigkeit dieses Resultates erkennt man auch dadurch, wenn man beachtet, dass in der betreffenden Strecke mit $R = o$ gleichzeitig $z = \infty$ wird, und überdiess das statische Moment Rz nicht variabel ist, sondern einen gewissen constanten Werth annimmt *), in Folge dessen die Krümmungshalbmesser des bezüglichen Theiles der Längenaxe gleichfalls constant sein, also einem Kreisbogen zugehören müssen.

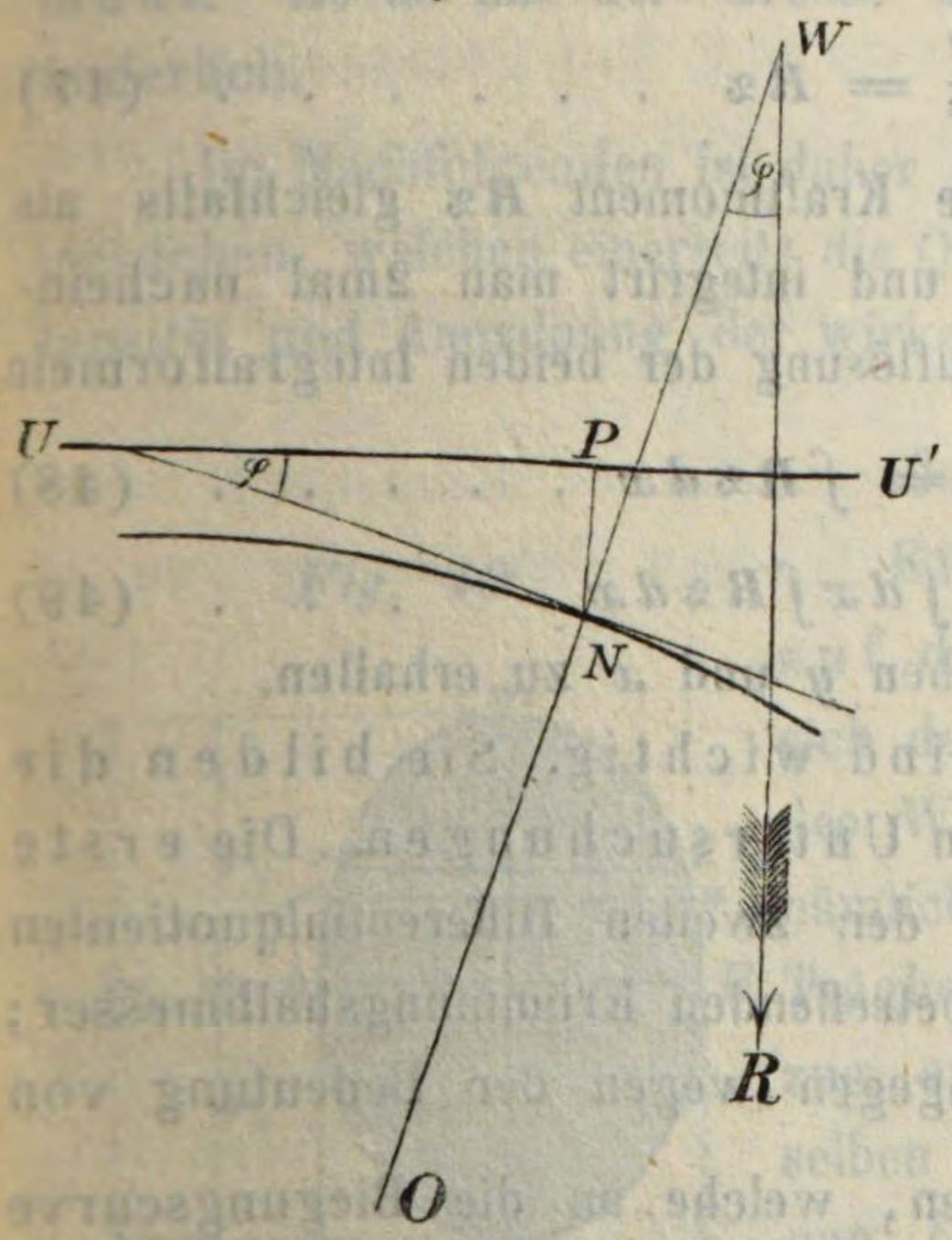
5. Der Werth des Krümmungshalbmessers ϱ' ist mit der continuirlichen oder discontinuirlichen Veränderung von e gleichfalls continuirlich oder discontinuirlich. Diese Schlussfolgerung darf jedoch nicht auf die Form der gekrümmten Längenaxe ausgedehnt werden. Dieselbe muss vielmehr eine continuirliche

---

*) Es ist nämlich allgemein $d.Rz = Rdz + zdR$. Soll zuerst R für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Querschnitten sich nicht ändern, also $dR = o$ sein, so entsteht $d.Rz = Rdz$. Ist überdiess $R = o$, so hat man $d.Rz = o$, sofort aber $Rz =$ Constanz, und $z = \infty$, wenn anders das Moment Rz nicht selbst Null ist.

Curve bilden, und die sprungweise Veränderung des Krümmungshalbmessers ϱ' beirrt diese Eigenschaft hier eben so wenig, wie bei Korblinien, welche aus mehreren Kreisbögen von verschiedenen Radien zusammengesetzt, demungeachtet aber im Ganzen continuirlich sind. Es handelt sich nämlich dabei nur darum, dass an den Stellen, wo der Krümmungshalbmesser sich sprungweise ändert, die zusammenstossenden Curventheile eine gemeinschaftliche Tangente besitzen. Was hingegen den Werth des Krümmungshalbmessers ϱ für die neutralen Fasern betrifft, so ist derselbe stets continuirlich, weil in dem Ausdrucke $\varrho = \frac{mt}{Rz}$ das statische Kraftmoment Rz bei dem successiven Fortschreiten von einem Querschnitte zu dem nächstgelegenen keiner plötzlichen Veränderung unterliegt, obgleich eine solche in Beziehung auf die einzelnen Factoren R und z eintreten kann. Es versteht sich übrigens von selbst, dass von der Verschiedenartigkeit des Verhaltens der Werthe von ϱ und ϱ' in so ferne abgesehen werden dürfe, als nach der Bemerkung ad 1 dieses §. die Verwechslung der beiden Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' ohne Nachtheil gestattet ist.

Fig. 39.



6. Die Gleichung der Biegungscurve kann auf folgende Art aufgefunden werden: Man beziehe die fragliche Curve (Fig. 39) auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Abcissenaxe UU' in die ursprüngliche geradlinige Längenaxe des Prismas gelegt wird, nehme in einem Puncte U dieser letzteren den Ursprung der Coordinaten an, und bezeichne die Richtung nach abwärts als die positive für die Ordinaten. Sei ferner für einen beliebig gewählten Punct N der krummlinigen Längenaxe $UP = x$, $NP = y$ und der

Krümmungshalbmesser $NO = \varrho'$, so hat man zunächst nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\varrho' = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wobei $\frac{dy}{dx} = tang.\,\varphi$, und φ der Neigungswinkel ist, welchen die in dem Puncte N gezogene Tangente mit der Abscissenaxe bildet. Denselben Winkel schliessen offenbar auch die Normale des gewählten Punctes N und die Richtung der Resultirenden R ein. Wie schon ad 1 bemerkt, handelt es sich in den in der Ausübung vorkommenden Fällen nur um geringe Biegungen. Werden daher in dieser Ueberzeugung bloss sehr kleine Werthe von φ zugelassen, so kann man als Annäherung zur Wahrheit $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$, also

$$\varrho' = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ d. h } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$$

setzen, und wegen der gleichzeitig vorhandenen genäherten Relation (46) sofort

$$mt \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Rz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

annehmen. Ist nun das statische Kraftmoment Rz gleichfalls als eine Function von x dargestellt, und integrirt man 2mal nacheinander, so hat man es mit der Auflösung der beiden Integralformeln

$$mt \cdot \frac{dy}{dx} = \int Rz\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\text{und } mt\,y = \int dx \int Rz\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

zu thun, um die Gleichung zwischen y und x zu erhalten.

Diese 3 Gleichungen sind wichtig. Sie bilden die Grundlage zu den weiteren Untersuchungen. Die erste Gleichung (47) bezieht sich auf den zweiten Differentialquotienten von y nach x, so wie auf den betreffenden Krümmungshalbmesser; die zweite Gleichung (48) hingegen wegen der Bedeutung von $\frac{dy}{dx}$ auf die Richtung der Tangenten, welche an die Biegungscurve gezogen werden, während die dritte Gleichung (49) als die der

Curve selbst die weiters nöthige Aufklärung über die entstehende Formveränderung der Längenaxe gibt. Es ist indess zu erinnern, dass sämmtliche 3 Gleichungen nur für sehr kleine Biegungen, und wenn hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, zulässig sind, gleichwohl aber in so ferne genügend erscheinen, als es sich in der Praxis gerade um die Erfüllung dieser Bedingungen handelt.

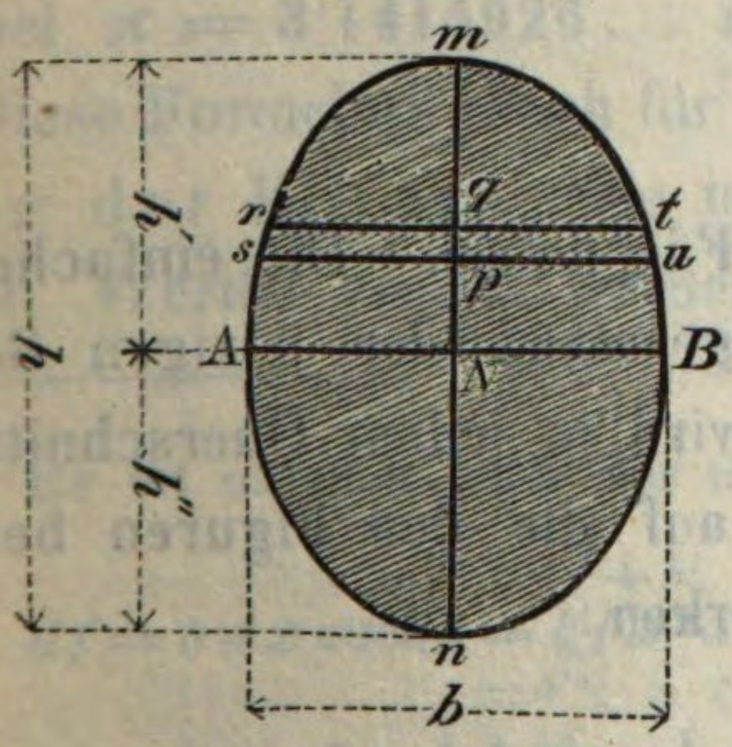
§. 53.

Grösse der Biegung. Biegungsmoment. Die Grösse der Biegung ist die Maximal-Ordinate, welche zufolge der Gleichung (49) in der Biegungscurve stattfinden kann. Dieser grösste Werth ist jedoch nur in numerischer Hinsicht, nämlich abgesehen von dem algebraischen Werthszeichen zu verstehen. Da aus der citirten Gleichung allgemein $y = \frac{\int dx \int R z dx}{mt}$ folgt, so steht die Grösse der Biegung im umgekehrten Verhältnisse mit dem Producte aus dem Modul m und dem mit t bezeichneten Trägheitsmomente, und hängt überdiess von der Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte ab. Das Product mt nennen einige Schriftsteller auch das **Biegungsmoment.** Es ist mit der Grösse und Gestalt des Querschnittes veränderlich.

Im Nachfolgenden ist daher der Einfluss auf die Biegung zu untersuchen, welchen einerseits die Querschnitte, anderseits aber die Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte haben.

§. 54.

Fig. 40.



Einfluss des Querschnittes auf die Biegung. Wie erwähnt, macht sich der Einfluss des Querschnittes mittelst des Werthes t geltend. Dieser Werth ist nämlich der Rechnungsoperation nach das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch den Schwerpunct desselben zu ziehende neutrale Axe. Es sei nun (Fig. 40) der in Betracht stehende Querschnitt, N sein Schwerpunct und AB

die bezügliche durch diesem gezogene Axe. Im Uebrigen beachte man die cotirten Dimensionen, so wie die Bezeichnungen in Fig. 24 ad §. 44, nur mit dem Unterschiede, dass gegenwärtig die Grösse e ausser Betracht bleibt. Es leuchtet ein, dass mit Rücksicht auf die positiven und negativen Abscissen x das Trägheitsmoment t sich ausdrücken lässt durch die Formel

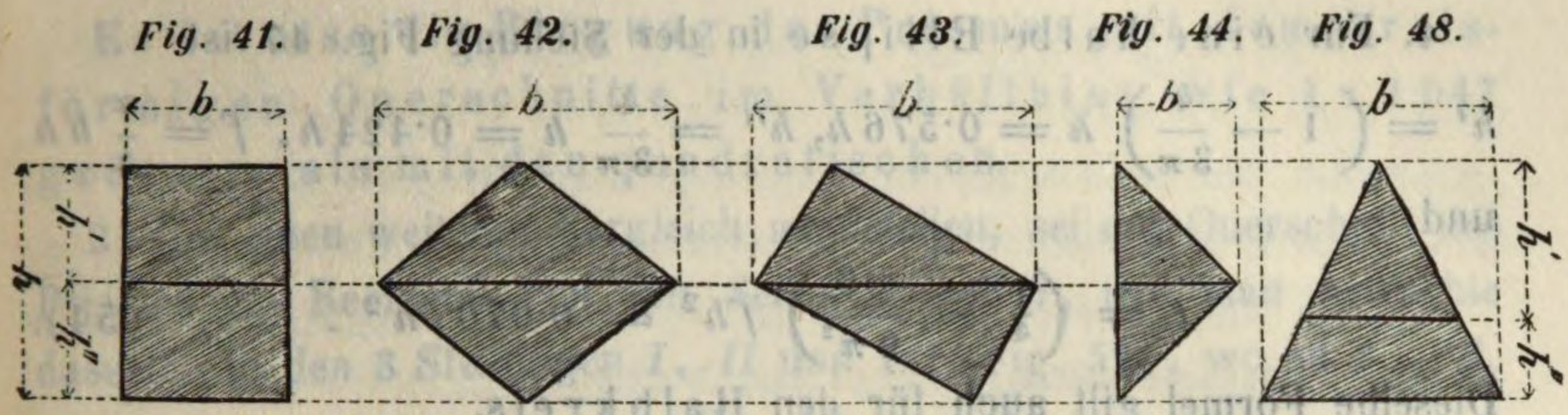
$$t = \int_{-h''}^{+h'} x^2 \, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

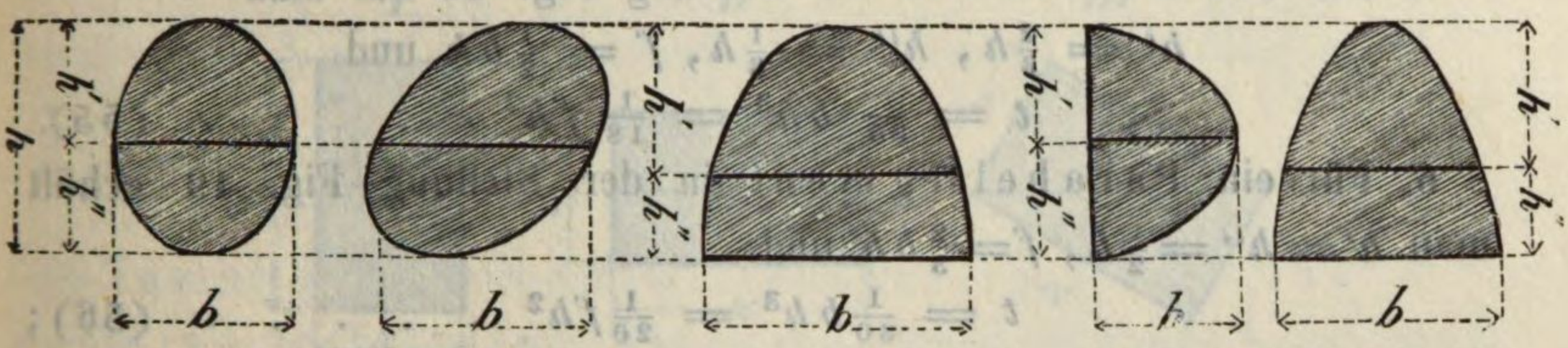
und dass man nur noch die Gleichung der Umfangslinie des Querschnittes zu kennen braucht, um df als Function von x auszudrücken und sofort das obige Integrale zu bestimmen. Wie übrigens auch der Querschnitt geformt sein möge, so lässt sich doch, wie schon früher erwähnt, t stets auf die Form $t = fd^2$ bringen, wo d einem gewissen Theile der Höhendimension gleich ist. Man kann daher $d^2 = ch^2$, weiters aber auch die Fläche $f = c' bh$ setzen, wo c und c' nur von der Querschnittsform abhängige Zahlen sind, und b der Cotirung gemäss als Breite des Querschnittes anzusehen ist. In Folge dessen wird $t = cfh^2 = cc' . bh^3$, also ein Ausdruck, welcher bei analogen Querschnittsfiguren mit der Breite b im einfachen und mit der Höhe h im cubischen Verhältnisse wächst. Die Biegungen bei prismatischen Körpern mit ähnlichen Querschnitten stehen demnach unter sonst gleichen Umständen im umgekehrten Verhältnisse mit den 4ten Potenzen der homologen Querschnittsseiten.

Auf die Trägheitsmomente specieller Figuren übergehend, wird es vorläufig genügen, bloss die wesentlichsten einfachen Figuren zu besprechen.

§. 55.

Trägheitsmoment einfacher Figuren. Die einfachen Figuren 41 bis inclusive 50 sind der Gegenstand der jetzigen Betrachtung. Die Lage der neutralen Axe wird in jedem Querschnitte horizontal vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die den Figuren beigefügten Coten ist nun Folgendes zu bemerken:





1. Für ein Rechteck in der Stellung Fig. 41 ist wegen $h = h' = \frac{1}{2} h$ und $f = b h$,

$$t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)\ *)$$

Dieselbe Formel gilt auch für das Quadrat.

2. Für ein Rhombus in der Stellung Fig 42 ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, $f = \frac{1}{2} b h$ und

$$t = \frac{1}{48} b h^3 = \frac{1}{24} f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Dieselbe Formel gilt auch für die Figuren 43 und 44, wenn hiebei gleichfalls $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ ist. Man beachte nämlich, dass diese Figuren in ein Rhombus verwandelt werden können, wenn man die bezüglichen Flächenelemente parallel zur Drehungsaxe verschiebt, ohne hiedurch das Trägheitsmoment t zu verändern.

3. Für eine Ellipse Fig. 45 hat man $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, $f = \frac{\pi}{4} b h$ und

$$t = \frac{\pi}{64} b h^3 = \frac{1}{16} f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53),$$

wobei $\pi = 3{\cdot}1415926 \ldots$ ist.

Diese Formel gilt auch für den Kreis, so wie für eine andere Stellung der Ellipse, wie in Fig 46, wenn nur statt f und h die geeigneten Werthe gesetzt werden.

---

*) Es ist nämlich nach der Gleichung (50) allgemein $t = \int_{-h''}^{+h'} x^2 \, df$, daher wegen $df = b \, dx$ auch $t = b \int_{-h''}^{+h'} x^2 \, dx = \frac{b}{3} (h'^3 + h''^3)$, und sofort für $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, wie oben, $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$.

4. Für eine halbe Ellipse in der Stellung Fig. 47 ist

$$h' = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) h = 0{\cdot}576\,h,\ h'' = \frac{4}{3\pi}\ h = 0{\cdot}424\,h,\ f = \frac{\pi}{4}\,b\,h$$

und

$$t = \left(\tfrac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) f h^2 = 0{\cdot}070\,f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Halbkreis.

5. Für ein Dreieck in der Stellung Fig. 48 hat man

$$h' = \tfrac{2}{3}h,\ h'' = \tfrac{1}{3}h,\ f = \tfrac{1}{2}b\,h \text{ und}$$

$$t = \tfrac{1}{36}\ b h^3 = \tfrac{1}{18}\ f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

6. Für ein Parabelsegment in der Stellung Fig. 49 erhält man $h' = h'' = \frac{1}{2}h$, $f = \frac{2}{3}b\,h$ und

$$t = \tfrac{1}{30}\,b h^3 = \tfrac{1}{20} f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56);$$

in der Stellung Fig. 50 aber $h' = \frac{3}{5}h$, $h'' = \frac{2}{5}h$, $f = \frac{2}{3}b\,h$ und

$$t = \tfrac{8}{175}\ b h^3 = \tfrac{12}{175}\ f h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57),$$

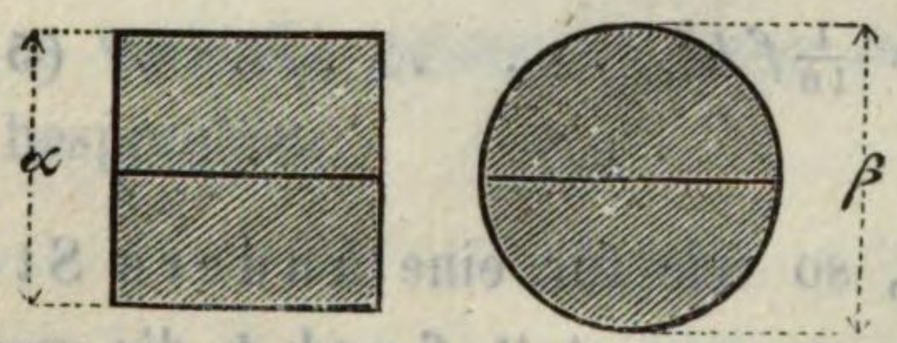
wobei die Dimension h im ersten Falle die Sehne, im zweiten Falle aber die Höhe des parabolischen Segmentes vorstellt.

§. 56.

Folgerungen. Die im vorigen §. gegebenen Formeln machen viele interessante Resultate anschaulich. Es werden hievon einige angegeben.

1. Will man z. B. die Biegungen vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten *I* und *II* (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen erleiden, und bezeichnet man diese Biegungen mit δ_I und δ_{II}, ferner die Seite des Quadrates mit α und den Durchmesser des Kreises mit β, so hat man

Fig. 51.



für das Quadrat $h = a$, $f = \alpha^2$ und nach Formel (51) ... $t_I = \frac{1}{12} f \alpha^2$,

für den Kreis aber $h = \beta$, $f = \frac{\pi}{4}\beta^2$ und nach Formel (53) $t_{II} = \frac{1}{16} f \beta^2$;

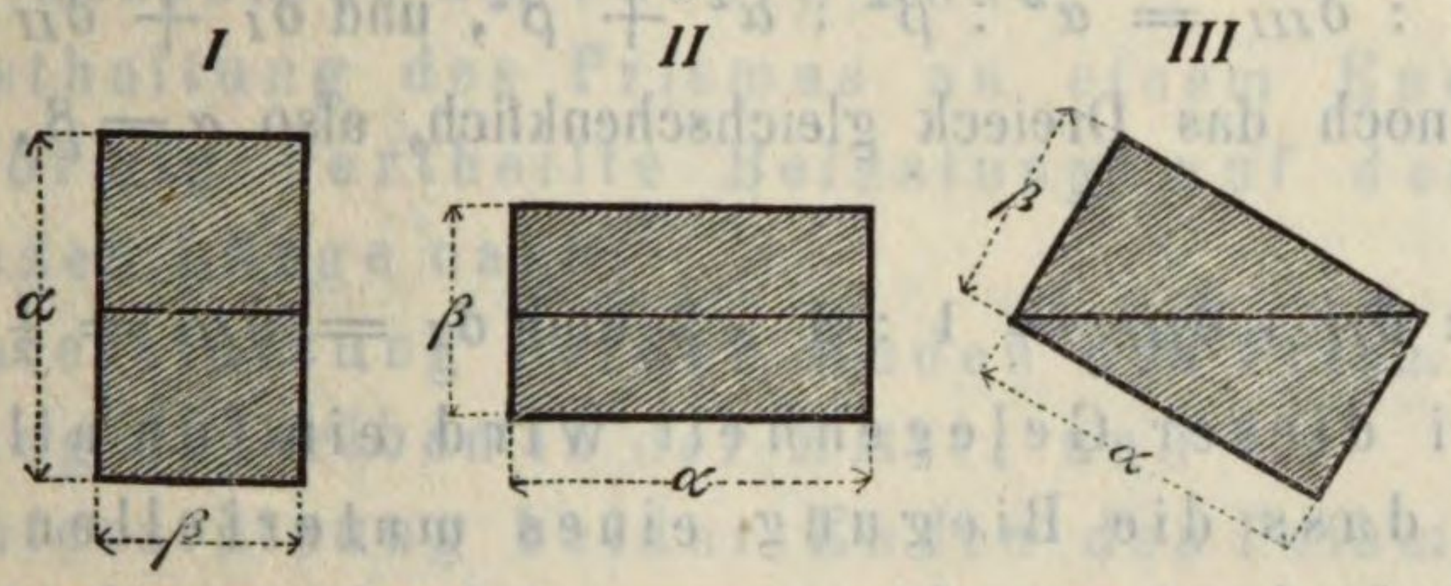
daher wegen $\alpha^2 = \frac{\pi}{4}\beta^2$ sofort

$$\delta_I : \delta_{II} = \frac{1}{t_I} : \frac{1}{t_{II}} = \frac{3}{\alpha^2} : \frac{4}{\beta^2} = 3 : \pi = 1 : 1{\cdot}047.$$

Es ist also die Biegung des Prismas mit dem kreisförmigen Querschnitte im Verhältniss wie 1 : 1·047 grösser, als mit den quadratischen.

2. Um einen weiteren Vergleich anzustellen, sei der Querschnitt des Prismas ein Rechteck von den Seiten α und β, und man betrachte dasselbe in den 3 Stellungen *I*, *II* und *III* (Fig. 52), wo ad *I*...β,

Fig. 52.



ad *II*...α und ad *III* die Diagonale horizontal ist. Heisst man wieder die correspondirenden Biegungen δ_I, δ_{II} und δ_{III}, so hat man

ad *I*, $h = \alpha$ und nach der Formel (51) $t_I = \frac{1}{12} f \alpha^2$,

ad *II*, $h = \beta$ „ „ „ „ (51) $t_{II} = \frac{1}{12} f \beta^2$,

und ad *III*, $h = \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ „ „ (52) $t_{III} = \frac{1}{6} f . \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}$,

sofort aber

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \frac{2}{\alpha^2} : \frac{2}{\beta^2} : \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = 2\beta^2 : 2\alpha^2 : \alpha^2 + \beta^2.$$

Für $\alpha > \beta$ ist $\delta_I < \delta_{III} < \delta_{II}$ und

„ $\alpha < \beta$ . . . $\delta_I > \delta_{III} > \delta_{II}$,

also δ_{III} stets zwischen δ_I und δ_{II}.

Für $\alpha = \beta$ endlich ist $t_I = t_{II} = t_{III}$ und $\delta_I = \delta_{II} = \delta_{III}$, also für den quadratischen Querschnitt die Grösse der Biegung in allen 3 Fällen dieselbe.

3. Wird ein dreikantiges Prisma ebenfalls in 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes α, β und γ horizontal sind, und jetzt eine Vergleichung zwischen den entstehenden Biegungen δ_I, δ_{II} und δ_{III} unter sonst gleichen Umständen vorgenommen, so hat man

ad *I*, $h = \frac{2f}{\alpha}$

ad *II*, $h = \frac{2f}{\beta}$ } , daher nach Formel (55) { $t_I = \frac{2}{9} \frac{f^3}{\alpha^2}$, $t_{II} = \frac{2}{9} \frac{f^3}{\beta^2}$

und ad *III*, $h = \frac{2f}{\gamma}$ } { $t_{III} = \frac{2}{9} \frac{f^3}{\gamma^2}$,

also auch

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \frac{1}{t_I} : \frac{1}{t_{II}} : \frac{1}{t_{III}} = \alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2,$$

wonach sich die betreffenden Biegungen verhalten, wie die Quadrate der horizontalen Seiten.

Ist das Dreieck rechtwinkelig, und γ die Hypothenuse, so hat man überdiess wegen $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ das Verhältniss

$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \alpha^2 : \beta^2 : \alpha^2 + \beta^2$, und $\delta_I + \delta_{II} = \delta_{III}$.

Wäre noch das Dreieck gleichschenklich, also $\alpha = \beta$, so würde sein

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = 1 : 1 : 2 \text{ und } \delta_I = \delta_{II} = \tfrac{1}{2}\delta_{III}.$$

4. Bei dieser Gelegenheit wird ein für allemal erinnert, dass die Biegung eines materiellen Prismas nicht geändert werde, wenn sein Querschnitt in die genau entgegengesetzte Lage gebracht wird, vorausgesetzt, dass auch in diesem Falle keine Elasticitätsgränze überschritten wird. Durch die so veränderte Lage bleibt nämlich die durch den Schwerpunct gehende Axe, und der Abstand jedes Flächentheiles von derselben, also auch das Trägheitsmoment t unverändert.

§. 57.

Trägheitsmoment zusammengesetzter Figuren. Ist eine Figur aus zwei oder mehreren andern einfachen Figuren zusammengesetzt, so bildet die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile das Trägheitsmoment der ganzen Figur. Nur müssen die sämmtlichen Trägheitsmomente auf eine und dieselbe Axe bezogen werden, welche in diesem Falle durch den Schwerpunct der ganzen Figur horizontal zu ziehen ist, wenn die Krafteinwirkung vertical angenommen wird. Da aber diese Axe im Allgemeinen nicht mehr durch den Schwerpunct jedes einzelnen Querschnittstheiles gehen wird, so muss man sodann von dem bekannten Satze des sogenannten Uebersetzens der Trägheitsmomente von einer Axe auf eine andere Gebrauch machen, wie diess beispielsweise im §. 49 ad 3 geschehen ist. Man findet indess vorläufig hierauf nicht näher einzugehen, sondern die noch weiters nöthigen Erläuterungen für die Anwendung dem 2. Hauptstücke vorzubehalten.

§. 58.

Einfluss der Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte auf die Biegung. Auch in dieser Beziehung sollen vor der Hand nur die einfachsten Fälle erläutert werden. Als diese pflegt man anzunehmen:

I. Festhaltung des Prismas an einem Ende und Belastung desselben am andern Ende;

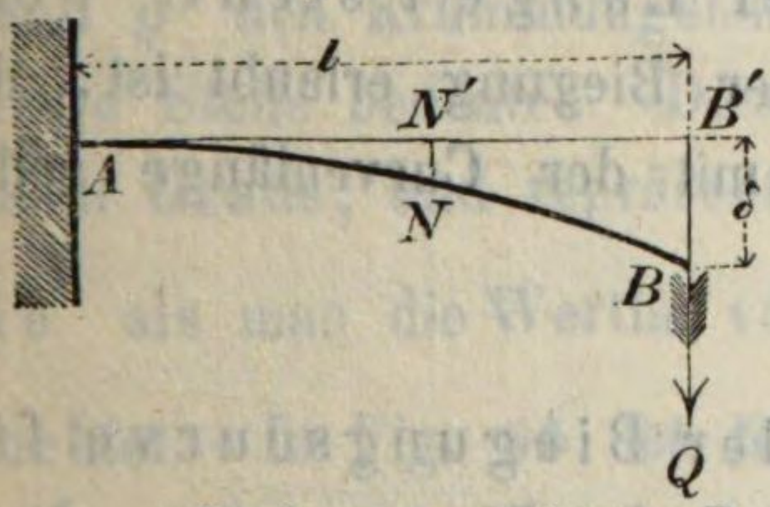
II. Festhaltung des Prismas an einem Ende, und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach;

III. Unterstützung beider Enden des Prismas, und Belastung desselben in der Mitte; und

IV. Unterstützung beider Enden des Prismas, und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach.

§. 59.

Fig. 53.



I. Fall. Es werde (Fig. 53) ein Prisma an einem Ende A horizontal festgehalten, und am andern Ende B mit einem Gewichte Q belastet, hiebei aber von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt. Man setze in Uebereinstimmung mit den gewählten Bezeichnungen für einen beliebigen Punct N der Längenaxe

die Abscisse . . . . . $AN' = x$,
die dazu gehörige Ordinate . . . . . $NN' = y$,
die horizontale Länge . . . . . $AB' = l$,
die Grösse der Biegung . . . . . $BB' = \delta$
und den Winkel, welchen die Tangente in B
mit dem Horizonte bildet, ... $= \alpha$.

Man erhält nunmehr nach der Gleichung (47)

$$mt \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Q\,(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58),$$

da in diesem Falle das statische Kraftmoment Rz offenbar $Q \cdot \overline{B'N'} = Q(l - x)$ ist. Hieraus folgt durch Integration

$$\text{zuerst } mt \cdot \frac{dy}{dx} = Q\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

und weiters $mt \,.\, y = Q\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$ . . (60),

wenn man beachtet, dass mit x auch die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden.

Endlich hat man für den Endpunct B die fragliche Grösse der Biegung

$$\delta = \tfrac{1}{3} \,.\, \frac{Q\,l^3}{mt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$\text{und } tg\,\alpha = \frac{Q\,l}{2\,mt} = \frac{3\,\delta}{2\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Führt man jetzt den für δ gegebenen Werth in die Gleichung (60) ein, so bekommt man

$$\frac{y}{\delta} = \tfrac{1}{2} \,.\, \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left[3 - \frac{x}{l}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

als Gleichung der Biegungscurve.

Der Ausdruck (61) lehrt, dass die Biegung im einfachen Verhältniss mit der Belastung Q, hingegen im cubischen Verhältnisse mit der Länge l steht, wobei es bei der vorausgesetzten Kleinheit der Biegung erlaubt ist, die horizontale Projection der Längenaxe mit der Curvenlänge selbst zu verwechseln.

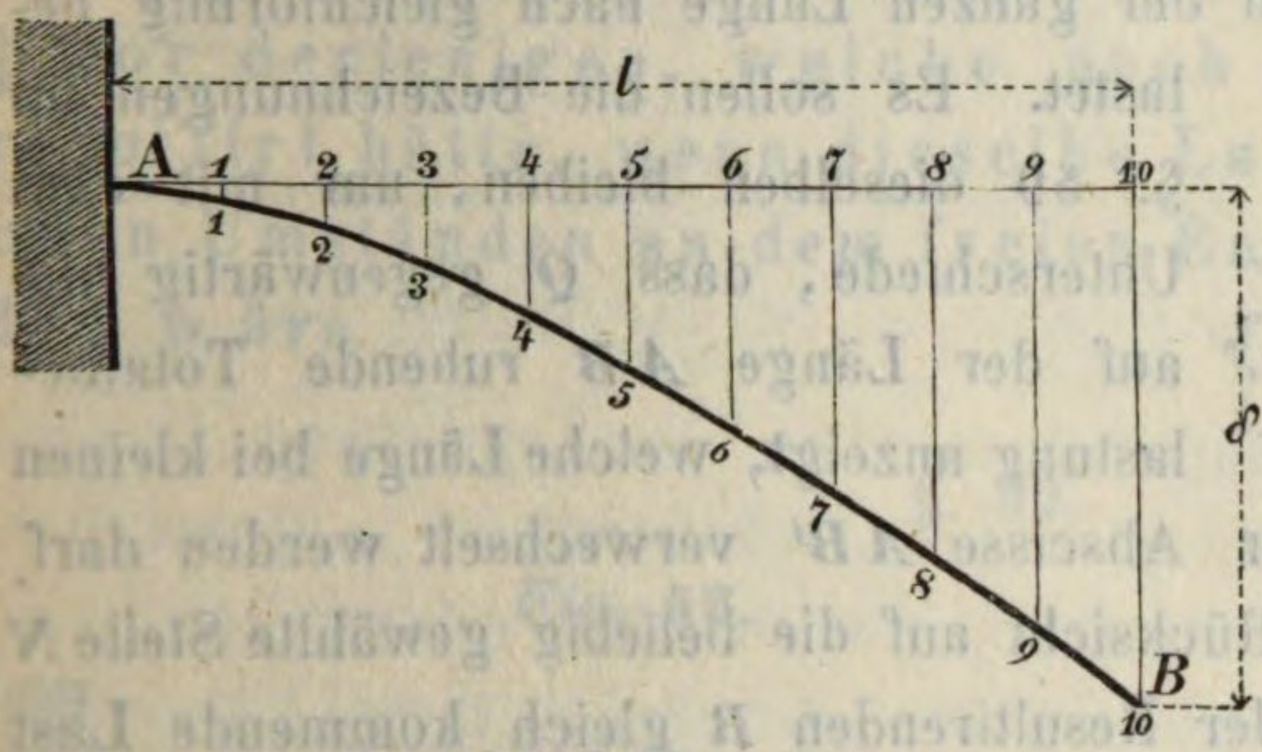
§. 60.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den I. Fall. Die Gleichung (63) für die Biegungscurve kann mittelst Abscissen und Ordinaten construirt, und hierzu folgende Tabelle benüzt werden:

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0145	0·6	0·4320
0·2	0·0560	0·7	0·5635
0·3	0·1215	0·8	0·7040
0·4	0·2080	0·9	0·8505
0·5	0·3125	1·0	1·0000

In Figur 54 ist die Construction dieser Curve ausgeführt, wobei zur bessern Anschaulichkeit die Ordinaten in vergrössertem Mass-

Fig. 54.

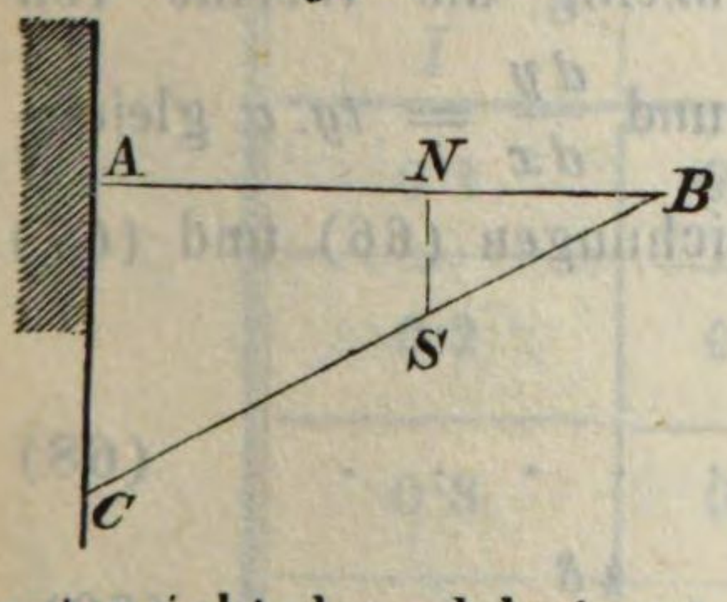


stabe erscheinen. Man bemerkt, dass die Curve in der Gegend von *A* beinahe mit einer gemeinen Parabel, und in der Gegend von *B* beinahe mit einer geraden Linie zusammenfällt. Eine andere graphische Versinnlichung kann aus der Gleichung (58) abgeleitet werden. Es ist nämlich $mt \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Q\,(l-x)$, und da nach §. 52 sehr nahe $\frac{d^2y}{dx} = \frac{1}{\varrho'}$ gefunden wurde, auch

$$\frac{mt}{\varrho'} = Q\,(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64),$$

wenn ϱ' den Krümmungshalbmesser der Curve für die zu x, y gehörige Stelle bedeutet. Diese Gleichung ist in Bezug auf x vom ersten Grade, und repräsentirt daher in so ferne eine gerade Linie als man die Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ als Ordinaten dieser Geraden betrachtet. In Fig. 55 ist BC die erwähnte Gerade, und man kann

Fig. 55.

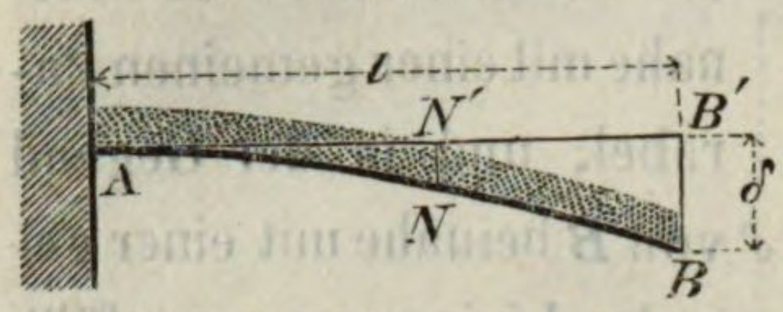


jetzt behaupten, dass für irgend einen Punct N der Längenaxe die Ordinate NS mit $\frac{1}{\varrho'}$ im Verhältnisse stehe, also dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers proportionirt sei. Die grösste Ordinate $AC = \frac{Ql}{mt}$ entsteht in A für $x = o$ und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{mt}{Ql}$, während die Ordinate an dem Endpuncte B verschwindet, und mit einem unendlich grossen Krümmungshalbmesser correspondirt. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (61) für den erwähnten Minimal-Krümmungsradius $\varrho' = \frac{l^2}{3\delta}$.

§. 61.

II. Fall. Es werde (Fig. 56) ein Prisma an einem Ende A horizontal festgehalten, und der ganzen Länge nach gleichförmig belastet. Es sollen die Bezeichnungen im §. 59 dieselben bleiben, nur mit dem Unterschiede, dass Q gegenwärtig die auf der Länge AB ruhende Totalbelastung anzeigt, welche Länge bei kleinen Biegungen wieder mit der Abscisse AB' verwechselt werden darf.

Fig. 56.



In diesem Falle ruht mit Rücksicht auf die beliebig gewählte Stelle N auf dem Stücke BN die der Resultirenden R gleich kommende Last $R = Q \cdot \frac{\overline{B'N'}}{\overline{AB'}} = Q\left(\frac{l-x}{l}\right)$, und der dazu gehörige Hebelsarm ist $z = \frac{1}{2}\overline{B'N'} = \frac{1}{2}(l-x)$. Es wird daher das statische Kraftmoment $Rz = \frac{Q}{2l}(l-x)^2$, und mit Benützung desselben in den Gleichungen (47), (48) und (49) sofort

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{2l}(l-x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (65),$$

$$mt\frac{dy}{dx} = \frac{Qx}{6l}(3l^2-3lx+x^2) \quad \ldots\ldots (66)$$

$$\text{und } mt\ y = \frac{Qx^2}{24l}(6l^2-4lx+x^2) \quad \ldots\ldots (67),$$

wenn man beachtet, dass für $x=o$ gleichzeitig die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $y=o$ werden. Da $x=l$, $y=\delta$ und $\frac{dy}{dx} = tg.\,\alpha$ gleichzeitige Werthe sind, so folgt aus den Gleichungen (66) und (67) die Grösse der Biegung

$$\delta = \frac{1}{8}\cdot\frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

$$\text{und } tg.\,\alpha = \frac{1}{6}\cdot\frac{Ql^2}{mt} = \frac{4\delta}{3l} \quad \ldots\ldots (69).$$

Mittelst dieses Werthes von δ nimmt die Gleichung der Biegungscurve die Form an

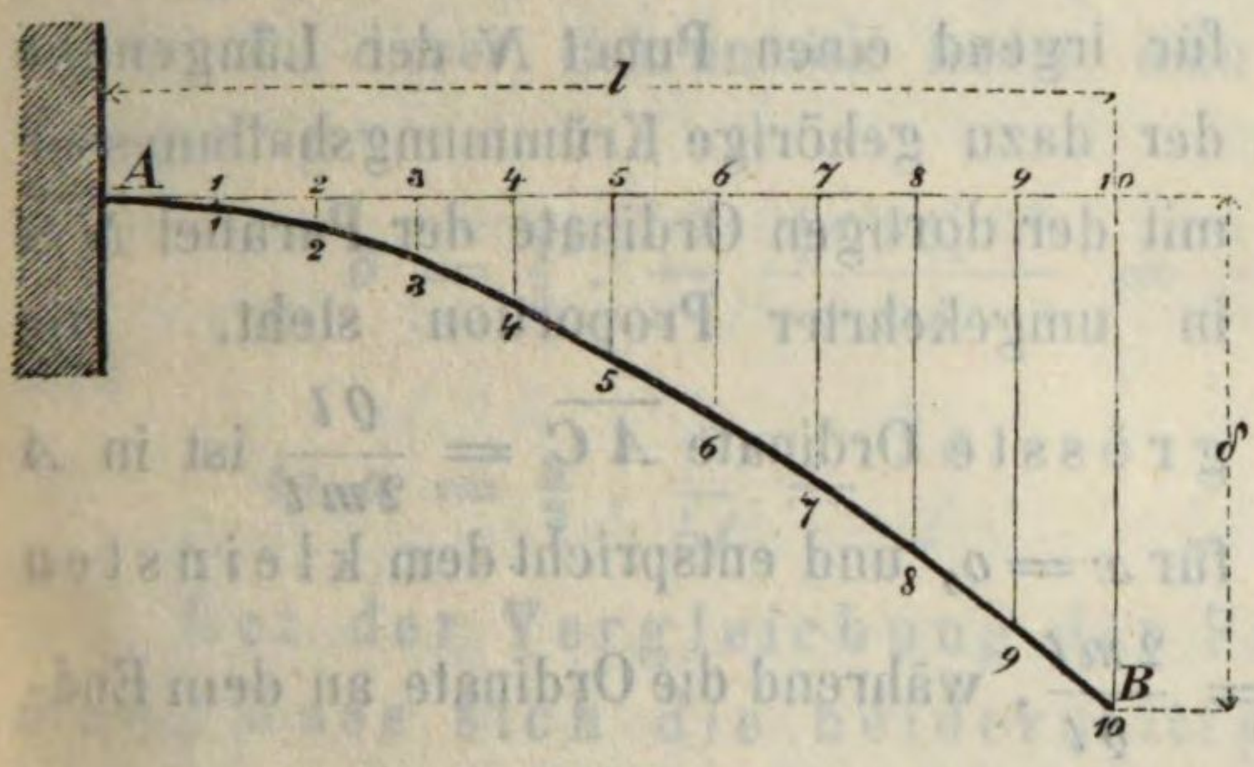
$$\frac{y}{\delta} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[6-4\left(\frac{x}{l}\right)+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad \ldots (70),$$

welche also in Beziehung auf x vom 4. Grade ist.

Der Gleichung (68) zu Folge beträgt die Grösse der Biegung bei dem Stattfinden einer nach der ganzen Länge gleichmässig vertheilten Belastung nur $\frac{3}{8}$ vor derjenigen, welche nach der Gleichung (61) resultirt hätte, wenn dieselbe Last unter sonst gleichen Umständen an dem freien Ende concentrirt worden wäre.

§. 62.

Fig. 57.



Graphische Darstellung der Biegungscurve für den II. Fall. Die Gleichung (70) kann graphisch dargestellt werden. Nach derselben wurde die nachfolgende Tabelle zwischen $\frac{x}{l}$ und $\frac{y}{\delta}$ berechnet, und die entsprechende Curve (Fig 57.) anschaulich gemacht, wobei die Ordinaten, gleichfalls wie in der Fig. 54, in vergrössertem Massstabe gezeichnet sind.

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0187	0·6	0·4752
0·2	0·0699	0·7	0·6027
0·3	0·1467	0 8	0·7339
0·4	0·2432	0 9	0·8667
0·5	0·3542	1 0	1·0000

Auch führt, wie im §. 60, die Gleichung (65)

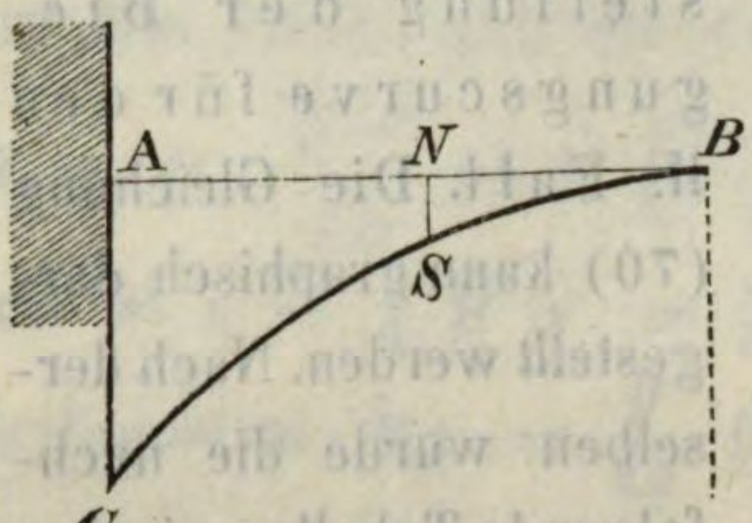
$$mt \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{2l}(l-x)^2$$

zu einer weiteren graphischen Versinnlichung, indem wegen $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$ sofort

$$\frac{mt}{\varrho'} = \frac{Q}{2l}(l-x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

gesetzt, nnd daher gesagt werden kann, dass diese Gleichung eine gemeine Parabel in so ferne repräsentire, als die Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ als die Ordinaten derselben angesehen werden. Die Lage dieser Parabel ist in der Fig. 58 ersichtlich. Ihr Scheitel befindet sich in B und ihre Axe geht vertical. Man erkennt jetzt, dass für irgend einen Punct N der Längenaxe der dazu gehörige Krümmungshalbmesser mit der dortigen Ordinate der Parabel $\overline{NS}$ in umgekehrter Proportion steht. Die grösste Ordinate $\overline{AC} = \frac{Ql}{2mt}$ ist in A für $x = o$, und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{2mt}{Ql}$, während die Ordinate an dem Endpuncte B verschwindet, und mit einem unendlich grossen Krümmungsradius correspondirt. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (68) für den erwähnten Minimal-Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{l^2}{4\delta}$.

Fig. 58.



§. 63.

III. Fall. Wird (Fig. 59) ein Prisma BC an beiden Enden B und C unterstützt, und in der Mitte A mit dem Gewichte Q belastet, so lässt sich dieser Fall dadurch anschaulich machen, dass man (Fig. 60) die Stützen in B und C weggenommen, und an deren Statt die Kräfte $\frac{1}{2}Q$ und $\frac{1}{2}Q$ sich angebracht denkt, welche gleich und ent-

Fig. 59.

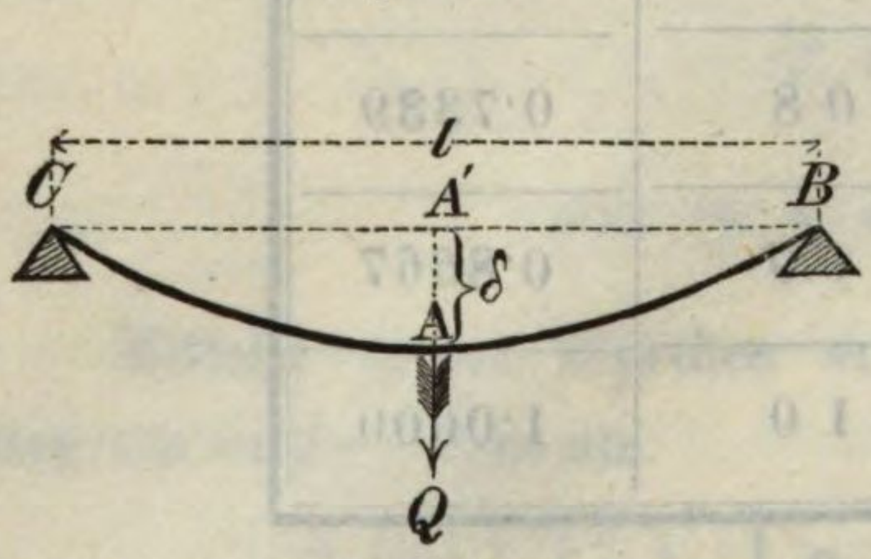
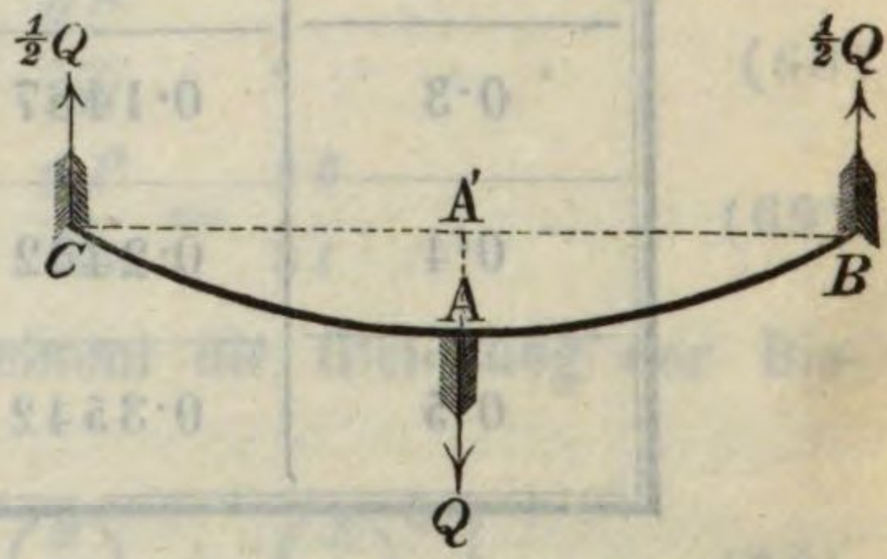
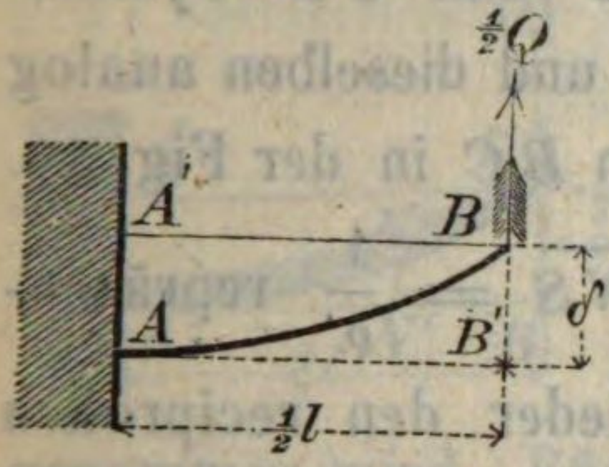


Fig. 60.



gegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Jede Hälfte AB und AC befindet sich jetzt unter der Voraussetzung, dass von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird, in einem Zustande, welcher mit dem in der Fig. 61 dargestellten und im §. 59 behandelten Falle I. analog ist, daher die daselbst gegebenen Formeln geeignete Anwendung finden, wenn nur statt den dortigen Grössen l und Q gegenwärtig $\frac{1}{2}l$ und $\frac{1}{2}Q$ gesetzt, und überdiess die Kraft $\frac{1}{2}Q$ vermöge ihrer Richtung nach aufwärts negativ genommen wird. In dieser Erkenntniss findet man für die Grösse der Biegung

Fig 61.



$$\delta = \frac{1}{3} \cdot - \frac{(\frac{1}{2}Q)(\frac{1}{2}l)^3}{mt} = - \frac{1}{48} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad . \quad . \quad (72)$$

und

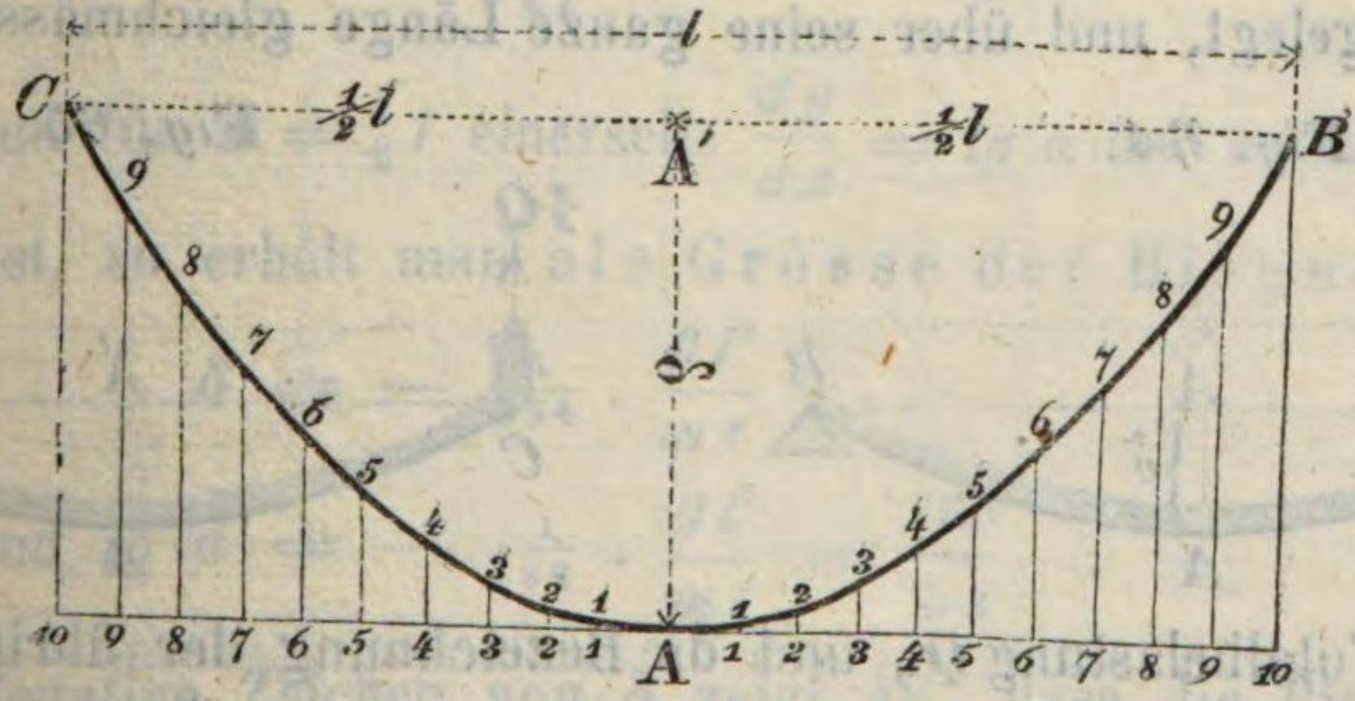
$$tg\,\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta}{\frac{1}{2}l} = \frac{3\delta}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Bei der Vergleichung der Fälle I und III bemerkt man, dass sich die beiderseitigen Grössen der Biegungen dem numerischen Werthe nach unter sonst gleichen Umständen wie 16 : 1 verhalten. Das negative Zeichen in der Formel (72) bezieht sich bloss auf die Richtung der Biegung, welche im Vergleiche zu der ad I entgegengesetzt ist.

§. 64.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den III. Fall. Zu diesem Behufe hat man nur nöthig, die Curve

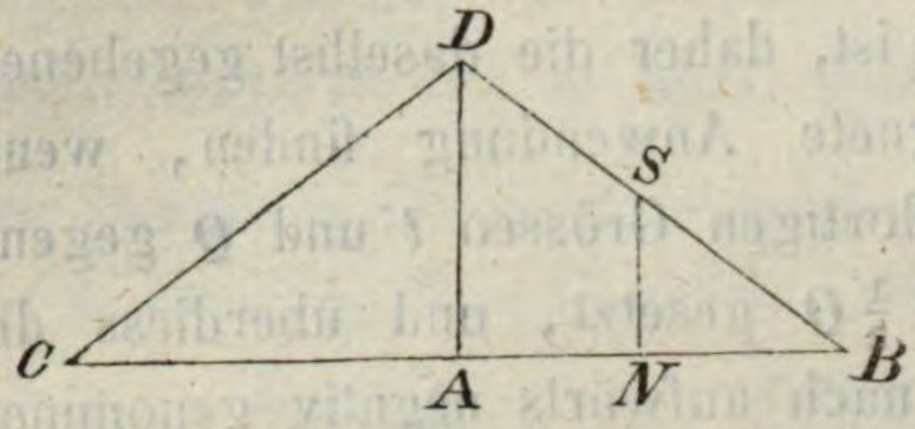
Fig. 62.



(Fig. 62) aus 2 Theilen AB und AC zusammenzusetzen, welche je nach Art der Curve (Fig. 54) construirt sind. Die Tabelle in §. 60

kann daher auch hier für jeden der beiden Curventheile benützt werden, nur hat man statt der dortigen Grösse l diesfalls $\frac{1}{2}l$ zu setzen. Die zweite graphische Anschauungsweise enthält die Fig. 63. Es sind die geraden Linien BD und CD symmetrisch gelegen, und dieselben analog mit der Geraden BC in der Fig. 55.

Fig 63.



Die Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{\varrho'}$ repräsentirt sodann wieder den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers ϱ', der an der Stelle N der Längenaxe BC in Folge der Biegung vorhanden ist. Uebrigens sind die beiden Linien BD und CD übereinstimmend mit der Lage der Krümmungshalbmesser oberhalb der Längenaxe gezeichnet, wodurch auch die Richtung der Biegung erkannt werden kann. Die grösste Ordinate $\overline{AD} = \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)}{mt} = \frac{Ql}{4mt}$ ist in A vorhanden und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{4mt}{Ql}$, während die Ordinaten der bezeichneten Geraden für die Endpuncte B und C verschwinden, und mit unendlich grossen Krümmungshalbmessern correspondiren. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (72) für den numerischen Werth des erwähnten Minimal-Krümmungshalbmessers $\varrho' = \frac{l^2}{12\delta}$.

§. 65.

IV. Fall. Es werde ein Prisma BC (Fig. 64) auf 2 Stützen horizontal gelegt, und über seine ganze Länge gleichmässig belastet;

Fig. 64.

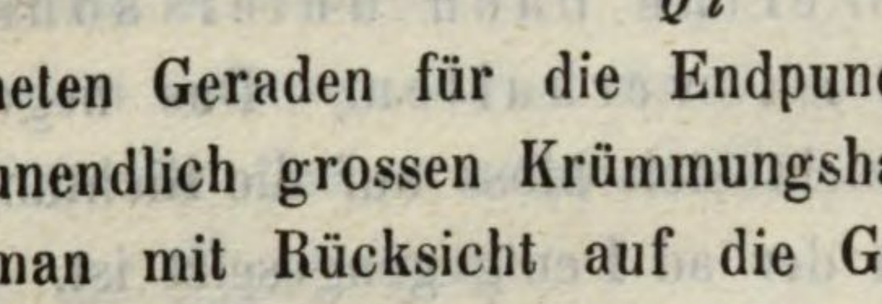
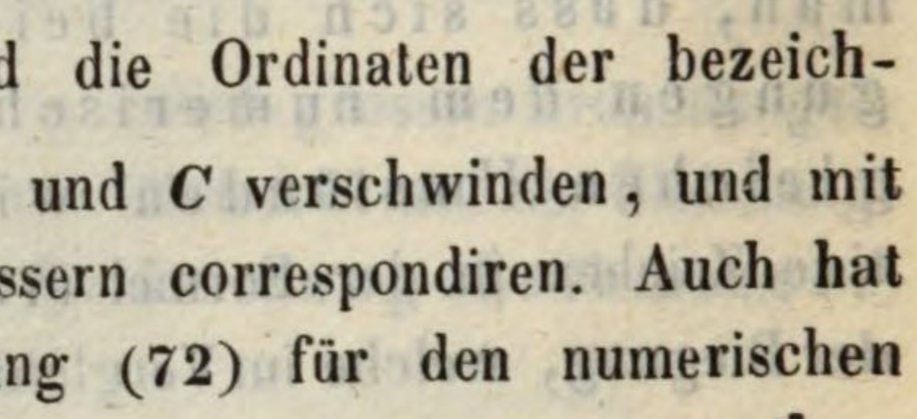


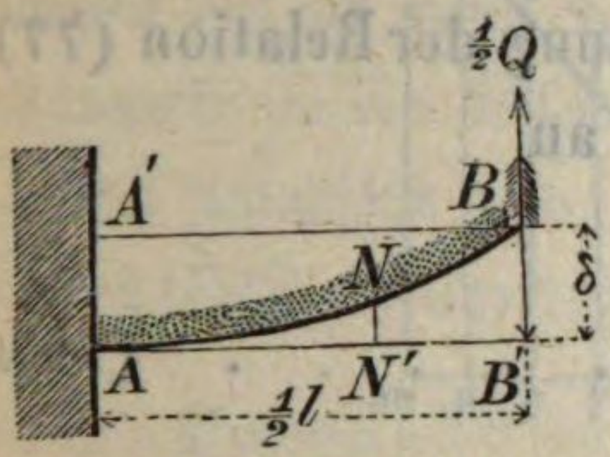
Fig. 65.



es sei die Totalbelastung Q, und die Bezeichnung der übrigen Grössen die früher gewählte. Nach einem analogen Raisonnement, wie im §. 63 gelangt man zur Ueberzeugung, dass die Darstellung in den

Figuren 65 und 66 geeignet sei, den Zustand des Prismas gegen Biegung zu beurtheilen. Es erscheint nämlich der zu untersuchende Fall schliesslich anf einen andern Fall (Fig. 66) zurückgeführt, wo das halbe Prisma AB an der Stelle A festgehalten, und an der Stelle B mit der Kraft $\frac{1}{2}Q$ nach aufwärts gezogen, überdiess aber der ganzen Länge nach von der gleichförmig vertheilten Last $\frac{1}{2}Q$ in Anspruch genommen wird. Für einen beliebig gewählten Punct N, dessen Coordinaten $AN' = x$ und $NN' = y$ sind, hat man daher bezüglich des Theiles BN das statische Kraftmoment

Fig. 66.



$$Rz = -\tfrac{1}{2}Q \cdot \overline{B'N'} + \tfrac{1}{2}Q \cdot \frac{\overline{B'N'}}{\overline{AB'}} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B'N'} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}Q(\tfrac{1}{2}l - x) + \frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{2}l - x)^2.$$

Dasselbe ist nämlich die Summe zweier statischen Kraftmomente, welche von den beiden Anspruchsnahmen herrühren, und mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen sind. Dieser Ausdruck reducirt, gibt

$$Rz = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2).$$

Es wird daher im Sinne der gegebenen Theorie

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots (74),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2x - \tfrac{1}{3}x^3) \quad \ldots\ldots (75)$$

$$\text{und } mty = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{8}l^2x^2 - \tfrac{1}{12}x^4) \quad \ldots\ldots (76).$$

Da nun für $x = \frac{1}{2}l$ einerseits $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$ und anderseits $y = \delta$ zu setzen ist, so erhält man als Grösse der Biegung

$$\delta = -\tfrac{5}{384} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots\ldots (77)$$

$$\text{und } tg\,\alpha = -\tfrac{1}{24} \cdot \frac{Ql^2}{mt} = \frac{16\delta}{5l} \quad \ldots\ldots (78).$$

Das negative Zeichen von δ zeigt an, dass die Biegungscurve oberhalb der Abscissenaxe liegt, wie diess auch schon bei dem III. Falle ad §. 63 wahrgenommen wurde.

Die Vergleichung der Werthe (72) und (77) lässt erkennen, dass die Biegung im IV. Falle nur $\frac{5}{8}$ von der im III. Falle beträgt, wenn hiebei die beiderseitigen Daten dieselben sind. Auch nimmt mit Benützung der Relation (77) die Gleichung der Biegungscurve (76) die Form an

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\delta} &= \tfrac{8}{5}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[3-2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \\ \text{oder } \frac{y}{\delta} &= \tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\left[6-\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (79).$$

§. 66.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den IV. Fall. Zur Verzeichnung der Biegungscurve in dem besprochenen Falle ist es am zweckmässigsten, die letzte der beiden Gleichungen (79), nämlich

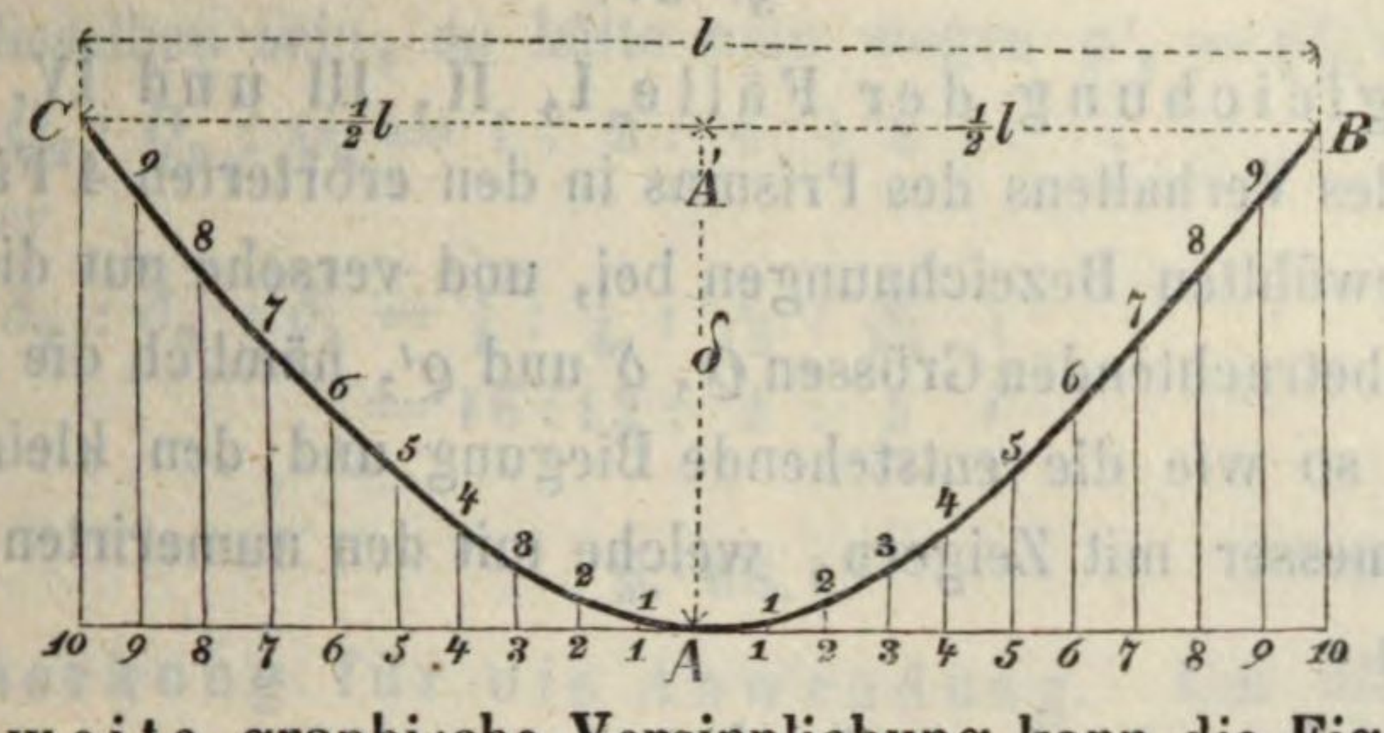
$$\frac{y}{\delta} = \tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\left[6-\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right]$$

zu benützen. Diese Gleichung gilt für die beiden symmetrisch gelegenen Curvenhälften AB und AC (Fig. 64), und lässt in der That auch positive und negative Werthe von x zu, ohne dass das Zeichen dieser Grösse x einen Einfluss auf den Werth von y hat. Aus der nachfolgenden Tabelle können mehrere zusammengehörige Werthe von x und y entnommen werden.

$\pm\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)$	$\frac{y}{\delta}$	$\pm\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0120	0·6	0·4061
0·2	0·0477	0·7	0·5400
0·3	0·1064	0·8	0·6861
0·4	0·1869	0·9	0·8408
0·5	0·2875	1·0	1·0000

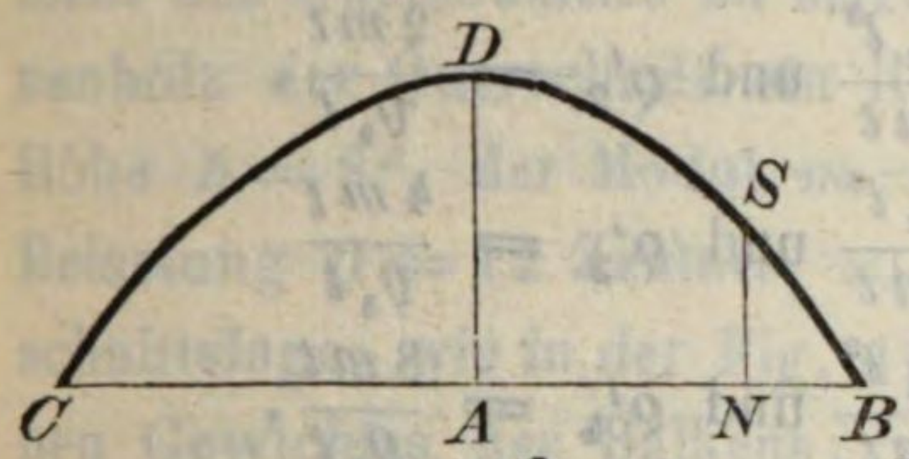
Hienach hat man die Biegungscurve (Fig. 67) construirt.

Fig. 67.



Als zweite graphische Versinnlichung kann die Fig. 68 dienen. In derselben ist für eine Abscisse $\overline{AN} = x$ die dazu gehörige Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{\varrho'}$, nämlich dem reciproken Werthe des Halbmessers der Krümmung gleich, welche an der Stelle N der Längenaxe in Folge der Biegung eintritt. Da nun vermöge der Gleichung (74) $mt \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{2l}(\frac{1}{4}l^2 - x^2)$ und wegen $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$ sofort

Fig. 68.



$$\frac{mt}{\varrho'} = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

wird, so sieht man leicht, dass die Coordinaten x und $\frac{1}{\varrho'}$ einer Parabel BDC angehören, welche in D ihren Scheitel und in der Richtung AD ihre Axe hat. Aus Anlass der negativen Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ hat man die Zeichnung oberhalb der Längenaxe, nämlich übereinstimmend mit der Lage der Krümmungsradien ausgeführt. Die grösste Ordinate AD ist in A für $x = o$ vorhanden, hat den numerischen Werth $\frac{Ql}{8mt}$ und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{8mt}{Ql}$, während die Ordinaten an den Endpuncten B und C verschwinden, und mit unendlich grossen Krümmunghalbmessern correspondiren. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (77) für den numerischen Werth des erwähnten Minimal-Krümmungshalbmessers $\varrho' = \frac{5}{48} \cdot \frac{l^2}{\delta}$.

§. 67.

Vergleichung der Fälle I, II, III und IV. Zur Vergleichung des Verhaltens des Prismas in den erörterten 4 Fällen behalte man die gewählten Bezeichnungen bei, und versehe nur die als veränderlich zu betrachtenden Grössen Q, δ und ϱ', nämlich die zu tragende Belastung, so wie die entstehende Biegung und den kleinsten Krümmungshalbmesser mit Zeigern, welche mit den numerirten Fällen correspondiren.

Dieser Bemerkung gemäss hat man

$$\text{im I. Falle} \ldots \delta_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q_1 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_1 = \frac{mt}{Q_1 l},$$

$$\text{im II. Falle} \ldots \delta_2 = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_2 = \frac{2mt}{Q_2 l},$$

$$\text{im III. Falle} \ldots \delta_3 = \tfrac{1}{48} \cdot \frac{Q_3 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_3 = \frac{4mt}{Q_3 l}$$

$$\text{und im IV. Falle} \ldots \delta_4 = \tfrac{5}{384} \cdot \frac{Q_4 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_4 = \frac{8mt}{Q_4 l},$$

also auch

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 = \tfrac{1}{3} Q_1 : \tfrac{1}{8} Q_2 : \tfrac{1}{48} Q_3 : \tfrac{5}{384} Q_4 \quad \ldots \quad (81)$$

$$\text{und } \varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 = \frac{1}{Q_1} : \frac{2}{Q_2} : \frac{4}{Q_3} : \frac{8}{Q_4} \quad \ldots \quad (82).$$

Sind zuerst die 4 Belastungen einander gleich, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{48} : \tfrac{5}{384} \\ &= 128 : 48 : 8 : 5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (83)$$

und

$$\varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 = 1 : 2 : 4 : 8 \quad \ldots \quad (84).$$

Sollen hingegen die Belastungen so gewählt werden, dass die Biegungen in allen 4 Fällen gleich werden, so wäre wegen

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$$

sofort

$$\left.\begin{aligned} Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 &= 3 : 8 : 48 : \tfrac{384}{5} \\ &= 15 : 40 : 240 : 384 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (85)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{12} : \tfrac{5}{48} \\ &= 16 : 12 : 4 : 5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (86).$$

Sollen endlich die kleinsten Krümmungshalbmesser in allen 4 Fällen dieselben sein, so hätte man wegen $\varrho'_1 = \varrho'_2 = \varrho'_3 = \varrho'_4$

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 = 1 : 2 : 4 : 8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87),$$

weiters aber

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{12} : \tfrac{5}{48} \\ &= 16 : 12 : 4 : 5 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

§. 68.

Bemerkung für die Anwendung. Um die gegebenen Formeln anwenden zu können, ist es nöthig, statt m und t die entsprechenden Werthe für den Modul der Materie und das Trägheitsmoment des Querschnittes zu setzen. Sei z. B. für einen Balken aus Tannenholz der Querschnitt ein Rechteck von der Breite $b = 6''$ und der Höhe $h = 8''$, der Modul $m = 16000$, die Länge $l = 80''$ und die Belastung $Q = 12$ Zentner, so hätte man unter Beibehaltung der Querschnittslage, wie in der Fig. 41, und unter Vernachlässigung des eigenen Gewichtes des Balkens, wegen $f = bh = 48\square''$, zunächst nach Formel (51) $t = \frac{1}{12} f h^2 = 256$; sofort aber

im I. Falle .. $\delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q l^3}{m t} = \frac{1}{2}''$ u. $tg\,\alpha = \frac{3\delta}{2l} = \frac{3}{320}$ daher $\alpha = 0^0\,32'$,

„ II „ .. $\delta = \frac{1}{8} \cdot \frac{Q l^3}{m t} = \frac{3}{16}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{4\delta}{3l} = \frac{1}{320}$ „ $\alpha = 0^0\,11'$,

„ III „ .. $\delta = \frac{1}{48} \cdot \frac{Q l^3}{m t} = \frac{1}{32}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{3\delta}{l} = \frac{3}{2560}$ „ $\alpha = 0^0\,4'$,

und

„ IV. „ .. $\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{Q l^3}{m t} = \frac{5}{256}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{16\delta}{5l} = \frac{1}{1280}$ „ $\alpha = 0^0\,2\frac{2}{3}'$.

§. 69.

Combinirung der Fälle I und II, dann III und IV. Ist das materielle Prisma an einem Ende festgehalten, und sowohl von einer Belastung Q_1 am andern Ende, als auch von einer nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung zwischen den Fällen I und II. Es leuchtet ein, dass bei der vorausgesetzten Kleinheit der Formveränderung, die entstehende totale Biegung δ sodann aus den beiden Biegungen δ_1 und δ_2, welche durch die Belastungen Q_1 und Q_2 einzeln hervorgebracht würden, bestehen werde, weil in der Fundamentalgleichung (47) das statische Kraftmomen Rz aus der algebraischen Summe der statischen

Momente der einzelnen Kräfte zusammengesetzt ist, und die Summirung dieser Wirkungen sich auch auf die folgenden Gleichungen (48) und (49) erstreckt. In dieser Erkenntniss hat man

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q_1 l^3}{m t} + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{m t} = \tfrac{1}{3} \left(Q_1 + \tfrac{3}{8} Q_2\right) \frac{l^3}{m t},$$

woraus folgt, dass auf die Grösse der Biegung die gleichförmig vertheilte Last Q_2 denselben Einfluss hat, wie wenn $\frac{3}{8}$ dieser Last am freien Ende concentrirt und mit der Belastung Q_1 vereinigt würden.

Auf ähnliche Weise ist die Totalbiegung δ zu berechnen, wenn das Prisma auf beiden Enden aufruht, und mit den Belastungen Q_3 und Q_4 in Anspruch genommen würde, von welchen erstere in der Mitte concentrirt, letztere aber der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilt wäre. Man hat nämlich unter diesen Umständen die ad III und IV erörterten Fälle zu combiniren, und demgemäss zu setzen

$$\delta = \delta_3 + \delta_4 = \tfrac{1}{48} \cdot \frac{Q_3 l^3}{m t} + \tfrac{5}{384} \cdot \frac{Q_4 l^3}{m t} = \tfrac{1}{48} \left(Q_3 + \tfrac{5}{8} Q_4\right) \frac{l^3}{m t}.$$

In diesem Falle hat also auf die Biegungsgrösse die gleichförmig vertheilte Belastuug Q_4 denselben Einfluss, als wenn $\frac{5}{8}$ dieser Belastung in der Mitte des Prismas mit der Last Q_3 vereinigt würden.

§. 70.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas. Das eigene Gewicht des Prismas ist als eine gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach zu betrachten, und der Einfluss desselben auf die Biegung kann daher im Sinne des vorigen §. beurtheilt werden. Auch hat man mit Rücksicht auf den II. und IV. Fall wegen $Q_2 = Q_4 = f l \gamma$, wo γ das Gewicht der cubischen Einheit des Materials bedeutet, die durch das eigene Körpergewicht entstehenden Biegungen

$$\text{ad II} \ldots \delta_2 = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{m t} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{f l \gamma l^3}{m f d^2} = \frac{l^4 \gamma}{8 m d^2}$$

$$\text{und ad IV} \ldots \delta_4 = \tfrac{5}{384} \cdot \frac{l^4 \gamma}{m d^2},$$

welche daher hinsichtlich des Querschnittes nur von der Grösse d^2 abhängen, und mit der 4. Potenz der Länge l zunehmen. Sei z. B. für eine schmiedeeiserne Schiene vom rechteckigen Querschnitte (Fig. 41)

$l = 100''$, $h = 3''$, $\gamma = \frac{1}{400}$ Zentner und $m = 250000$, also wegen der Formel (51) $d^2 = \frac{1}{12} h^2 = \frac{3}{4}$, so würde sofort

$$\delta_2 = \frac{1}{6}'' \text{ und } \delta_4 = \frac{5}{288}''.$$

§. 71.

Bestimmung der neutralen Schichte in den Fällen I, II, III und IV. Zu diesem Behufe hat man nur die Gleichung (44) $e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z}$ als eine Function von x auszudrücken. Wird dabei wegen der kleinen Biegungen näherungsweise $\sin\varphi = \frac{dy}{dx}$ gesetzt, so erhält man Folgendes:

Ad I). Nach §. 59 ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{mt}(lx - \frac{1}{2}x^2)$ und $z = l - x$, also auch

$$e = \frac{d^2 Q (lx - \frac{1}{2}x^2)}{mt(l-x)} = \frac{3d^2\delta}{l^3}\left(\frac{lx - \frac{1}{2}x^2}{l-x}\right),$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = \frac{3d^2}{l^2}\left(\frac{x}{l}\right)\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1 - \left(\frac{x}{l}\right)}\right\}.$$

Für ein Rechteck (Fig. 41) ist $d^2 = \frac{1}{12}h^2$ und

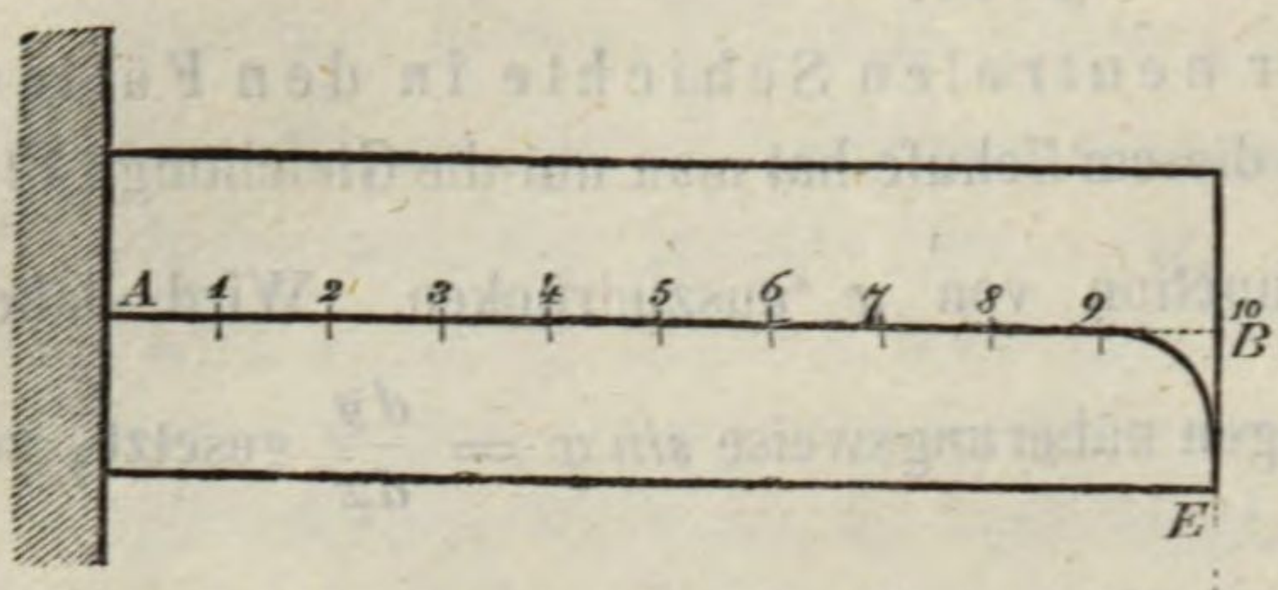
$$\frac{e}{\delta} = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1 - \left(\frac{x}{l}\right)}\right\}.$$

Hätte man z. B. $h = 10''$, $l = 100''$ und $\delta = \frac{1}{2}''$, so könnte man die Werthe von e aus folgender Tabelle entnehmen:

$\frac{x}{l}$	$\frac{e}{\delta}$	x	e	$\frac{x}{l}$	$\frac{e}{\delta}$	x	e
0·1	0·0003	10″	0·0001″	0·6	0·0026	60″	0·0013″
0·2	0·0006	20″	0·0003″	0·7	0·0039	70″	0·0020″
0·3	0·0009	30″	0·0005″	0·8	0·0060	80″	0·0030″
0·4	0·0013	40″	0·0007″	0·9	0·0124	90″	0·0064″
0·5	0·0019	50″	0·0010″	1·0	∞	100″	∞

Nach dieser Tabelle ist in der Fig. 69 die Curve AE gezeichnet, welche die neutrale Schichte im Längendurchschnitte bildet.

Fig. 69.



Man entnimmt, dass die Gleichung zwischen e und x vom 2. Grade ist, und die Curve AE insbesondere eine Hyperbel vorstellt, für welche die durch B gezogene Verticale eine Assymtote ist, wenn die Längenaxe AB geradlinig gezeichnet wird. Zugleich bemerkt man, dass die neutrale Schichte durch den grössten Theil der Länge so nahe mit der Längenaxe zusammenfällt, dass man die Differenz mittelst Zeichnung gar nicht darzustellen im Stande ist.

Ad II). Nach §. 61 ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Qx}{6mtl}(3l^2 - 3lx + x^2)$ und $z = \frac{1}{2}(l-x)$, also auch

$$e = \frac{Qd^2x}{3mtl}\left(\frac{3l^2-3lx+x^2}{l-x}\right) = \frac{8d^2\delta x}{l^4}\left(\frac{l^2-lx+\frac{1}{3}x^2}{l-x}\right),$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = 8\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)\left\{\frac{1-\left(\frac{x}{l}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{l}\right)}\right\}.$$

Construirt man hienach die neutrale Schichte im Längendurchschnitte, so wird man sich gleichfalls überzeugen, dass der grösste Theil der Längenaxe mit der erwähnten Schichte bis auf unwesentliche Differenzen zusammenfällt.

Ad III). In diesem Falle besteht die Curve, welche die neutrale Schichte im Längendurchschnitte vorstellt, aus 2 symmetrischen Theilen, von welchen jeder Theil nach der Gleichung ad I zu construiren ist, wenn man daselbst $\frac{1}{2}l$ statt l setzt. Es leuchtet ein, dass auch in diesem Falle die neutrale Schichte ohne merklichen Fehler grösstentheils durch die Schwerpuncte der Querschnitte gehend angenommen werden kann.

Ad IV). Nach §. 65 ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2mtl}(\frac{1}{4}l^2x - \frac{1}{3}x^3)$ und

$$z = \frac{R\,\mathfrak{z}}{R} = \frac{-\frac{1}{2}Q(\frac{1}{2}l - x) + \frac{Q}{2l}(\frac{1}{2}l - x)^2}{-\frac{1}{2}Q + \frac{Q}{l}(\frac{1}{2}l - x)} = \frac{\frac{1}{4}l^2 - x^2}{2x},$$

also auch

$$e = -\frac{d^2 Q}{mtl} \cdot \frac{x^2(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{\frac{1}{4}l^2 - x^2} = \frac{384}{5} \cdot \frac{d^2\delta}{l^4} \cdot \frac{x^2(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{\frac{1}{4}l^2 - x^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{e}{\delta} = \frac{384}{5}\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\left\{1 + \frac{\frac{8}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2}{1 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2}\right\}.$$

Wird hierach die Form der neutralen Schichte construirt, so bemerkt man abermals, dass die Entfernung e derselben von der Längenaxe für solche Abscissen von x, welche sich dem Werthe $\pm\frac{1}{2}l$ nicht allzusehr nähern, als verschwindend klein angesehen werden kann. Es ist übrigens merkwürdig, dass die fragliche Grösse e in allen 4 Fällen sogar gegen die kleine Biegung δ zumeist verschwindet *).

---

*) Anmerkung. Es ist übrigens nicht nöthig, die zur Bestimmung der Function zwischen e und x eingeführten Näherungen wirklich anzuwenden. Man kann diese Function auch ohne irgend welche Vernachlässigung finden. Es wird genügen, die fragliche Methode nur für einen, z. B. den I. Fall, anzugeben. Ist nämlich $d\sigma$ das Bogenelement der Biegungscurve und behält man die übrigen Bezeichnungen bei, so ist $\varrho' = \frac{d\sigma}{d\varphi}$, $d\sigma = \frac{dx}{\cos\varphi}$ und $\varrho' = \frac{dx}{d\varphi\cos\varphi} = \frac{dx}{d\sin\varphi}$, daher wegen $\mathfrak{z} = l - x$ und $R = Q$ nach der Gleichung (45)

$$\frac{dx}{d\sin\varphi} = \frac{d^2}{l-x} \cdot \left(\frac{mf}{Q} + \sin\varphi\right).$$

Hieraus folgt

$$(l-x)\,dx = d^2\left[\frac{mf}{Q}\,d\sin\varphi + \sin\varphi\,d\sin\varphi\right]$$

und durch Integration

$$lx - \tfrac{1}{2}x^2 = d^2\left[\frac{mf}{Q}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi^2\right],$$

sofort aber

$$\sin\varphi = -\frac{mf}{Q} + \sqrt{\frac{m^2f^2}{Q^2} + \frac{2lx - x^2}{d^2}},$$

endlich

§. 72.

Bestimmung des Moduls m aus der Grösse der Biegung. So wie die Grösse der Biegung aus dem Modul m und den übrigen Grössen t, Q und l berechnet werden kann, so lässt sich auch umgekehrt die Grösse m bestimmen, wenn die Biegung δ aus einer wirklichen Messung bekannt ist. Die Berücksichtigung der Fälle III und IV erscheint zu derartigen Versuchen als die geeignetste. Wird nämlich ein Prisma auf beiden Enden aufgelegt, und in der Mitte mit der Belastung Q_3 in Anspruch genommen, das eigene Körpergewicht aber mit Q_4 bezeichnet, so hat man offenbar nach dem §. 69

$$\delta = \tfrac{1}{48}\,(Q_3 + \tfrac{5}{8}\,Q_4)\,\frac{l^3}{m\,t},\text{ daher auch}$$

$$m = \tfrac{1}{48}\,(Q_3 + \tfrac{5}{8}\,Q_4)\,\frac{l^3}{\delta\,t}.$$

Man kann übrigens das Resultat für den Modul auch unabhängig von dem eigenen Körpergewichte machen. Zu diesem Behufe lasse man die Belastung Q_3 um ΔQ_3, und die Biegung δ um $\Delta\delta$ zunehmen, und beachte, dass sodann

$$\Delta\delta = \frac{\Delta Q_3\, l^3}{48\, m\, t},\text{ also auch}$$

$$m = \frac{\Delta Q_3\, l^3}{48\, l\, \Delta\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} = \frac{d^3}{l-x}\left[-\frac{m f}{Q} + \sqrt{\frac{m^2 f^2}{Q^2} + \frac{2 l x - x^2}{d^2}}\right]$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = \frac{l^2}{3\,\delta^2}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{l}}\right)\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{9\,\delta^2 d^2}{l^4}\left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)}\right],$$

welche Formel nicht nur für sehr kleine Biegungen, sondern allgemein gilt, wenn nur die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, und l die horizontale Projection der Biegungscurve bedeutet Für sehr kleine Biegungen folgt wieder die genäherte Formel ad I

$$\frac{e}{\delta} = \frac{3\,d^2}{l^2}\cdot\left\{\frac{\frac{x}{l} - \frac{x^2}{2\,l^2}}{1-\frac{x}{l}}\right\} = \frac{3\,d^2}{l^2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1-\left(\frac{x}{l}\right)}\right\}.$$

wird, wonach der Modul aus der betreffenden Belastungs- und beobachteten Biegungszunahme berechnet werden kann.

Die Werthe des Moduls für die verschiedenen Materialien, welche nach dieser gleichsam indirecten Methode gefunden werden, stimmen für die Praxis genau genug mit jenen Resultaten überein, welche auf die im §. 25 erwähnte directe Art erhalten werden. Nur sind die ersteren in der Regel etwas grösser, als die letzteren. Zur Erkläruug dieser bemerkenswerthen Thatsache können 3 Gründe angegeben werden:

1. In Folge der genäherten Gleichung (46) $\varrho = \varrho'$ wird der Krümmungshalbmesser der Biegungscurve etwas zu klein, daher die berechnete Biegung δ etwas grösser, als die wirklich vorhandene. Indem nun das Mass dieser letzteren aus Versuchen gefunden, und in die betreffenden Formeln für m substituirt wird, so entsteht in denselben ein etwas kleinerer Nenner, als die Theorie angibt, daher ein etwas grösseres Resultat für m, als die directen Versuche ergeben.

2. In der Fundamentalgleichung (47) ist eine zweite Näherung dadurch eingeführt worden, dass man wegen der vorausgesetzten geringen Biegungen den Werth des Krümmungshalbmessers

$$\varrho' = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \text{ mit } \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

verwechselt, und daher abermals etwas zu klein angenommen hat. Diese Näherung übt daher auf den Werth des Moduls, wenn solcher aus Versuchen über die Biegung bestimmt wird, einen analogen Einfluss aus, wie ad 1 angegeben wurde.

3. Nach den §§. 12 und 13 ist der Modul innerhalb der Gränzen der Elasticität streng genommen keine constante Grösse, sondern vielmehr nur als ein Durchschnittswerth anzusehen. Die Erörterungen über die speciellen Materialien in den §§. 18 bis 23 lassen erkennen, dass dieser Durchschnittswerth desto grösser ausfällt, je geringer die hervorgerufenen Spannungen oder Pressungen sind. Da nun bei der Methode zur directen Bestimmung des Moduls die Anspruchsnahme des Materials sich gleichmässig über den ganzen Querschnitt vertheilt, während bei der indirecten Methode diese Vertheilung eine ungleichförmige ist, indem die Spannungen und Pressungen in den Fasern je nach ihrer

Entfernung von der neutralen Schichte von Null an bis zu einem gewissen Grade wachsen, so erkennt man leicht, dass der Modul nach der indirecten Methode abermals etwas grösser, als nach der directen ausfallen werde, wenn man beiderseits, wie sich diess von selbst versteht, ein systemmässiges Verfahren beobachtet.

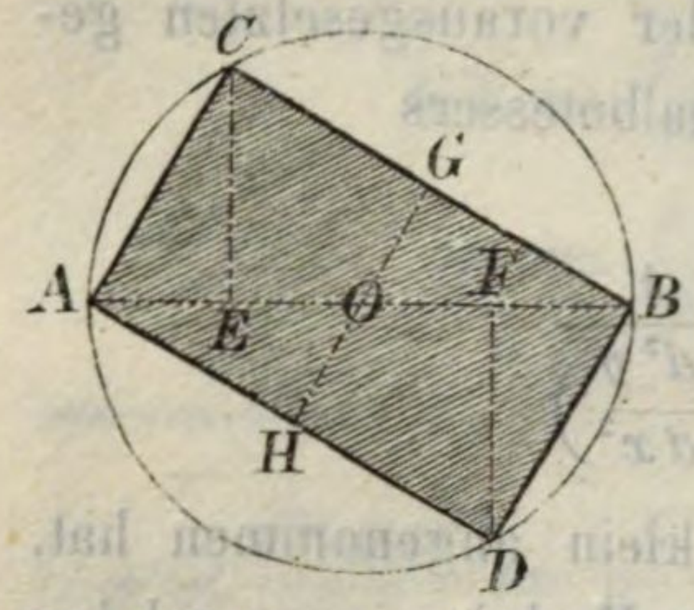
Die fraglichen Differenzen sind übrigens, wie bemerkt, geringfügig genug, um dieselben ausser Acht lassen zu dürfen und sonach die Gleichheit des Moduls für die Ausdehnung, Zusammendrückung und Biegung um so mehr anzunehmen, als aus Anlass der Verschiedenheit in der Materialsqualität weit grössere Unregelmässigkeiten hervorgerufen werden können.

§. 73.

Aus einem runden Baumstamm einen vierkantigen Balken von der grössten Steifigkeit zu zimmern.

Es sei (Fig. 70) der Querschnitt des Baumstammes ein Kreis, dessen Mittelpunct in O sich befindet, das Rechteck $ABCD$ aber der Querschnitt für den zu zimmernden Balken. Man betrachte diesen rechteckigen Querschnitt in der Stellung der Fig. 41 und setze

Fig. 70.



die Breite AC . . . . . $= b$,
„ Höhe BC . . . . . $= h$,
den Durchmesser des Kreises AB $= c$,
die Abscisse AE . . . . . $= x$,
„ Ordinate CE . . . . . $= y$,
„ Fläche $ABCD$ . . . . . $= f$,
und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung auf die durch den Schwerpunct O mit der Breite AC parallel gehende Axe . . . . . $= t$.

Dieser Bezeichnung gemäss hat man $y = \sqrt{cx - x^2}$, $b = \sqrt{cx}$, $h = \sqrt{c(c-x)}$, $f = bh = c\sqrt{cx - x^2}$, und nach der Formel (51) $t = \frac{1}{12} f h^2 = \frac{c^2}{12}\sqrt{x(c-x)^3}$. Die Steifigkeit des gezimmerten Balkens wird am grössten, wenn die Biegung am kleinsten, daher t ein Maximum wird. Indem nun t mit $x(c-x)^3$ variirt, hat man behufs der Bestimmung des fraglichen Maximums

$\frac{d[x(c-x)^3]}{dx} = (c-x)^3 - 3(c-x)^2 x = (c-x)^2(c-4x) = 0,$

hieraus aber $x = \frac{1}{4}c$, für welchen Werth $\frac{d^2[x(c-x)^3]}{dx^2}$ negativ wird.

Es wird also der beabsichtigte Zweck erreicht wenn man $AE = EO = OF = BF = \frac{1}{4}AB$ macht, nämlich den Durchmesser in 4 gleiche Theile theilt, und sodann zur Bestimmung der Puncte C und D die Perpendikel CE und DF auf AB construirt. Nach dieser Anordnung erhält man $b = \frac{1}{2}c$ und $h = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, d. h. die Breite $AC =$ dem Halbmesser AO, so wie $\sphericalangle CAB = 60^0$ und $\sphericalangle CBA = 30^0$. Auch ist $b:h = 1:\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}:1 = 1:1{\cdot}7321 = 0{\cdot}5774:1$, ferner

$$f = bh = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 0{\cdot}4330\,c^2 = 0{\cdot}5514\,F \text{ und}$$

$$t = \tfrac{1}{12}fh^2 = \frac{c^4\sqrt{3}}{64} = 0{\cdot}0271\,c^4 = 0{\cdot}5514\,T,$$

wobei $F = \frac{c^2\pi}{4}$ die Kreisfläche, und $T = \frac{c^4\pi}{64}$ der Formel (53) gemäss das Trägheitsmoment derselben bezeichnet. Die Biegung dieses steifsten vierkantigen Balkens wäre daher $\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0{\cdot}5514} = 1{\cdot}8138$ mal grösser, als die des runden unbezimmerten Stammes, wenn die übrigen Umstände als gleich, und überdiess die allgemeinen Voraussetzungen als verhanden angenommen werden.

Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragmoment und Tragvermögen.

§. 74.

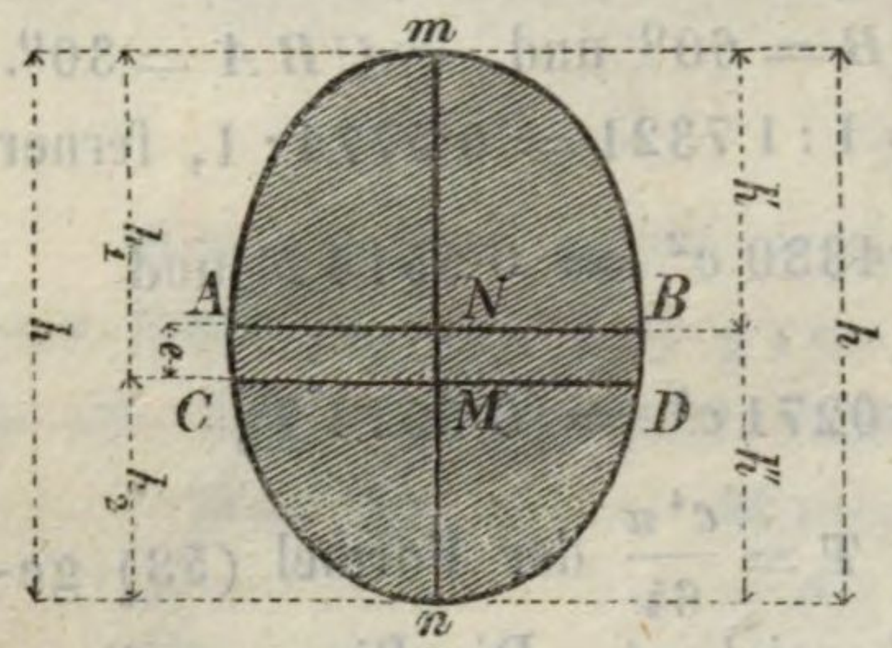
Anspruchsnahme des Materials. Diese Anspruchsnahme besteht in Spannungen und Pressungen, welche zu Folge der Biegung in den Fasern eintreten. Die grösste Spannung s und die grösste Pressung p in einem beliebigen Querschnitte findet man nach dem §. 46 aus den Gleichungen (37) $\frac{sT}{h_1} = RZ$ und $\frac{pT}{h_2} = RZ$, oder da nach dem §. 52 $\frac{T}{Z} = \frac{t}{z}$ ist, auch aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{st}{h_1} &= Rz \\ \text{und } \frac{pt}{h_2} &= Rz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (90).$$

Das erste Glied in jeder dieser beiden Gleichungen stammt von von dem statischen Momente der hervorgerufenen Widerstände in den betreffenden Querschnitten her, und ist somit auf eine doppelte Weise ausgedrückt; das zweite Glied hingegen stellt das statische Moment der einwirkenden Kräfte mit Rücksicht auf den Hebelsarm z vor. Aus den Gleichungen (90) findet man

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h_1 R z}{t} \\ \text{und } p &= \frac{h_2 R z}{t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (91).$$

Fig. 71.



Es ist aber mit Rücksicht auf die Fig. 71 unter Beibehaltung der Bezeichnungen in den §§. 44, 45 und 54 offenbar

$$h_1 = h' + e$$
$$\text{und } h_2 = h'' - e$$

daher auch

$$s = \frac{h' R z}{t} + \frac{e R z}{t}$$
$$\text{und } p = \frac{h'' R z}{t} - \frac{e R z}{t},$$

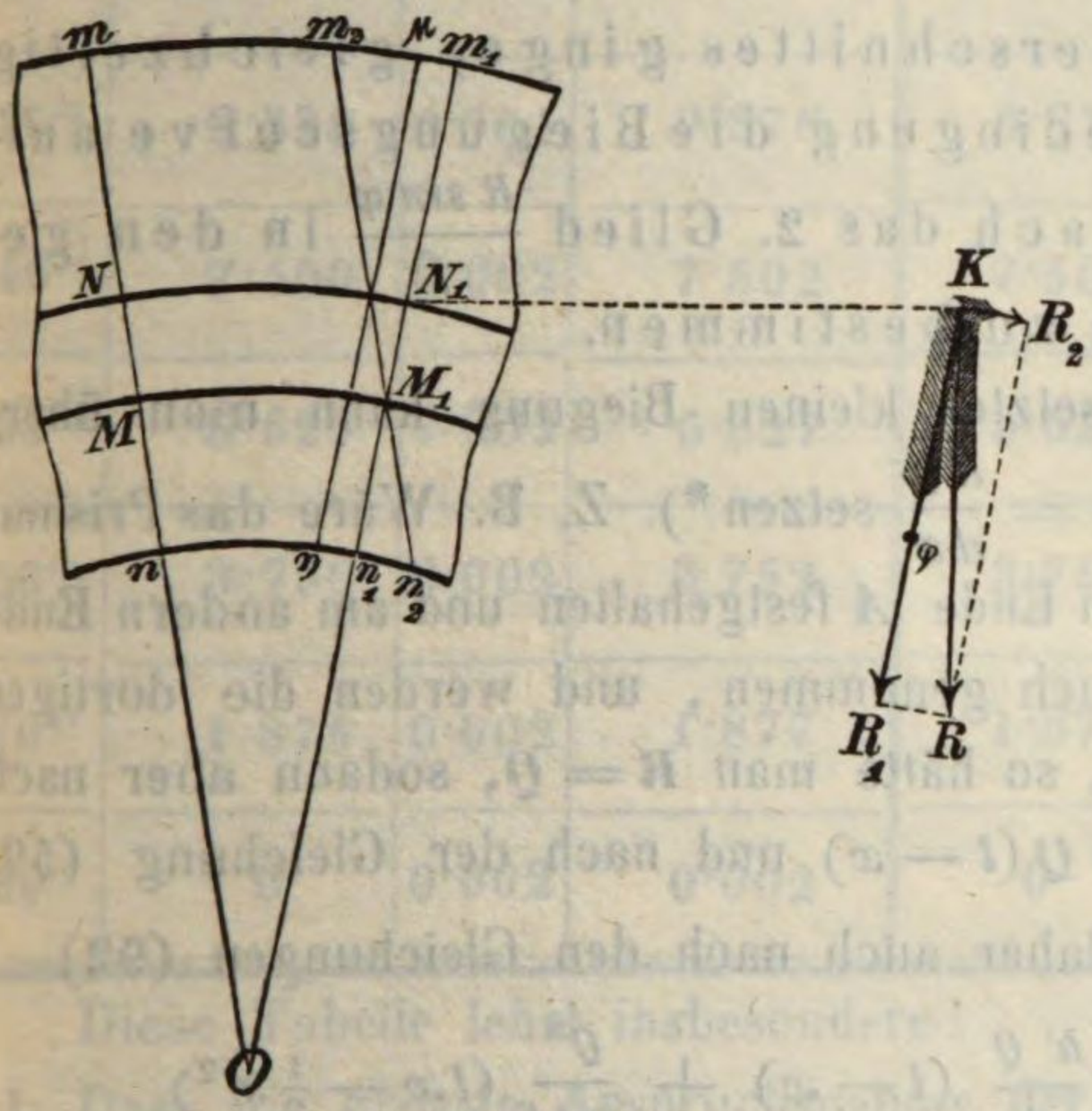
und endlich, da man nach der Gleichung (44) $e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z}$, weiters aber $t = f d^2$ setzen kann,

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h' R z}{t} + \frac{R \sin\varphi}{f} \\ \text{und } p &= \frac{h'' R z}{t} - \frac{R \sin\varphi}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (92).$$

Diese Gleichungen sind eben so wichtig, wie merkwürdig. Sie lehren zunächst, dass die grösste Spannung s aus der Summe zweier Spannungen $s_1 = \frac{h R z}{t}$ und $s_2 = \frac{R \sin\varphi}{f}$, hingegen die grösste Pressung p aus der Differenz zwischen der Pressung $p_1 = \frac{h'' R z}{t}$ und der vorhin mit s_2 bezeichneten Spannung bestehe, wobei, wie zu ersehen ist, s_1 und p_1 diejenigen Anspruchsnahmen vorstellen, welche eintreten würden, wenn die neutrale Axe genau durch

den Schwerpunct des Querschnittes ginge, während die Spannung s_2 von der Seitenkraft $R_2 = R \sin \varphi$ (Fig. 21) herrührt, und gewissermassen als die Correction der Grössen s_1 und p_1 für den Fall anzusehen ist, wenn die neutrale Axe in dem betreffenden Querschnitte eine andere Lage hätte. Dieser Analysirung gemäss lässt sich die Anspruchsnahme der Fasern mittelst der Fig. 72 anschaulich machen,

Fig 72.



in welcher $m\,n$ und $m_1\,n_1$ die Lagen zweier unendlich nahen Querschnitte nach der Biegung vorstellen, die ursprünglich zu einander parallel, also wie $m\,n$ und $m_2\,n_2$ gelegen sind. Hiebei ist $M\,M_1$ die neutrale Schichte im Längendurchschnitte, $N\,N_1$ aber die durch die Schwerpuncte der Querschnitte N und N_1 gehende Längenaxe des Prismas. Würde nun die letztere mit der neutralen Schichte zusammenfallen, oder $M\,N = e = o$ sein, so wäre $\mu\,\eta$ anstatt $m_1\,n_1$ die Lage des Querschnittes $m_2\,n_2$ nach der Biegung, und sodann $m_2\,\mu$ die durch die Spannung s_1 hervorgerufene Ausdehnung, hingegen $n_2\,\eta$ die durch die Pressung p_1 hervorgerufene Zusammendrückung. Liegt aber, wie im Allgemeinen die neutrale Schichte anders, so sind $\mu\,m_1$ und $\eta\,n_1$ die der Spannung s_2 entsprechenden Correcturen, um welche die eben erwähnte Ausdehnung $m_2\,\mu$ vermehrt und die Zusammendrückung $n_2\,\eta$ vermindert werden müssen, um die eigentlichen Längenveränderungen zu erhalten. Es ist nämlich

$$m_1\,m_2 = \mu\,m_2 + \mu\,m_1 \text{ und}$$
$$n_1\,n_2 = \eta\,n_2 - \eta\,n_1.$$

Man bemerkt zugleich, dass die Kraft

$$s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f} = \frac{R_2}{f}$$

einen Werth hat, welcher gleichfalls vorhanden wäre, wenn das Prisma mit der Kraft R_2 genau nach der Länge gezogen würde.

Zur Bestimmung der Werthe (92) muss man die Form der Biegungscurve kennen. Nach §. 52 hat die Vernachlässigung von e auf diese Form einen unwesentlichen Einfluss, daher auch dieselbe als zulässig erkannt wurde.

Aus diesem Grunde ist es erlaubt, die ersten Glieder $\frac{h' R z}{t}$ und $\frac{h'' R z}{t}$ in den Gleichungen (92) so zu berechnen, als wenn die neutrale Axe durch den Schwerpunct des Querschnittes ginge, gleichzeitig aber unter dieser Bedingung die Biegungscurve aufzusuchen, und hiernach das 2. Glied $\frac{R \sin \varphi}{f}$ in den genannten Gleichungen zu bestimmen.

Wegen der vorausgesetzten kleinen Biegung kann man überdiess näherungsweise $\sin \varphi = \frac{dy}{dx}$ setzen *). Z. B. Wäre das Prisma, wie in der Fig. 53, an einem Ende A festgehalten und am andern Ende B mit der Last Q in Anspruch genommen, und werden die dortigen Bezeichnungen beibehalten, so hätte man $R = Q$, sodann aber nach der Gleichung (58) $Rz = Q(l - x)$ und nach der Gleichung (59) $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{mt}(lx - \frac{1}{2}x^2)$, daher auch nach den Gleichungen (92)

$$s = s_1 + s_2 = \frac{h' Q}{t}(l - x) + \frac{Q^2}{mtf}(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

$$\text{und } p = p_1 - s_2 = \frac{h' Q}{t}(l - x) - \frac{Q^2}{mtf}(lx - \tfrac{1}{2}x^2).$$

Zur näheren Specialisirung sei (wie im §. 68) der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten $b = 6''$ und $h = 8''$, daher $h' = h'' = \frac{1}{2}h = 4''$ und $t = \frac{1}{12}fh^2 = 256$; es sei ferner das Prisma aus Tannenholz, und für selbes $m = 16000$, endlich $Q = 12$ Zentner anzunehmen. Hiernach wird

$$s_1 = p_1 = \tfrac{3}{16}(l - x),\ s_2 = \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2),$$

$$s = \tfrac{3}{16}(l - x) + \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \text{ und}$$

$$p = \tfrac{3}{16}(l - x) - \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2).$$

Aus folgender Tabelle kann man die grössten Spannungen und Pressungen per □″ in Zentnern in verschieden gelegenen Querschnitten entnehmen, wobei $l = 80''$ gesetzt wurde.

---

*) Man könnte selbstverständlich auch des genauen Werthes für $\sin \varphi$ nach der Anmerkung ad §. 71 sich bedienen, welcher auch für grössere Biegungen giltig wäre.

x	s_1	s_2	$s = s_1 + s_2$	p_1	p_2	$p = p_1 - s_2$
0″	15·000	0	15·000	15·000	0	15·000
10″	13·135	0·001	13·126	13·125	0·001	13.124
20″	11·250	0·001	11·251	11·250	0 001	11·249
30″	9·375	0·001	9·376	9·375	0·001	9·374
40″	7·500	0·002	7 502	7·500	0 002	7·498
50″	5·625	0·002	5·627	5·625	0·002	5·623
60″	3·750	0·002	3 752	3·750	0·002	3·748
70″	1·875	0·002	1·877	1·875	0·002	1·873
80″	0	0·002	0·002	0	0 002	— 0·002

Diese Tabelle lehrt insbesondere:

1. Dass die grösste Anspruchsnahme der Fasern für $x = 0$, also in dem festgehaltenen Querschnitte in A statt finde;

2. dass die Werthe von s_1 und p_1 von 15 Zentnern bis 0 abnehmen, hingegen gleichzeitig die von s_2 von 0 bis 0·002 Zentner wachsen, wenn x von 0 bis l zunimmt;

3. dass für $x = l$, also in dem Endquerschnitte nur die alleinige Anspruchsnahme s_2 vorhanden sei, demzufolge $s = 0{\cdot}002$ und $p = -0{\cdot}002$ werden, und daher beiderseits gleiche Spannungen entstehen, indem offenbar der negative Werth von p gleichfalls eine Spannung bedeutet;

4. dass die Werthe von s_2 gegen s_1 und p_1 wegen ihrer Kleinheit grösstentheils, nämlich in so lange ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden dürfen, als x der Länge l sich nicht allzusehr nähert, dass aber diese Vernachlässigung in dem Falle, als x von l nicht viel verschieden ist, nicht mehr statt finden dürfe;

5. endlich, dass bei dem Umstande, als die ad 4 erwähnte Vernachlässigung mit der Hypothese $e = 0$ gleichzuhalten ist, auch ge-

sagt werden könne, es sei bezüglich der Beurtheilung der Anspruchsnahme hinreichend genau, die neutrale Schichte durch die Schwerpuncte der Querschnitte gehen zu lassen, wenn diese letzteren nicht zu nahe an jene Stelle gewählt werden, wo der Krümmungshalbmesser unendlich gross ist.

Die vorigen Schlussfolgerungen beziehen sich zwar insbesondere auf das gewählte Beispiel, sie werden jedoch der Hauptsache nach beinahe immer auf dieselbe Weise sich darstellen, und es wird in den meisten Fällen, wenn es sich nur um sehr kleine Biegungen handelt, und hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, zulässig erscheinen, die neutrale Schichte durch die Längenaxe gehen zu lassen, wenn man nur denjenigen Stellen dieser letzteren sich nicht allzu sehr nähert, an welchen unendlich grosse Krümmungshalbmesser vorhanden sind. Man wird gegen die auf diese Weise sich ergebende Abkürzung um so weniger etwas einzuwenden haben, als in der That der zu vernachlässigen beabsichtigte Werth von e in den betreffenden Querschnitten nach Inhalt des §. 71 so klein gefunden wurde, dass er nicht wahrnehmbar, oder doch als unwesentlich zu betrachten ist.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkung kann man sich erlauben, in vorkommenden Fällen statt den Formeln (92) die genäherten

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h' R z}{t} \\ \text{und } p &= \frac{h'' R z}{t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

zu gebrauchen, wenn nur hierin z nicht zu klein wird, weil $z = 0$ mit $\varrho' = \infty$ correspondirt.

§. 75.

Gefährlicher Querschnitt. So wie im §. 26 nenne man auch hier von allen Querschnitten des materiellen Prismas denjenigen den gefährlichen Querschnitt, in welchem vergleichsweise bei hinreichender Grösse der einwirkenden Kräfte zuerst die Gränze der Elasticität bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung erreicht, daher die geringste Sicherheit für den Zusammenhang der Materie vorhanden ist. Auf diesen besonderen Querschnitt, welcher die schwächste Stelle des Prismas bezeichnet, ist das vorzüglichste Augenmerk zu richten, weil die nöthige Sicherheit, wenn sie an dieser Stelle vorhanden ist, um so mehr an allen übri-

gen Stellen vorhanden sein wird. Die Formeln (93) zeigen, dass die Spannung s und die Pressung p desto grösser werden, je grösser das statische Kraftmoment Rz ist, und dass daher für den gefährlichen Querschnitt dieses Moment Rz ein Maximum werden muss. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass es sich nicht um ein analytisches, sondern vielmehr um ein numerisches Maximum handelt, obgleich in manchen Fällen beide Maxima identisch werden können. Uebrigens beschränkt man vorläufig sich nur auf solche Fälle, wo keine Wendepuncte in der Biegungscurve vorkommen*). Da nach dem §. 52 für sehr kleine Biegungen $\varrho' = \frac{m\,t}{Rz}$ gesetzt werden kann, daher der grösste Werth von Rz den kleinsten Werth von ϱ' bedingt, so folgt, dass sodann der gefährliche Querschnitt dort sich befindet, wo der Krümmungshalbmesser ϱ' der Biegungscurve ein numerisches Minimum wird.

Indem man nun auf die im §. 58 bezeichneten 4 Fälle übergeht, erkennt man sogleich, dass der gefährliche Querschnitt

im I. und II. Falle laut der §§. 60 und 62 in A, wo das Prisma festgehalten wird,

im III. und IV. Falle aber laut der §§ 64 und 66 in der Mitte der Länge des Prismas liegt, weil an diesen Stellen stets der Krümmungshalbmesser am kleinsten wird**).

§. 76.

Bemerkungen über das Gleichgewicht. Tragmoment. Ist das Gleichgewicht zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt vor-

---

*) Anmerkung. Bezüglich derjenigen Fälle, wo die Biegungscurve Wendepuncte hat, enthält das 2. Kapitel des 1. Abschnittes im 2. Hauptstücke das Nöthige.

**) Wollte man annehmen, dass die entwickelten Formeln auch dann giltig wären, wenn die Elasticitätsgränzen überschritten werden, so könnte man die Stelle für den gefährlichen Querschnitt auch die Bruchstelle nennen, weil sodann daselbst bei hinreichender Anspruchsnahme der Bruch des Prismas eintreten müsste. Da jedoch die angestellten Untersuchungen nicht so weit ausgedehnt werden dürfen, so ist es um so mehr angezeigt, die Benennung Bruchstelle zu umgehen, als man in der Praxis die Körper keineswegs zu brechen, sondern nur ohne Gefahr ihres Bestandes in Anspruch zu nehmen hat.

handen, so herrscht offenbar auch Gleichgewicht in Beziehung auf alle übrigen Querschnitte. Zur Beurtheilung des Gleichgewichtes bei dem der Biegung ausgesetzten Prisma ist es daher genügend, die betreffenden Bedingungen hinsichtlich des gefährlichen Querschnittes aufzustellen. Man hat nun nach den Gleichungen (93) unter der dort angeführten Beschränkung allgemein die Relation

$$\frac{s\,t}{h'} = \frac{p\,t}{h''} = R\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94),$$

und in Gemässheit derselben Folgendes zu beachten:

1. Das statische Widerstandsmoment ist entweder $\frac{s\,t}{h'}$ oder $\frac{p\,t}{h''}$, wonach man entweder die Spannung s der gespanntesten oder aber die Pressung p der am meisten gepressten Fasern mit dem Trägheitsmomente des Querschnittes in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct anzunehmende neutrale Axe multiplicirt, und durch den Abstand h' der gespanntesten oder beziehungsweise h'' der gepresstesten Fasern von jener Axe dividirt.

2. Da zu Folge des §. 44 $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$ die Anspruchsnahme (Spannung, Pressung) der Fasern in der Entfernung 1 von der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe bezeichnet, so kann auch das Widerstandsmoment, wie bereits im §. 46 selbst ohne Vernachlässigung des Werthes von e gezeigt wurde, gefunden werden, wenn man die vorerwähnte Anspruchsnahme in der Entfernung 1 von der neutralen Axe mit dem Trägheitsmomente t multiplicirt.

3. Wenn im gefährlichen Querschnitte die Elasticitätsgränze entweder bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung in den von der neutralen Axe beiderseits am entferntest gelegenen Fasern erreicht wird, so ist das grösste zulässige Widerstandsmoment vorhanden, welches ohne Gefahr für den Bestand des Prismas keine Steigerung mehr erfahren kann. Dieses Widerstandsmoment soll im Nachfolgenden Tragmoment heissen, und dessen Werth mit M bezeichnet werden *).

---

*) Wollte man annehmen, dass die entwickelten Formeln auch für den Bruch giltig wären, so würde man auf ähnliche Weise auch zur Kenntniss des Bruchmomentes gelangen können. Allein abgesehen davon, dass die

Dieser Werth von M wird sodann zur Kenntniss führen, wie weit das statische Moment Rz der einwirkenden Kräfte in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt mit Sicherheit gesteigert werden, und wie gross die diessfalls zu tragende Belastung sein könne.

§. 77.

Berechnung des Tragmomentes. Es leuchtet ein, dass das Tragmoment gefunden wird, wenn entweder die Spannung s oder die Pressung p die Elasticitätsgränze erreicht, also in der Gleichung (94) im Sinne des §. 12 entweder $s = a$ oder $p = r$ gesetzt wird.

Hiernach ist das Tragmoment

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \text{entweder } \frac{at}{h'} \\ \text{oder } \frac{rt}{h''} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (95),$$

und es ist von diesen alternativen Werthen selbstverständlich der kleinere anzunehmen, da das Widerstandsmoment keinen der beiden Werthe überschreiten, sondern höchstens den kleineren erreichen darf.

Man hat also abweichend von den bisherigen Theorien im Allgemeinen 2 Formeln zur Bestimmung des Tragmomentes, von welchen jedoch nur die Eine Mass und Ziel zu geben hat. Ob diese die erste oder zweite ist, lässt sich ohne Kenntniss der Querschnittsform und der Materialgattung nicht angeben. Es kann indess geschehen, dass die Quotienten $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ einander gleich werden, und sofort die Wahl des einen oder andern Werthes gleichgiltig wäre. Nach §. 54 hat der Werth des Trägheitsmomentes für einen Querschnitt stets die Form $t = cfh^2$, und da die Grössen h' und h'' je nach der Lage des Schwerpunctes im Querschnitte gewisse Theile von der Höhe h bilden, so erkennt man, dass jeder der Quo-

---

Schlussfolgerungen nicht so weit ausgedehnt werden dürfen, hätte auch die Kenntniss des Bruchmomentes für die Praxis keinen erheblichen Werth, da man die Körper keineswegs zu brechen, sondern nur ohne Gefahr ihres Bestandes in Anspruch zu nehmen hat.

tienten $\frac{t}{h'}$ und $\frac{t}{h'}$ und mit ihnen auch das Tragmoment unter sonst gleichen Umständen dem Producte fh oder bh^2 proportionirt sein, daher mit der Breite b im einfachen und mit der Höhe h im quadratischen Verhältnisse stehen muss. Hieraus folgt, dass die Tragmomente bei prismatischen Körpern mit ähnlichen Querschnitten, alles Uebrige gleich gesetzt, mit den dritten Potenzen der homologen Querschnittsseiten im Verhältnisse stehen.

§. 78.

Tragmoment einfacher Figuren. Geht man sogleich auf die einfachen Figuren über, welche im §. 55 erörtert wurden, so enthält man folgende Werthe des Tragmomentes M:

1. Für ein Rechteck in der Stellung Fig. 41 ist wegen

$$h' = h'' = \tfrac{1}{2}h \text{ und } t = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}fh^2,$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{6}abh^2 = \frac{1}{6}afh \\ \text{oder } \frac{1}{6}rbh^2 = \frac{1}{6}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (96).$$

Für das Quadrat ist $b = h$ zu setzen.

2. Für ein Rhombus (Fig. 42) ist wegen $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ und $t = \frac{1}{48}bh^3 = \frac{1}{24}fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{24}abh^2 = \frac{1}{12}afh \\ \text{oder } \frac{1}{24}rbh^2 = \frac{1}{12}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (97).$$

Dieselben Formeln gelten auch für die Figuren 43 und 44, wenn hiebei gleichfalls $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ ist.

3. Für eine Ellipse (Figur 45) hat man wegen $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ und $t = \frac{\pi}{64}bh^3 = \frac{1}{16}fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{\pi}{32}abh^2 = \frac{1}{8}afh \\ \text{oder } \frac{\pi}{32}rbh^2 = \frac{1}{8}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (98).$$

Dieselben Formeln gelten auch für den Kreis und für eine anders gestellte Ellipse (Fig. 46), wenn nur statt f und h die geeigneten Werthe gesetzt werden.

4. Für eine halbe Ellipse (Fig. 47) hat man im Falle, wenn die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, wegen $h' = 0{\cdot}576\,h$, $h'' = 0{\cdot}424\,h$ und $t = 0{\cdot}070\,fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } 0{\cdot}122\,afh \\ \text{oder } 0{\cdot}165\,rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99);$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, wegen $h' = 0{\cdot}424\,h$ und $h'' = 0{\cdot}576\,h$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } 0{\cdot}165\,afh \\ \text{oder } 0{\cdot}122\,rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100),$$

Die Formeln (99) und (100) gelten auch für den Halbkreis.

5. Für ein Dreieck (Fig. 48) hat man im Falle, wenn die Fasern an der Spitze ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden, wegen $h' = \frac{2}{3}h$, $h'' = \frac{1}{3}h$ und $t = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{18}fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{24}abh^2 = \frac{1}{12}afh \\ \text{oder } \frac{1}{12}rbh^2 = \frac{1}{6}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101);$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die Fasern an der Basis ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12}abh^2 = \frac{1}{6}afh \\ \text{oder } \frac{1}{24}rbh^2 = \frac{1}{12}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102).$$

6. Für ein Parabelsegment (Fig. 49) erhält man wegen $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ und $t = \frac{1}{30}bh^3 = \frac{1}{20}fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{15}abh^2 = \frac{1}{10}afh \\ \text{oder } \frac{1}{15}rbh^2 = \frac{1}{10}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103).$$

7. Für ein Parabelsegment in der Stellung der Fig. 50, ist im Falle, wenn die Fasern oben ausgedehnt und unten zusammengedrückt werden, wegen $h' = \frac{3}{5}h$, $h'' = \frac{2}{5}h$ und $t = \frac{8}{175}bh^3 = \frac{12}{175}fh^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{8}{105}abh^2 = \frac{4}{35}afh \\ \text{oder } \frac{12}{105}rbh^2 = \frac{6}{35}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (104);$$

im Falle aber, wenn die Fasern unten ausgedehnt und oben zusammengesetzt werden, wegen $h' = \frac{2}{5}h$ und $h'' = \frac{3}{5}h$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{12}{105}abh^2 = \frac{6}{35}afh \\ \text{oder } \frac{8}{105}rbh^2 = \frac{4}{35}rfh \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105).$$

§. 79.

Hauptsätze für das Tragmoment. Obwohl es keine Schwierigkeit hat, von den für das Tragmoment aufgestellten 2 (Alternativ-) Formeln jedesmal die richtige, nämlich die den kleineren Werth gebende zu wählen, so ist es doch nothwendig, zur klaren Auffassung der Sache und bei der Neuheit derselben noch folgende allgemeine Hauptsätze der besonderen Aufmerksamkeit zu empfehlen:

1. Für $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, für $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$ gibt stets die erste der Formeln (95) den kleineren Werth, und man hat in diesem Falle

$$M = \frac{a\,t}{h'},$$

d. h. es wird sodann die Gränze der Elasticität nur in den gespanntesten, nicht aber auch zugleich in den gepresstesten Fasern erreicht. In der That hat man, wenn die grösste vorkommende Spannung und Pressung s und p heissen, im Sinne der allgemeinen Gleichung (31) $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$, also auch für $s = a$ sofort

$$p = \frac{h''}{h'}\,a < r.$$

So z B. wäre für ein gusseisernes Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) zuerst $\frac{h'}{h''} = 1$, und wenn nach dem § 21 etwa $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ angenommen würde, $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach der Gleichung (96)

$$M = \tfrac{1}{6}\,a\,b\,h^2 = \tfrac{1}{6}\,a\,f\,h,$$

was man übrigens auf den ersten Blick ersieht, indem wegen $r > a$ offenbar von den beiden gegebenen Alternativ-Formeln (96) $\frac{1}{6}\,a\,f\,h$ einen kleineren Werth hat, als $\frac{1}{6}\,r\,f\,h$.

Um noch ein zweites Beispiel anzuführen, sei ein Prisma aus Schmiedeeisen mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48) derart in Anspruch genommen, dass die Fasern an der Spitze des Dreiecks ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden. In diesem Falle hätte man $\frac{h'}{h''} = 2$, und wenn etwa nach §. 18 $\frac{a}{r} = 1$ gesetzt würde, $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (101)

$$M = \tfrac{1}{24}\,a\,b\,h^2 = \tfrac{1}{12}\,a\,f\,h.$$

Redtenbacher und Burg nehmen diesen besonderen Fall ad 1 als den allgemeinen an, indem diese Schriftsteller den Bruch stets in Folge des Zerreissens der gespanntesten Fasern eintreten lassen, und auf Grundlage dieser Vorstellung hin sodann auf das sichere Widerstandsmoment (Tragmoment) schliessen. Die von ihnen gegebenen Formeln werden daher nur dann richtig sein, wenn es in der That zulässig ist, die grösste Spannung bis zur Elasticitätsgränze zu treiben, ohne gleichzeitig diese Gränze in den gepresstesten Fasern zu überschreiten.

2. Für $\frac{a}{h'} > \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, für $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$ gibt stets die zweite der Formeln (95) den kleineren Werth, und man hat in diesem Falle

$$M = \frac{r\,t}{h''},$$

d. h. es wird sodann die Gränze der Elasticität nur in den gepresstesten, nicht aber auch zugleich in den gespanntesten Fasern erreicht. In der That hat man, wenn wieder die grösste vorkommende Spannung und Pressung s und p heissen, wegen $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$ für $p = r$ sofort

$$s = \frac{h'}{h''}\,r < a.$$

So z. B. wäre für ein Prisma aus Holz mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) $\frac{h'}{h''} = 1$, und da nach §. 22 $a > r$ anzunehmen ist, $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach den Gleichungen (96)

$$M = \tfrac{1}{6}\,r\,b\,h^2 = \tfrac{1}{6}\,r\,f\,h,$$

was man gleichfalls *a priori* entnimmt, indem wegen $a > r$ in den alternativen Formeln (96) offenbar $\frac{1}{6}\,r\,f\,h$ einen kleineren Werth gibt, als $\frac{1}{6}\,a\,f\,h$.

Wird als zweites Beispiel ein Prisma aus Schmiedeeisen mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48) doch so gewählt, dass die Fasern an der Basis des Dreieckes ausgedehnt, und an der Spitze zusammengedrückt werden, so hat man sodann $\frac{h'}{h''} = \frac{1}{2}$ und, wenn man wie früher $\frac{a}{r} = 1$ annimmt, $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (102)

$$M = \tfrac{1}{24}\,r\,b\,h^2 = \tfrac{1}{12}\,r\,f\,h.$$

Der vorhergehenden Anmerkung zufolge leuchtet ein, dass für diesen Fall ad 2 die Formeln von Burg und Redtenbacher desto unrichtigere Resultate geben werden, je mehr die Werthe von $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ unter einander verschieden sind. So z. B. wäre nach diesen Schriftstellern für das oben betrachtete dreiseitige Prisma aus Schmiedeeisen der Werth $M = \frac{1}{12}\,a\,b\,h^2$ anzunehmen, welcher wegen $a = r$ gerade doppelt so gross würde, als der oben gefundene Werth $\frac{1}{24}\,r\,b\,h^2$.

3. Ist $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, so geben beide Formeln (95) dasselbe Resultat und man hat

$$M = \frac{at}{h'} = \frac{rt}{h''},$$

d. h. es werden in diesem Falle die Gränzen der Elasticität in den gespanntesten und gepresstesten Fasern gleichzeitig erreicht. In der That hat man, wenn die grösste vorkommende Spannung und Pressung s und p heissen, wegen $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$, für $s = a$ sofort

$$p = \frac{h''}{h'} a = r^{*}).$$

So z. B. wäre für ein schmiedeeisernes Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) zuerst $\frac{h'}{h''} = 1$ und, wenn wieder $\frac{a}{r} = 1$ angenommen würde, $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach den Formeln (96)

$$M = \tfrac{1}{6} a b h^2 = \tfrac{1}{6} r b h^2 = \tfrac{1}{6} a f h = \tfrac{1}{6} r f h,$$

also alle Werthe einander gleich.

Eben so wäre für ein gusseisernes Prisma mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48), wenn die Fasern an der Basis des Dreieckes ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden, $\frac{h'}{h''} = \frac{1}{2}$, und wenn man ferners das Durchschnittsverhältniss $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ zulässt, sofort $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (102)

$$M = \tfrac{1}{12} a b h^2 = \tfrac{1}{24} r b h^2 = \tfrac{1}{6} a f h = \tfrac{1}{12} r f h.$$

4. Liegt der Schwerpunct in der halben Höhe, so ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, und es wird von den Alternativformeln (95) diejenige den kleineren Werth geben, in welcher die kleinere von den beiden Grössen a und r sich befindet. In diesem Falle würde daher

für Holzmaterialien . . . $M = \frac{rt}{h''}$, und

für Gusseisen . . . . . $M = \frac{at}{h'}$ zu setzen sein,

*) In diesem Falle geben die Formeln von Burg und Redtenbacher richtige Resultate.

während für Schmiedeeisen, wenn man die durchschnittliche Annahme $a = r$ gelten lässt, beide Werthe $\frac{at}{h'}$ und $\frac{rt}{h''}$ gleich wären.

5. Für solche Materialien, deren Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung gleich sind, hat wegen $\alpha = r$ offenbar von den beiden Alternativformeln (95) $\frac{at}{h'}$ und $\frac{rt}{h''}$ diejenige den kleineren Werth, in welcher der grössere Nenner vorhanden ist. Diese Regel kann im Allgemeinen für Schmiedeeisen gelten, weil man für dasselbe laut §. 18 im Durchschnitte $a = r$ setzen kann *).

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass die Wahl der zur Berechnung des Tragmomentes geeigneten Formel nicht nur von dem Querschnitte, sondern auch von dem Materiale abhänget, aus welchem das Prisma besteht. Es gibt nämlich nicht, wie nach den bisherigen Theorien angenommen wurde, für jeden Querschnitt eine allgemeine Formel, welche für feste elastische Körper angewendet werden kann, sondern man hat aus Ursache der Verschiedenheit der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung eigentlich zwei Formeln, von welchen je nach Umständen bald die eine, bald die andere anzuwenden ist, ohne dass hiedurch eine Absonderung in den Querschnitten oder Materialien veranlasst wird. Nur darf nicht übersehen werden, dass die für Holz, Schmiede- und Gusseisen angegebenen und in den angeführten Beispielen benützten Werthe des Quotienten $\frac{a}{r}$ im Sinne des §. 17 bloss abgerundete Durchschnitte seien, und daher in besonderen Fällen auch anders anzunehmen sein werden, wenn diess die Resultate aus Versuchen oder besondere Erfahrungen nothwendig machen.

---

*) Navier und nach ihm die meisten Schriftsteller lehren, dass in der Formel für das Widerstandsmoment als Nenner der Abstand der entferntesten Fasern von der durch den Schwerpunct gezogenen neutralen Schichte, also der grössere von den beiden Werthen h' und h'' zu setzen sei. Diese Annahme entspricht aber, wie oben bemerkt, nur dem besonderen Falle $a = r$, und hat ihren Grund darin, weil man früherer Zeit auf die Verschiedenheit der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung keine Rücksicht genommen hat. Navier's Lehre erscheint daher als keine allgemeine, und kann besonders bei Holz und Gusseisen zu unrichtigen Resultaten führen.

§. 80.

Folgerungen. Die für die Tragmomente gegebenen Formeln können mannigfaltige Resultate anschaulich machen. Es werden hievon einige angegeben:

1. Will man die Tragmomente vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten I und II (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen entwickeln können, und nennt man diese Tragmomente M_I und M_{II}, so hat man unter Beibehaltung der diesfälligen Bezeichnungen nach den Formeln (96) und (98)

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \alpha \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \alpha \end{cases} \text{ und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{8} a f \beta \\ \text{oder } \frac{1}{8} r f \beta, \end{cases}$$

und da von den Alternativwerthen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren als die kleineren Mass und Ziel zu geben haben, so ist ohne Ausnahme

$$M_I : M_{II} = \tfrac{1}{6}\alpha : \tfrac{1}{8}\beta = 4\alpha : 3\beta,$$

daher auch wegen $\alpha = \frac{\beta}{2}\sqrt{\pi}$

$$M_I : M_{II} = 2\sqrt{\pi} : 3 = 1{\cdot}182 : 1 = 1 : 0{\cdot}846.$$

Es ist also das Tragmoment des Prismas mit dem quadratischen Querschnitte im Verhältnisse wie 1 : 1·182 grösser, als mit dem kreisförmigen.

2. Zu einer weiteren Vergleichung untersuche man die Tragmomente eines Prismas mit einem rechteckigen Querschnitte in den Stellungen I, II und III (Fig. 52). Bezeichnet man die betreffenden Tragmomente gleichfalls mit Zeigern, welche mit den numerirten Stellungen correspondiren, so erhält man mit Rücksicht auf die Bemerkungen im §. 56 ad 2

nach den Formeln (96) ... $M_I = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \alpha \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \alpha, \end{cases}$

„ „ „ (96) ... $M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \beta \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \end{cases}$

und

„ „ „ (97) ... $M_{III} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \cdot \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \cdot \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \end{cases}$

und da in diesen 3 Partien gleichzeitig die ersten oder zweiten Formeln die kleineren Werthe geben werden, sofort

$$M_I : M_{II} : M_{III} = \alpha : \beta : \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Die Tragmomente in den betrachteten 3 Stellungen verhalten sich daher verkehrt, wie die Längen der jedesmal entstehenden neutralen Axe. Auch ist M_{III} immer das geringste aus allen 3 Tragmomenten. Diess letztere ist in so ferne merkwürdig, als die Biegungen in den betrachteten 3 Fällen ein anderes Verhalten beobachten. Nach dem §. 56 ist nämlich die Biegung δ_{III}, welche mit dem geringsten Tragmomente correspondirt, keineswegs die grösste, indem dieselbe stets zwischen $i\delta_I$ und δ_{II} fällt. Für den rechteckigen Querschnitt tritt sonach das Besondere ein, dass mit Rücksicht auf die erwähnten 3 Stellungen vergleichungsweise mit einer kleineren Biegung auch ein kleineres Tragmoment, und mit einer grösseren Biegung ein grösseres Tragmoment resultiren kann, während sonst das Umgekehrte statt zu finden pflegt, indem in der Regel von einer kleineren Biegung auf ein grösseres Tragmoment, und von einer grösseren Biegung auf ein kleineres Tragmoment zu schliessen ist. Für das Quadrat ist insbesondere $\alpha = \beta$, daher $M_I = M_{II}$ und

$$M_I : M_{II} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 0{\cdot}707 = \sqrt{2} : 1 = 1{\cdot}414 : 1.$$

Hieraus folgt, dass bei einem quadratischen Querschnitte das Tragmoment, wenn die neutrale Axe in die Diagonale fällt, im Verhältnisse wie $\sqrt{2} : 1$ kleiner ist, als wenn diese Axe parallel zur Quadratseite geht.

3. Wird ein dreikantiges Prisma in 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes α, β und γ parallel zur neutralen Axe gehen, also gleichsam abwechselnd als Grundlinien fungiren, und wird nun eine Vergleichung der respectiven Tragmomente M_I, M_{II} und M_{III} unter sonst gleichen Umständen vorgenommen, so hat man

im I. Falle . . . . . $h = \frac{2f}{\alpha}$,

im II. Falle . . . . . $h = \frac{2f}{\beta}$,

und im III. Falle . . . . . $h = \frac{2f}{\gamma}$,

daher, wenn die Fasern an der jeweiligen Spitze des Dreieckes ausgedehnt und an der gegenüberliegenden Basis zusammengedrückt werden, nach den Gleichungen (101)

$$M_I = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{af^2}{\alpha} \\ \text{oder } \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\alpha}, \end{cases} \quad M_{II} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{af^2}{\beta} \\ \text{oder } \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\beta} \end{cases} \text{ u. } M_{III} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{af^2}{\gamma} \\ \text{oder } \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\gamma}; \end{cases}$$

hingegen, wenn die Fasern stets an der jeweiligen Basis des Dreieckes ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden, nach den Gleichungen (102)

$$M_I = \begin{cases} \text{entw } \frac{1}{3}\frac{af^2}{\alpha} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{rf^2}{\alpha}, \end{cases} \quad M_{II} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{3}\frac{af^2}{\beta} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{rf^2}{\beta} \end{cases} \text{ u. } M_{III} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{3}\frac{af^2}{\gamma} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{af^2}{\gamma}. \end{cases}$$

Wird jetzt beachtet, dass von den Alternativformeln für das Tragmoment in den zu vergleichenden Stellungen entweder immer die ersten, oder die zweiten als die kleineren anzuwenden sein werden, so hat man allgemein

$$M_I : M_{II} : M_{III} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma},$$

wonach die Tragmomente in den gewählten 3 Stellungen sich verhalten, wie umgekehrt die respectiven Grundlinien, nämlich die Dreieckseiten, welche mit der neutralen Axe parallel laufen.

4. Ueberhaupt steht das Tragmoment mit dem Trägheitsmomente t im geraden, und mit dem Abstande (h' oder h'') der bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommenen Fasern von der neutralen Axe im verkehrten Verhältnisse. Sind also in zwei zu vergleichenden Fällen die betreffenden Trägheitsmomente (daher unter übrigens gleichen Umständen auch die Biegungen) einander gleich, so bleiben die beziehungsweisen Tragmomente lediglich den reciproken Werthen jener Abstände (h' oder h'') proportionirt. Diess ist z. B. eingetreten bei der ad 2 vorgenommenen Vergleichung der Tragmomente des Quadrates in den 2 Stellungen, wo die neutrale Axe einmal mit der

Quadratseite α parallel gelegen, das andere Mal aber in die Diagonale gefallen ist. In diesen 2 besonderen Stellungen sind nämlich nach dem §. 56 ad 2 die bezüglichen Trägheitsmomente t_I und t_{III} einander gleich, und da überdiess

in der einen Stellung $h' = h'' = \frac{1}{2}\alpha$,

in der andern aber $h' = h'' = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}$

wird, so erhält man zu Folge der obigen Bemerkung übereinstimmend mit dem Resultate ad 2 dieses §.

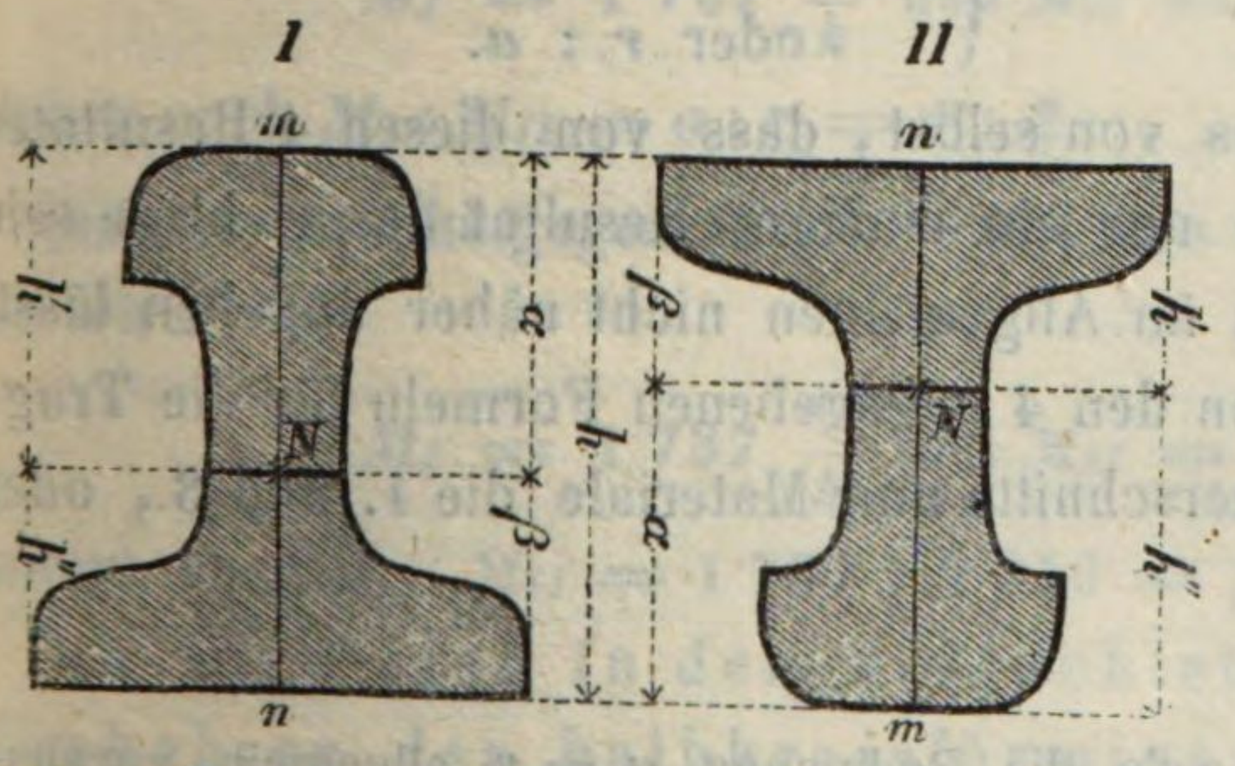
$$M_I : M_{III} = \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha} : \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1.$$

§. 81.

Umkehrung des Querschnittes. Wird das materielle Prisma um seine Längenaxe gedreht, bis sein Querschnitt genau in die entgegengesetzte oder umgekehrte Lage kommt, so ist die Beantwortung der Frage von Wesenheit, ob und in wie ferne unter sonst gleichen Umständen das Tragmoment geändert werde. Es leuchtet ein, dass das besagte Umkehren des Querschnittes dieselbe Wirkung äussert, wie wenn man den Querschnitt unverändert in seiner Lage gelassen, dafür aber die sämmtlichen einwirkenden Kräfte entgegengesetzt genommen, und dadurch in dem Querschnitte die Spannungen in Pressungen und die Pressungen in Spannungen verwandelt hätte.

Stellen I und II in der Fig. 73 die beiden entgegengesetzten Lagen des Querschnittes vor, und sei in demselben die neutrale Axe durch seinen Schwerpunct N gezogen, finden ferner die grössten Spannungen in m (ad I) und in n (ad II), hingegen die grössten Pressungen in n (ad I) und in m (ad II) statt, und werden die respectiven Abstände der gespanntesten und gepresstesten Fasern von der neutralen Axe. ad I $h' = \alpha$ und $h'' = \beta$,

Fig. 73.



ad II aber umgekehrt $h' = \beta$ und $h'' = \alpha$ gesetzt, so erhält man für die Werthe der bezüglichen Tragmomente

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } \frac{at}{\alpha} \\ \text{oder } \frac{rt}{\beta} \end{cases} \text{ und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{at}{\beta} \\ \text{oder } \frac{rt}{\alpha}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nachstehende Regeln:

1. Ist $\alpha = \beta$, d. h. liegt der Schwerpunct der Querschnittsfigur in der halben Höhe, so wird jedenfalls

$$M_I = M_{II},$$

wonach die umgekehrte Lage des Querschnittes das Tragmoment nicht verändert. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Materialsgattung. Es ist übrigens nicht nothwendig, dass zur Erreichung dieser Bedingung die Querschnitts-Figur in Bezug auf die neutrale Axe symmetrisch gebildet sein müsse, es genügt, wenn diese Axe überhaupt die ganze Höhe halbirt.

2. Ist $a = r$, d. h. sind die Spannungen und Pressungen in gleicher Intension zulässig, so ist gleichfalls $M_I = M_{II}$.

Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Querschnittsform, und kann sehr häufig für Schmiedeeisen zugelassen werden *).

3) Aus der Vergleichung der für M_I und M_{II} gegebenen Werthe ergibt sich im Allgemeinen

$$M_I : M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} \\ \text{oder } \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\alpha} \\ \text{oder } a : r \\ \text{oder } r : a. \end{cases}$$

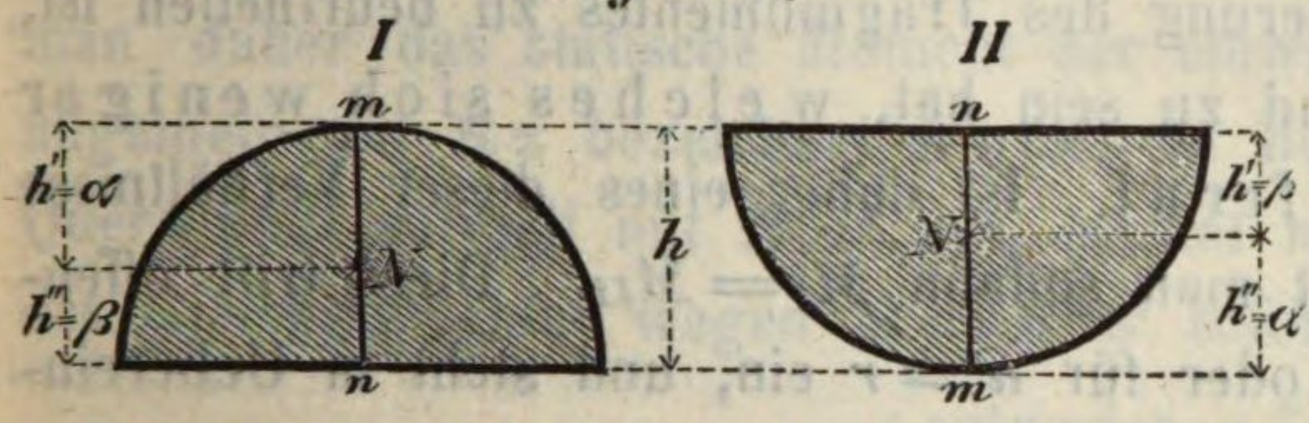
Es versteht sich übrigens von selbst, dass von diesen 4 Resultaten in jedem besonderen Falle nur ein einziges Resultat das richtige sein wird, welches sich jedoch im Allgemeinen nicht näher angeben lässt, indem möglicher Weise von den 4 angegebenen Formeln für die Tragmomente je nach dem Querschnitte und Materiale die 1. und 3., oder

---

*) Da die Theorie Navier's die Bedingung $a = r$ allgemein voraussetzt, so erklärt es sich, dass nach dieser Theorie $M_I = M_{II}$ für alle festen elastischen Materialien resultirt.

die 2. und 4., oder die 1. und 4., oder endlich die 2. und 3. (nämlich stets die kleineren Werthe) in Vergleich kommen können. Die Veränderung in dem Tragmomente geht daher durch das Umkehren des Querschnittes entweder in dem Verhältnisse wie $\alpha : \beta$ oder in dem wie $a : r$ vor sich, und kann überdiess je nach Umständen in einer Vermehrung oder Verminderung bestehen. Um diess durch ein Beispiel zu erläutern, sei der Querschnitt des Prismas ein Halbkreis (Fig. 74),

Fig. 74.



welcher in den beiden entgegengesetzten Lagen *I* und *II* und zwar so betrachtet werden soll, dass ad I die grösste Spannung in m und die grösste Pressung in n, ad II aber die Anspruchsnahme in umgekehrter Weise erfolgt. Für diesen Fall hat man wegen

$$\alpha = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) h = 0{\cdot}576\, h \text{ und } \beta = \frac{4}{3\pi} h = 0{\cdot}424\, h,$$

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } 1{\cdot}737\, \dfrac{at}{h} \\ \text{oder } 2{\cdot}356\, \dfrac{rt}{h} \end{cases} \text{und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } 2{\cdot}356\, \dfrac{at}{h} \\ \text{oder } 1{\cdot}737\, \dfrac{rt}{h}, \end{cases}$$

aus welchen Doppelwerthen vorschriftsmässig stets die kleineren zu wählen sind.

Nimmt man jetzt für Holzmaterialien durchschnittlich $r = \frac{3}{4} a$, so erhält man

$$M_I = 1{\cdot}737\, \frac{at}{h} \text{ und } M_{II} = 1{\cdot}737\, \frac{rt}{h},$$

daher auch $M_I : M_{II} = a : r = 4 : 3$.

Nimmt man hingegen für Gusseisen durchschnittlich $r = 3\, a$, so wird

$$M_I = 1{\cdot}737\, \frac{at}{h} \text{ und } M_{II} = 2{\cdot}356\, \frac{at}{h},$$

sofort aber $M_I : M_{II} = 1{\cdot}737 : 2{\cdot}356 = \beta : \alpha$.

Es wird also in dem betrachteten Falle durch das Umkehren des halbkreisförmigen Querschnittes das Tragmoment bei Holzmaterialien im Verhältnisse wie $a : r$ (beispielsweise wie 4 : 3) verkleinert, bei Guss-

eisen aber im Verhältnisse wie $\beta : \alpha = 1{\cdot}737 : 2{\cdot}356$ gesteigert, bei Schmiedeeisen endlich gar nicht verändert, wenn man bei diesem die Gleichheit der die Elasticitätsgränzen bestimmenden Grössen a und r zulässt.

4. Bei einer aufmerksamen Betrachtung findet man, dass von den beiden eventuellen Verhältnissen $\alpha : \beta$ und $a : r$, nach welchen die in Rede stehende Veränderung des Tragmomentes zu beurtheilen ist, stets dasjenige massgebend zu sein hat, welches sich weniger von der Einheit entfernt. Ist daher eines dieser Verhältnisse die Einheit selbst, so hat man sodann $M_I = M_{II}$. Diess tritt offenbar entweder für $\alpha = \beta$ oder für $a = r$ ein, und steht in Uebereinstimmung mit den Bemerkungen ad 1 und 2 dieses §. Eben so begreift man, dass die Veränderung im Tragmomente überhaupt in keinem grelleren Verhältnisse, als wie $a : r$ (also durchschnittlich bei Holz wie 4 : 3 und bei Gusseisen wie 1 : 3) stattfinden kann. Da ferner diese Veränderung, wie man gesehen hat, je nach Umständen in einer Vermehrung oder Verminderung besteht, so sind die Gränzen, zwischen welchen der Werth von $\frac{M_I}{M_{II}}$ im Allgemeinen liegen muss, oder welche höchstens erreicht werden können, $\frac{a}{r}$ und $\frac{r}{a}$. Diese Gränzen können daher in runden Zahlen bei Holz mit $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{4}$, bei Gusseisen aber mit $\frac{1}{3}$ und 3 angenommen werden *).

---

*) Nach der Theorie von Burg und Redtenbacher würde stets

$$M_I : M_{II} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = \beta : \alpha,$$

und daher für dieses Verhältniss keine derartige Gränze vorhanden sein, indem dasselbe streng genommen, wenn auch nicht in practischer Hinsicht, jeden möglichen Werth erreichen könnte. Auch wäre nach dem Vorgange jener Schriftsteller dieses Verhältniss für einen gewissen Querschnitt ohne Rücksicht auf das Materiale immer dasselbe, und würde in manchen Fällen zu Resultaten führen, welche schon der einfachen Anschauungsweise geradezu widersprächen. Man wird bereits bemerkt haben, dass in der vorliegenden Theorie für $r = \infty$ die Resultate jener beiden Schriftsteller jederzeit zum Vorschein kommen, während die Annahme $a = r$ der Navier'schen Theorie entspricht. Die Erfahrungen stimmen übrigens mit der obigen Theorie überein.

§. 82.

Besondere Versinnlichung des Tragmomentes.

Nach dem §. 77 kann das Tragmoment stets auf die Form

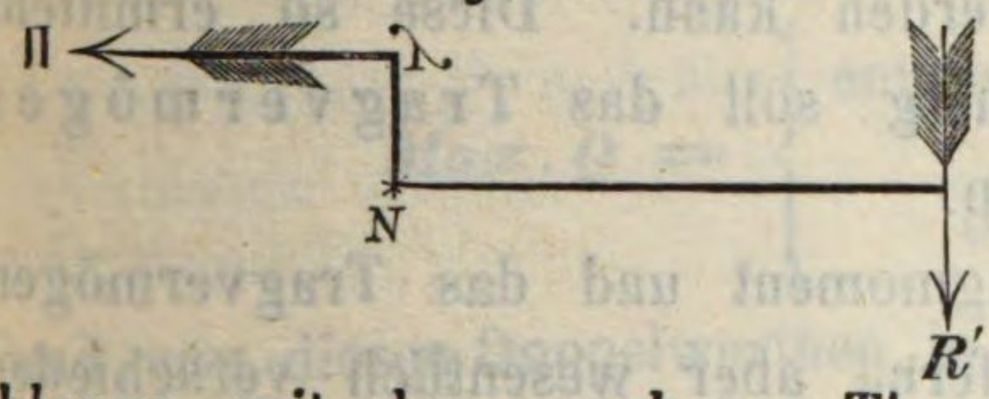
$$M = \begin{cases} \text{entweder } C.afh \\ \text{oder } C'.rfh \end{cases}$$

gebracht werden, wo C und C' in so ferne constante Grössen sind, als dieselben nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Drückt man daher das statische Moment der einwirkenden Kräfte, welches allgemein mit Rz bezeichnet wurde, in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt speciell mit $R'z'$ aus, so hat man für den Gränzzustand des Gleichgewichtes wegen $M = R'z'$ sofort

$$R'z' = \begin{cases} \text{entweder } af.Ch \\ \text{oder } rf.C'h, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder andere Werth kleiner ausfällt. Wird jetzt beachtet, dass af die grösste zulässige Spannung und eben so rf die grösste zulässsige Pressung vorstellt, welche das ganze Prisma auszuhalten hätte, wenn dasselbe lediglich nach der Länge gezogen oder gepresst würde, so kann man offenbar das Tragmoment sich auch so entstanden denken, als wenn die grösste zulässige Spannung af an dem Hebelsarme Ch, oder die grösste zulässige Pressung rf an dem Hebelsarme $C'h$ wirken würde, von welchen beiden Wirkungen aber im Einklange mit der gegebenen Theorie nur die kleinere zu wählen ist.

Fig. 75.



Die Figur 75 entspricht dieser Vorstellung. In derselben ist die gleichsam als Widerstand fungirende Kraft Π nach Umständen

$$= \begin{cases} \text{entweder } af \\ \text{oder } rf, \end{cases}$$

der bezügliche Hebelsarm aber

$$N\lambda = \begin{cases} \text{entweder } Ch \\ \text{oder } C'h \end{cases}$$

zu setzen. Mit Benützung der betreffenden Formeln im §. 78 findet man z. B. diesen Hebelsarm

1. für die Figur 41 . . . . . $N\lambda =$ stets $\frac{1}{6}h$,
2. für die Figuren 42, 43 und 44 $N\lambda =$ stets $\frac{1}{12}h$,
3. für die Figuren 45 und 46 . . $N\lambda =$ stets $\frac{1}{8}h$,

4. für die Figur 47 . . . $N\lambda =$ { entweder $0{\cdot}122\,h$ / oder $0{\cdot}165\,h$,

5. für die Figur 48 . . . $N\lambda =$ { entweder $\frac{1}{12}\,h$ / oder $\frac{1}{6}\,h$,

6. für die Figur 49 . . . $N\lambda =$ stets . . $\frac{1}{10}\,h$

und 7. für die Figur 50 . . . $N\lambda =$ { entweder $\frac{4}{35}\,h$ / oder $\frac{6}{35}\,h$,

also jedenfalls verhältnissmässig sehr klein. Eine nähere Betrachtung dieser Resultate ist geeignet, mehrseitiges Interesse zu gewähren.

§. 83.

Tragvermögen. Nach §. 76 hat zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt Gleichgewicht zu herrschen. Sollen bei der Anspruchsnahme des Prismas die Elasticitätsgränzen für das betreffende Materiale nicht überschritten werden, so ist kein grösseres Widerstandsmoment, als das Tragmoment zulässig, und da das statische Kraftmoment auch nur so weit gesteigert werden darf, so ergibt sich aus der betreffenden Gleichung für diesen **Gränzzustand** des Gleichgewichtes mit Rücksicht auf die speciellen Fälle die **grösste Belastung**, welche noch mit Sicherheit getragen werden kann. Diese so ermittelte **grösste zulässige Belastung** soll das **Tragvermögen** oder die **Tragfähigkeit** heissen.

Man begreift, dass das Tragmoment und das Tragvermögen von einander abhängen, in so ferne aber wesentlich verschieden sind, als das Tragvermögen eigentlich eine Kraft bezeichnet, während das Tragmoment dem statischen Momente dieser Kraft in Bezug auf die neutrale Axe des gefährlichen Querschnittes gleich zu setzen ist. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die allgemeine Gleichung (47) $mt\frac{d^2y}{dx^2} = Rz$ auch das Gleichgewicht zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf dem gefährlichen Querschnitt enthält *).

*) Würde man annehmen, dass die gegebenen Gleichungen bis zu dem Bruche giltig seien, so könnte man auf solche Weise die grösstmöglichste Belastung bis zu dem Bruche, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, die

Im Nachfolgenden werden die einfachsten Fälle erörtert, auf welche im §. 58 ad I, II, III und IV aufmerksam gemacht worden ist.

§. 84.

I. Fall. Festhaltung des Prismas an einem Ende, und Belastung desselben am andern Ende. Mit Rücksicht auf die Fig. 53 und die §§. 59 und 60 hat man für das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach §. 75 in A sich befindet, den Werth $Q\,l$. Dieser resultirt nämlich aus der Gleichung (58) für $x = o$. Wird nun das Tragvermögen mit $Max\,.\,Q$ bezeichnet, so kann höchstens $Q = Max\,.\,Q$ und das Kraftmoment $Q\,l = l\,Max\,.\,Q$ werden. Indem aber dieses letztere dem Tragmomente M gleich zu setzen ist, erhält man für den in Rede stehenden Fall I.... $$Max.\,Q = \frac{M}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106),$$

also das Tragvermögen gleich dem Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas. Hiebei hat man statt M den Werth nach Massgabe der Relation (95) zu setzen. Wäre z. B. der Querschnitt des Prismas ein Rechteck (Fig. 41), so hätte man den Gleichungen (96) zufolge

$$Max\,.\,Q = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\frac{a\,b\,h^2}{l} = \frac{1}{6}\frac{a\,f\,h}{l} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r\,b\,h^2}{l} = \frac{1}{6}\frac{r\,f\,h}{l}, \end{cases}$$

und von diesen Doppelwerthen in Gemässheit des §. 77 den kleineren anzunehmen.

In diesem Falle I ist übrigens bei der Bestimmung des Tragmomentes M zu beachten, dass im gefährlichen Querschnitte die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden.

---

relative Festigkeit des Prismas kennen lernen. Da aber die Biegungstheorie auf solche Hypothesen gegründet ist, welche nur innerhalb der Elasticitätsgränzen zugelassen werden können, so darf es nicht befremden, wenn eine derartig ausgemittelte Bruchbelastung in der Erfahrung sich als unrichtig erweisen sollte. Die Kenntniss der Bruchbelastung hätte übrigens auch keinen besonderen Werth, da man in der Praxis die Körper keineswegs zu brechen beabsichtigt.

§. 85.

II. Fall. Festhaltung des Prismas an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach. Mit Rücksicht auf die Fig. 56 und die §§. 61 und 62 hat man für das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in A sich befindet, den Werth $\frac{1}{2} Q l$. Dieser resultirt nämlich aus der Gleichung (65) für $x = o$. Wird das betreffende Tragvermögen wieder mit $Max . Q$ bezeichnet, so ist offenbar $\frac{1}{2} l . Max . Q = M$ und hieraus

$$Max . Q = \frac{2M}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107),$$

also das Tragvermögen gleich dem doppelten Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas.

Wäre z. B. der Querschnitt des Prismas ein Rechteck (Fig. 41), so hätte man den Gleichungen (96) zufolge

$$Max . Q = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{3} \frac{a b h^2}{l} = \frac{1}{3} \frac{a f h}{l} \\ \text{oder } \frac{1}{3} \frac{r b h^2}{l} = \frac{1}{3} \frac{r f h}{l}, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

In diesem Falle werden in dem gefährlichen Querschnitte, wie ad I, die oberen Fasern ausgedehnt, und die unteren zusammengepresst.

§. 86.

III. Fall. Unterstützung beider Enden des Prismas und Belastung desselben in der Mitte. Mit Rücksicht auf die Figuren 59, 60 und 61 und die §§. 63 und 64 ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in der Mitte A sich befindet, $\frac{1}{2} Q . \frac{1}{2} l = \frac{1}{4} Q l$. Wird nun das Tragvermögen $Max . Q$ aus der betreffenden Gleichung $\frac{1}{4} l . Max . Q = M$ gefolgert, so erhält man

$$Max . Q = \frac{4M}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108),$$

also gleich dem vierfachen Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas.

In diesem Falle ist übrigens bei der Berechnung des Tragmomentes M darauf Acht zu geben, dass in dem gefährlichen Querschnitte die unteren Fasern ausgedehnt, und die oberen zusammengedrückt werden.

§. 87.

IV. Fall. Unterstützung beider Enden des Prismas und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach. Mit Rücksicht auf die Figuren 64, 65 und 66 und die §§. 65 und 66 ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in der Mitte A sich befindet, $-\frac{1}{8}Ql$, indem dieser Werth aus der Gleichung (74) für $x = o$ folgt. Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass in dem gefährlichen Querschnitte die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, und diess ist daher bei der Bestimmung des Tragmomentes M zu berücksichtigen. Das Tragvermögen $Max \,.\, Q$ ist sodann aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{8}l \,.\, Max \,.\, Q = M$$

abzuleiten, wodurch

$$Max \,.\, Q = \frac{8M}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109),$$

also das Tragvermögen gefunden wird, wenn man das achtfache Tragmoment durch die freie Länge des Prismas dividirt.

§. 88.

Vergleichung der Fälle I, II, III und IV. Werden die Tragfähigkeiten in den besprochenen 4 Fällen behufs ihrer Vergleichung mit $Max \,.\, Q$ und den entsprechenden Zeigern bezeichnet, die dazu gehörigen Tragmomente aber M_1, M_2, M_3 und M_4 genannt, so erhält man für eine und dieselbe Länge l

$$Max \,.\, Q_1 : Max \,.\, Q_2 : Max \,.\, Q_3 : Max \,.\, Q_4 =$$
$$= M_1 : 2M_2 : 4M_3 : 8M_4 \quad . \quad . \quad . \quad (110),$$

und wenn überdiess das Tragmoment in allen 4 Fällen unverändert bleibt,

$$Max \,.\, Q_1 : Max \,.\, Q_2 : Max \,.\, Q_3 : Max \,.\, Q_4 =$$
$$= 1 : 2 : 4 : 8 \quad . \quad . \quad . \quad (111).$$

Wenn daher ein und dasselbe Prisma auf die bezeichneten 4 Arten belastet wird, so ist die Trägfähigkeit im II. Falle zweimal, im III Falle viermal und im IV. Falle achtmal so gross, als im I. Falle *). Nur muss man bezüglich der jedesmaligen Lage des Querschnittes mit Rücksicht auf den §. 81 zu der Annahme berechtiget sein, dass das Tragmoment in der That ungeändert bleibt. Die Proportion (111) ist übereinstimmend mit der Relation (87). Man sieht den Grund davon sogleich ein, wenn man beachtet, dass die Gleichheit der Tragmomente auch die der statischen Kraftmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt bedingt, daher in allen 4 Fällen die kleinsten Krümmungshalbmesser ebenfalls gleich werden müssen.

§. 89.

Combinirung der Fälle I und II dann III und IV. Ist das materielle Prisma an einem Ende festgehalten, und sowohl von einer Belastung Q_1 am andern Ende, als auch von einer der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung der Fälle I und II. Da in jedem dieser beiden Fälle, abgesondert betrachtet, der gefährliche Querschnitt an dem Wurzelende sich befände, so wird derselbe auch bei dem gleichzeitigen Eintreten beider Fälle an dieser Stelle vorhanden, und die Summe der statischen Momente beider Belastungen gleich dem Tragmomente zu setzen sein, um den Gränzzustand des Gleichgewichtes zu erhalten.

Dieser Bemerkung gemäss hat man

$$(Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2)\, l = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112),$$

also dieselbe Bedingungsgleichung, wie wenn die Hälfte der gleichförmig vertheilten Last an dem freien Ende concentrirt und mit der Belastung Q_1 vereinigt wäre.

Auf dieselbe Weise erhält man durch die Combinirung der Fälle III und IV, wenn nämlich das Prisma an beiden Enden unterstützt, und sowohl in der Mitte mit Q_3, als auch gleichförmig der ganzen Länge nach mit Q_4 belastet wäre, für den Gränzzustand des Gleichgewichts $\tfrac{1}{4} (Q_3 + \tfrac{1}{2} Q_4) = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$

*) Abgesehen von dem eigenen Gewichte des Prisma.

also dasselbe Resultat, wie wenn die Hälfte der gleichförmig vertheilten Last Q_4 in der Mitte concentrirt und mit der Belastung Q_3 vereinigt sein würde.

§. 90.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes. Das eigene Gewicht des Prismas ist als eine gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach zu betrachten, daher der Einfluss desselben auf die Anspruchsnahme im Sinne des vorigen §. zu beurtheilen. Auch hat man mit Rücksicht auf den II. und IV. Fall wegen $Q_2 = Q_4 = f l \gamma$, wo γ das Gewicht der cubischen Einheit des das Prisma bildenden Materiales bezeichnet, unter der Bedingung, dass das Tragvermögen schon durch das eigene Körpergewicht erschöpft werden soll,

$$\text{ad II} \ldots Q_2 = f l \gamma = \frac{2M}{l}, \text{ woraus wegen}$$

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{h'} = \dfrac{af d^2}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{h''} = \dfrac{r f d^2}{h''} \end{cases}$$

sofort

$$l^2 = \frac{2M}{f\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \dfrac{2ad^2}{h'\gamma} \\ \text{oder } \dfrac{2rd^2}{h''\gamma} \end{array} \right\} \ldots\ldots (114)$$

folgt; und eben so

$$\text{ad IV} \ldots l^2 = \frac{8M}{f\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \dfrac{8ad^2}{h'\gamma} \\ \text{oder } \dfrac{8rd^2}{h''\gamma} \end{array} \right\} \ldots\ldots (115),$$

aus welchen Doppelwerthen jedesmal die kleineren zu wählen sind. Für einen Balken aus Holz mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) hätte man z. B. $a > r$, $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ und $d^2 = \frac{1}{12}h^2$, also auch ad II $\ldots l^2 = \frac{1}{3}\frac{rh}{\gamma}$ und ad IV $\ldots l^2 = \frac{4}{3}\frac{rh}{\gamma}$. Wäre überdiess $r = 16$ Zentner, $h = 3''$ und $\gamma = \frac{1}{5184}$ Zentner, so würden ad II $\ldots l = 288'' = 4^0$ und ad IV $\ldots l = 576'' = 8^0$ als diejenigen Längen anzusehen sein, bis auf welche sich das Prisma selbst tragen

könnte, wenn die grösste Pressung der Fasern nur 16 Zentner per □″ erreichen dürfte.

§. 91.

Bestimmung der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung des Materiales aus Versuchen über die Biegung. So wie das Tragvermögen aus den Elasticitätsgränzwerthen a und r und den übrigen Grössen t, h', h'' und l berechnet werden kann, so lassen sich auch umgekehrt diese Gränzwerthe a und r bestimmen, wenn man das Tragvermögen aus Versuchen mit genügender Verlässlichkeit auszumitteln in der Lage ist. Die Berücksichtigung der combinirten Fälle III und IV erscheint zu derartigen Versuchen am geeignetsten. Wird nämlich ein Prisma an beiden Enden aufgelegt, und in der Mitte mit der Belastung Q_3 in Anspruch genommen, das eigene Körpergewicht aber mit Q_4 bezeichnet, so hat man offenbar nach der Gleichung (113)

$$\tfrac{1}{4}(Q_3 + \tfrac{1}{2} Q_4) = M,$$

wenn die Belastung Q_3 nach und nach bis zur Erreichung der Elasticitätsgränze entweder für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung gesteigert worden ist. Zu diesem Behufe hat man im Sinne des §. 3 mit der Belastung Q_3 so weit zu gehen, als die dadurch hervorgebrachte Biegung nach der Entlastung verschwindet. Man kann sich zwar nicht verhehlen, dass solche Versuche mit grosser Präcision ausgeführt werden müssen, um nach dieser gleichsam indirecten Methode zur Bestimmung der Elasticitätsgränzen nur einigermassen brauchbare Resultate zu erhalten; allein man wird auch nicht übersehen dürfen, dass die Bestimmung der gedachten Gränzen selbst nach der directen Methode nicht minderen Schwierigkeiten unterliegt, wenn man sich diessfalls die Bemerkungen im §. 17 in das Gedächtniss zurückruft. Der Gebrauch der vorigen Formel ist übrigens klar. Da nämlich

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{h''} \end{cases}$$

ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \text{entweder } a = \frac{h'}{4t}\,(Q_3 + \frac{1}{2}\,Q_1) \\ \text{oder } r = \frac{h''}{4t}\,(Q_3 + \frac{1}{2}\,Q_4) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (116),$$

je nachdem in Folge der Anspruchsnahme des Prismas die Elasticitätsgränze bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung zuerst erreicht worden ist.

Man hat bisher dieser Methode nicht die wünschenswerthe Aufmerksamkeit geschenkt, obwohl sie eben so natürlich erscheint, als die indirecte Methode zur Bestimmung des Moduls m (§. 72). Die Ursache hievon liegt indess nicht in den Schwierigkeiten, welche mit der Durchführung der besprochenen Methode verbunden sind, sondern vielmehr in dem Umstande, dass man beinahe durchgehends bei derartigen Versuchen nur die relative Festigkeit, nämlich die Bruchbelastung auszumitteln bemüht war, in der Meinung, dass dieselbe das Wesentlichste von dem zu wissen Nothwendigen bilde. Diess ist aber keineswegs der Fall. Denn es kann die Bruchbelastung nicht zum directen Anhaltspuncte für die Praxis dienen, da diese nicht den Bruch der Körper, sondern vielmehr deren sicheren Bestand beabsichtigt, und indem das herkömmliche Auskunftsmittel, nach welchem man zur Erreichung dieser Absicht nur einen gewissen Theil der Bruchbelastung als Tragvermögen annimmt, gewöhnlich an sehr schwankende Anhaltspuncte geknüpft wird, so ist wahrlich nicht einzusehen, warum man nicht geraden Weges auf das gewünschte Ziel losgehen, und demgemäss das Tragvermögen ohne Zwischenacte aus der Beobachtung ableiten sollte. Zudem dürfen die der Theorie entnommenen Formeln nicht auf den Bruch angewendet werden, da dieselben auf Hypothesen gestützt sind, die nur innerhalb der Elasticitätsgränzen als giltig angesehen werden können, daher man auch nicht darüber Befremden äussern muss, wenn zuweilen die auf den Bruch bezüglichen Versuchsresultate mit den theoretischen Formeln nicht vereinigt werden können.

§. 92.

Grösste zulässige Biegung. Nach dem §. 53 ist die Biegung eine Function von der Belastung, und nimmt mit derselben zufolge der Gleichungen (61), (68), (72) und (77) im einfachen Verhältnisse zu. Hat daher die Belastung das Tragvermögen erreicht, so

findet ohne Zweifel die grösste zulässige Biegung statt. Die Kenntniss derselben ist für die Praxis wichtig. Bezeichnet man ihren Werth mit $Max.\delta$ und den entsprechenden Zeigern, indem man nämlich wieder auf die im §. 58 angegebenen Fälle ad I, II, III und IV übergeht, so erhält man:

Im I. Falle aus der Gleichung (61) $\delta = \frac{Q l^3}{3 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (106) $Q = \frac{M}{l}$ und $\delta = Max . \delta_1$ setzt,

$$Max . \delta_1 = \frac{M l^2}{3 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{3 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{3 m h''} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (117);$$

Im II. Falle aus der Gleichung (68) $\delta = \frac{Q l^3}{8 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (107) $Q = \frac{2 M}{l}$ und $\delta = Max . \delta_2$ setzt,

$$Max . \delta_2 = \frac{M l^2}{4 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{4 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{4 m h''} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (118);$$

Im III. Falle aus der Gleichung (72) $\delta = \frac{Q l^3}{48 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (108) $Q = \frac{4 M}{l}$ und $\delta = Max . \delta_3$ setzt,

$$Max . \delta_3 = \frac{M l^2}{12 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{12 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{12 m h''} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (119);$$

Endlich im IV. Falle aus der Gleichung (77) $\delta = \frac{5}{384} \frac{Q l^3}{m t}$ (numerisch genommen), wenn man in derselben nach der Relation (109) $Q = \frac{8 M}{l}$ und $\delta = Max . \delta_4$ setzt,

$$Max . \delta_4 = \frac{5 M l^2}{48 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{5 a l^2}{48 m h'} \\ \text{oder } \frac{5 r l^2}{48 m h''} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (120),$$

von welchen Doppelwerthen stets die kleineren auszuwählen sind.

Macht man einen Vergleich zwischen den gefundenen 4 Werthen $Max.\delta_1$, $Max.\delta_2$, $Max.\delta_3$ und $Max.\delta_4$ unter sonst gleichen Umständen, so gelangt man zu der Proportion

$$\left.\begin{aligned} Max.\delta_1 : Max.\delta_2 : Max.\delta_3 : Max.\delta_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{12} : \tfrac{5}{48} \\ &= 16 : 12 : 4 : 5 \end{aligned}\right\} \quad (121).$$

Diese Proportion steht mit der Relation (88) in Uebereinstimmung, wie diess auch nicht anders sein kann, da, wie schon im §. 88 bemerkt worden ist, die Gleichheit der Tragfähigkeiten in den 4 betrachteten Fällen auch die Gleichheit der betreffenden kleinsten Krümmungshalbmesser bedingt. Aus den Resultaten dieses §. sieht man, dass die grössten zulässigen Biegungen von dem Querschnitte des Prismas nur in so ferne abhängen, als die Höhentheile h' und h'' in Betracht kommen, so wie, dass das Verhältniss $\frac{Max.\delta}{l}$ zwischen der grössten zulässigen Biegung und der Länge l nicht constant ist, sondern mit dieser Länge im einfachen Verhältnisse wächst. Auch bemerkt man nicht ohne Interesse, dass

$$Max.\delta_1 > Max.\delta_2 > Max.\delta_3,$$

hingegen $Max.\delta_3 < Max.\delta_4$ ist.

§. 93.

Aus einem runden Baustamme einen vierkantigen Balken von der grössten Stärke zu zimmern. Diese Aufgabe ist analog mit der im §. 73 aufgelösten. Nur handelt es sich nicht, wie dort, um die grösste Steifigkeit, sondern um das grösste Tragvermögen. Man behalte die dortigen Bezeichnungen und die bezügliche Figur 70 bei, und beachte, dass die Beantwortung der angeregten Frage dermalen darin besteht, das Tragmoment

$$M = \tfrac{1}{6} r\, b\, h^2$$

oder, was dasselbe ist, den Ausdruck $b\,h^2$ zu einem Maximum zu machen. Es ist aber $b = \sqrt{c\,x}$ und $h = \sqrt{c\,(c-x)}$, daher

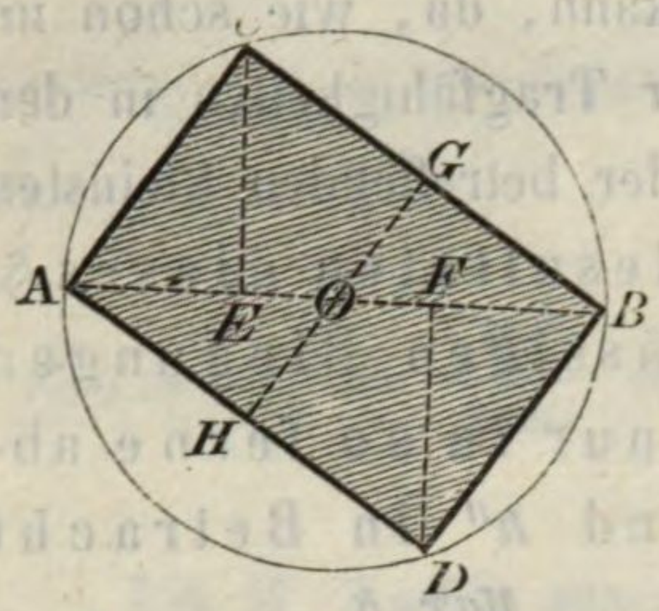
$$b\,h^2 = c\,(c-x)\,\sqrt{c\,x} = c\sqrt{c}\,\sqrt{x\,(c-x)^2}.$$

Nun wird $x\,(c-x)^2$ am grössten, wenn

$$\frac{d\,[x\,(c-x)^2]}{dx} = (c-x)^2 - 2x\,(c-x) = o,$$

d. h. $x = \frac{c}{3}$ wird, da für diesen Werth $\frac{d^2\,[x\,(c-x)^2]}{dx^2}$ negativ ausfällt.

Fig. 75a.



Es wird also der beabsichtigte Zweck erreicht, wenn man (Fig. 75a) $AE = EF = BF = \frac{1}{3}AB$ macht, nämlich den Durchmesser in 3 gleiche Theile theilt, und sodann zur Bestimmung der Puncte C und D die Perpendikel CE und DF auf AB construirt. Nach dieser Anordnung erhält man $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$ und $h = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, daher

$$b : h = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{\cdot}4142 = 0{\cdot}7071 : 1,$$

ferner $f = bh = \frac{c^2}{3}\sqrt{2} = 0{\cdot}4714\ c^2 = 0\ 6002\ F.$

Endlich ist das Tragmoment für das gefundene Rechteck

$$M = \frac{\sqrt{3}}{27}\,r\,c^3 = 0{\cdot}0642\,r\,c^3,$$

daher, wenn das Tragmoment für den vollen Kreisquerschnitt M' heisst, wegen $M' = \frac{\pi}{32}\,r\,c^3 = 0{\cdot}0982\,r\,c^3$ auch

$$M : M' = \frac{\sqrt{3}}{27} : \frac{\pi}{32} = 0{\cdot}6534 : 1 = 1 : 1{\cdot}5304,$$

wonach die Fläche des Rechteckes nur 0·6002 von der Kreisfläche, und das Tragvermögen des vierkantig behauenen Balkens nur 0·6534 von dem des runden Baumstammes betragen würde. Man bemerkt bei dieser Gelegenheit in Hinblick auf den §. 73, dass zwischen dem steifsten und stärksten Balken ein Unterschied sei, und dass der erstere eine verhältnissmässig grössere Höhe besitze, als der letztere.

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung.

§. 94.

Erklärung. Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung sind derart geformte, bei welchen unter hinreichender Grösse der Anspruchsnahme in Folge der Biegung die Elasticitätsgränze entweder bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung in allen Querschnitten zugleich erreicht wird. Bei solchen Körpern bleibt daher die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt.

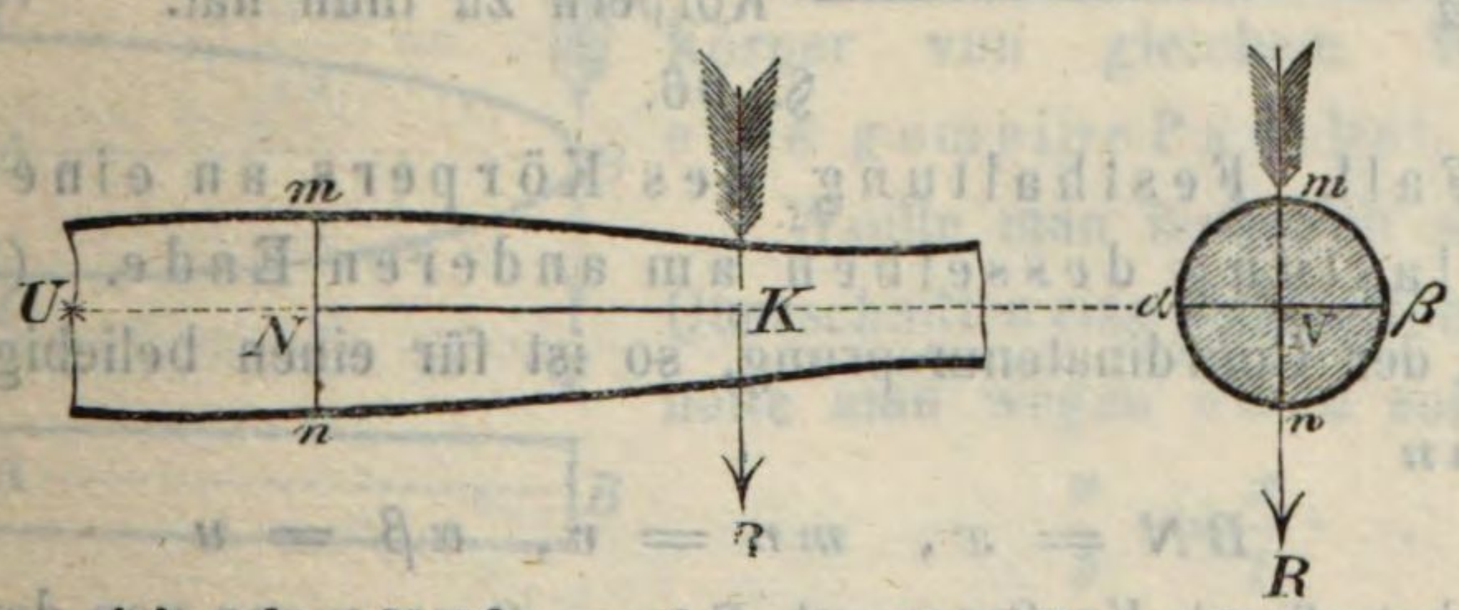
§. 95.

Form solcher Körper. Man begreift, dass solche Körper nicht die bisher betrachtete prismatische Form haben können, sondern die Dimensionen des Querschnittes mit der örtlichen Lage desselben variiren müssen. Es unterliegt indess keinem Anstande, hiebei die durch die Schwerpuncte der Querschnitte gezogene Längenaxe, wie bei einem Prisma, geradlinig anzunehmen. Der gestellten Bedingung gemäss kann der gefährliche Querschnitt an jeder beliebigen Stelle N (Fig. 76) angenommen, und hienach stets die Gleichung

$$Rz = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

aufgestellt werden, wenn in derselben M das Tragmoment des betreffenden Querschnittes, R die Resultirende der normal auf die

Fig. 76

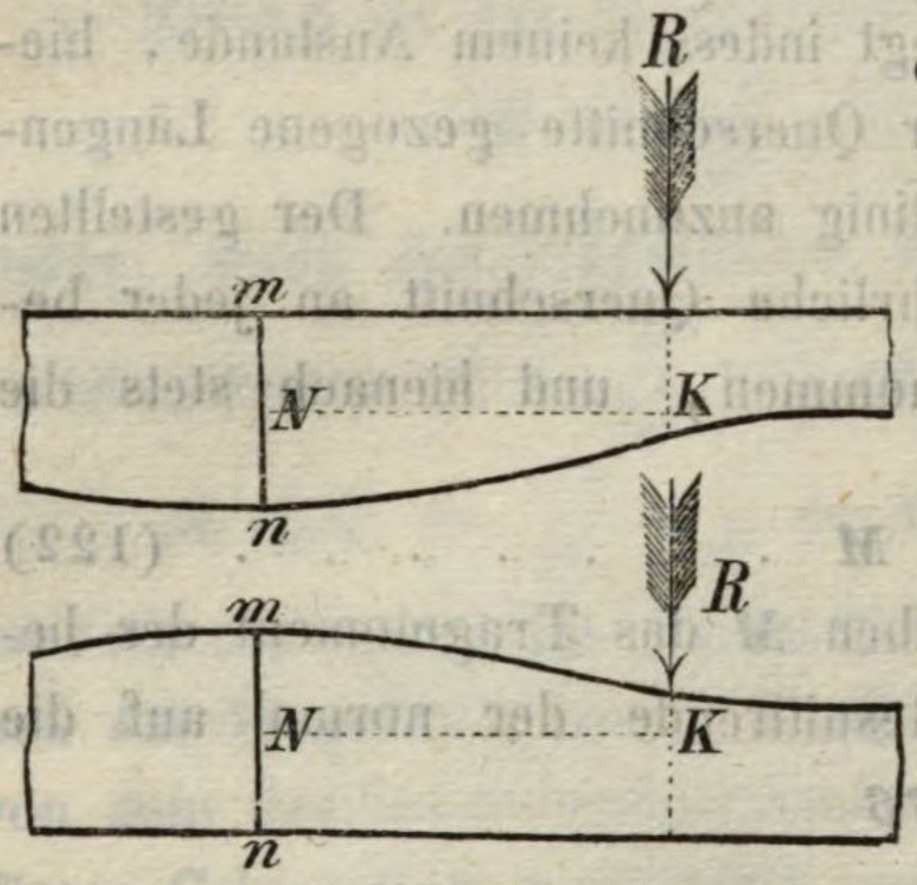


Längenaxe wirkenden Kräfte und $z = KN$ ihren Hebelsarm in Bezug auf die neutrale Axe des erwähnten Querschnittes bezeichnet.

Zur sofortigen Untersuchung lasse man den Querschnitt f mit seiner örtlichen Lage variiren, und beziehe die veränderlichen Grössen auf ein Coordinatensystem, in welchem die Abscissen in die Längenaxe fallen, und der Ursprung nach irgend einem Puncte U in dieser verlegt wird. Man setze hiebei die Abscisse UN . . . . . $= x$,
die variable Höhe des Querschnittes mn . . . . . $= v$
und die ebenfalls variable Breite desselben $\alpha\beta$ . . . . . $= u$.
Zuweilen kann v oder u auch constant sein.

Diesen Bezeichnungen gemäss wird man für jede gegebene Querschnittsform im Stande sein, das Tragmoment als eine Function von v und u auszudrücken, das Kraftmoment aber von x abhängig darzustellen, und auf diese Weise mittelst der Gleichung (122) eine Relation zwischen x, v und u zu bilden, welche sodann zur Anschauung führen wird, wie für einen Körper von gleichem Widerstande die Querschnitte mit der örtlichen Lage derselben zu variiren haben. Man kann sich übrigens auch erlauben, die Längenaxe, nämlich die Verbindung der Schwerpuncte der Querschnitte, krummlinig, anstatt wie zuvor geradlinig anzunehmen. In manchen Fällen ist diess sogar zweckmässig, z. B. dann, wenn man die obere oder untere Begränzung des Längendurchschnittes geradlinig wünscht. (Fig. 77.) Das Nachstehende zeigt die Anwendung dieser Lehre auf die im §. 58 bezeichneten Fälle I, II, III und IV, nur mit dem Unterschiede, dass man es hier mit anderen, als prismatischen Körpern zu thun hat.

Fig. 77.



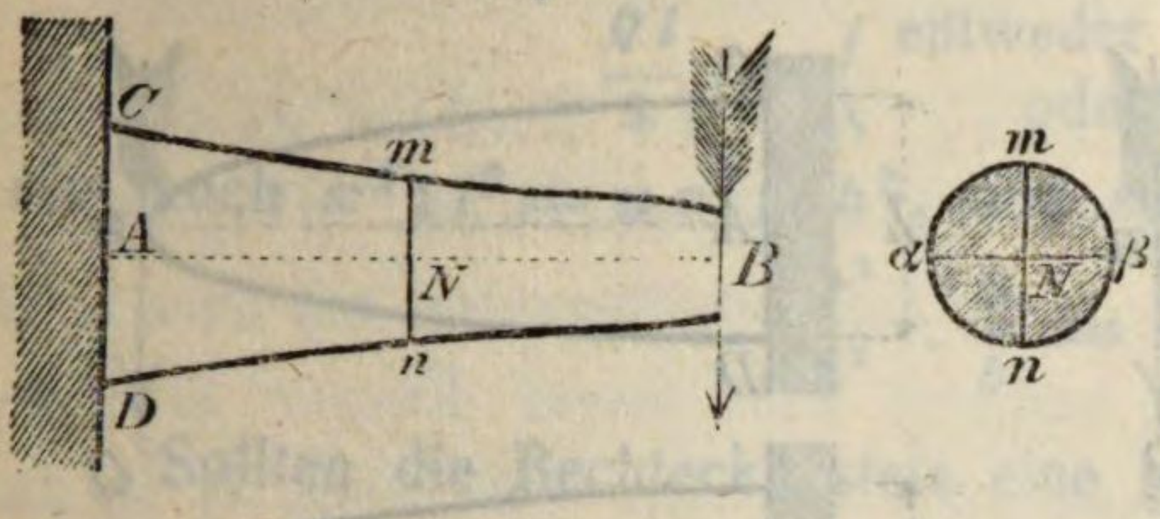
§. 96.

I. Fall. Festhaltung des Körpers an einem Ende und Belastung desselben am anderen Ende. (Fig. 78.) Sei in B der Coordinatenursprung, so ist für einen beliebigen Querschnitt mn

$$BN = x, \quad mn = v, \quad \alpha\beta = u$$

und das betreffende Kraftmoment $Rz = Qx$, wenn von dem eigenen Gewichte des Körpers abstrahirt wird. Um auch das Tragmoment M

Fig. 78.



von Seite des Querschnittes darstellen zu können, ist zunächst nothwendig, sich über die Form desselben zu einigen. Soll etwa der Querschnitt ein Rechteck von der Breite u und der Höhe v sein, so wäre nach den Gleichungen (96)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2, \end{cases}$$

daher wegen der Gleichung (122) sofort

$$Q x = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2. \end{cases}$$

Ist ferner für den Wurzelquerschnitt in A die Abscisse $x = AB = l$, die Breite $u = b$ und die Höhe $v = h$, so hat man analog

$$Q l = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a b h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b h^2, \end{cases}$$

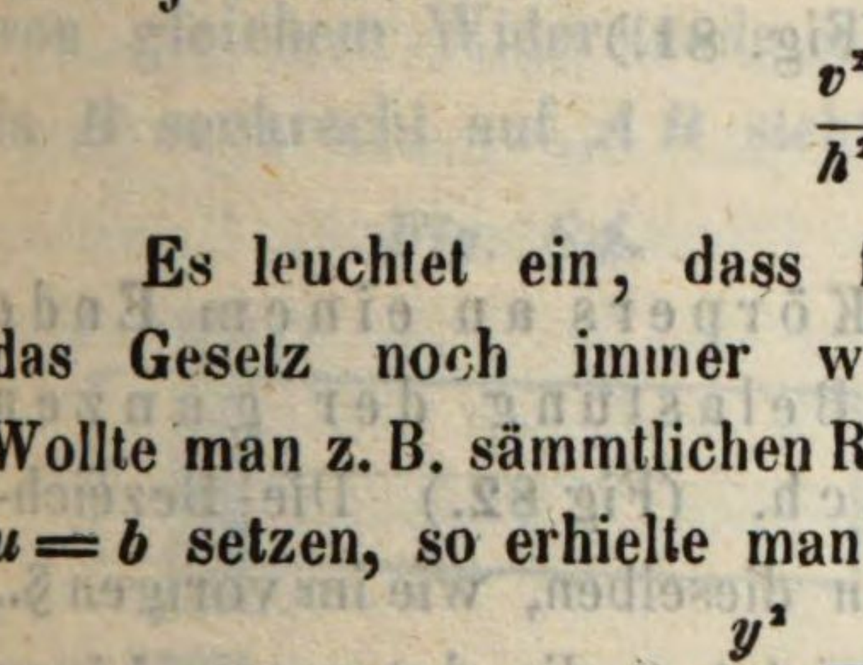
daher jedenfalls $l : x = b h^2 : u v^2$ und hieraus

$$\frac{v^2}{h^2} \cdot \frac{u}{b} = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (123).$$

Es leuchtet ein, dass für eine der beiden Grössen u und v das Gesetz noch immer willkürlich angenommen werden könne. Wollte man z. B. sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Breite geben, also $u = b$ setzen, so erhielte man

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124),$$

Fig. 79.



daher als Begränzungscurve bezüglich der Höhendimensionen für den Körper von gleichem Widerstande eine gemeine Parabel. (Fig. 79.)

Wollte man hingegen sämmtlichen Querschnitten eine gleiche Höhe geben, so hätte man wegen $v = h$ sofort

$$\frac{u}{b} = \frac{x}{l} \quad \ldots \quad (125),$$

wonach die Begränzung der Breitendimensionen für den Körper von gleichem Widerstande geradlinig würde. (Fig. 80.)

Fig. 80.

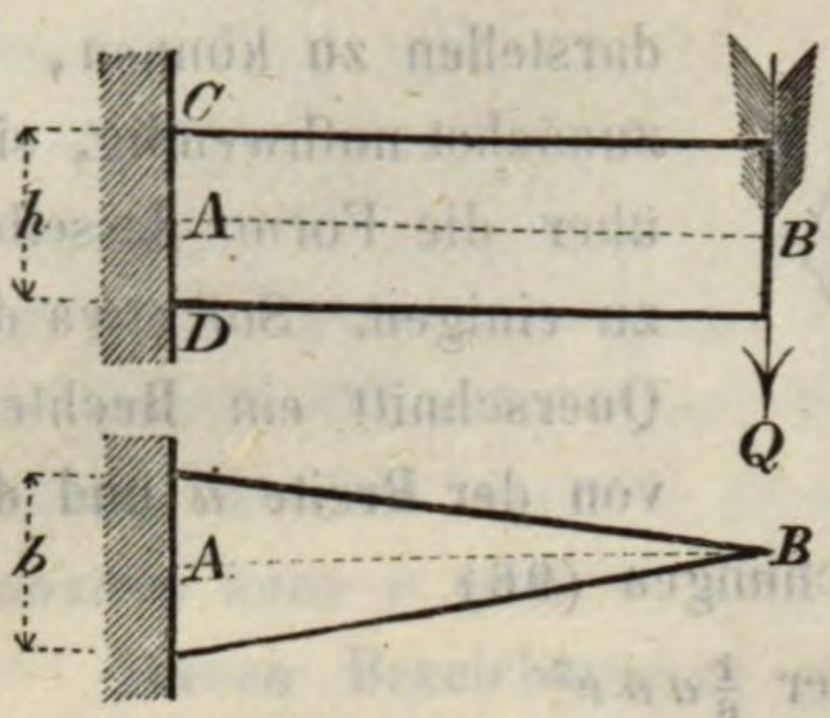
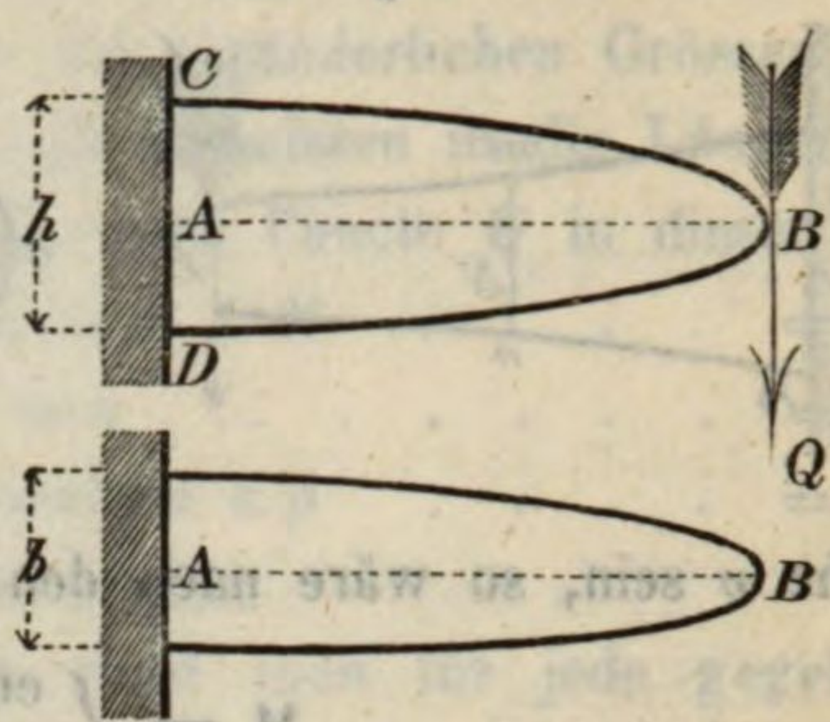


Fig. 81.



Sollten endlich die sämmtlichen Rechtecke ähnlich sein, so hätte man wegen $u : v = b : h$ oder $u = \frac{b}{h} v$ nach der Gleichung (123)

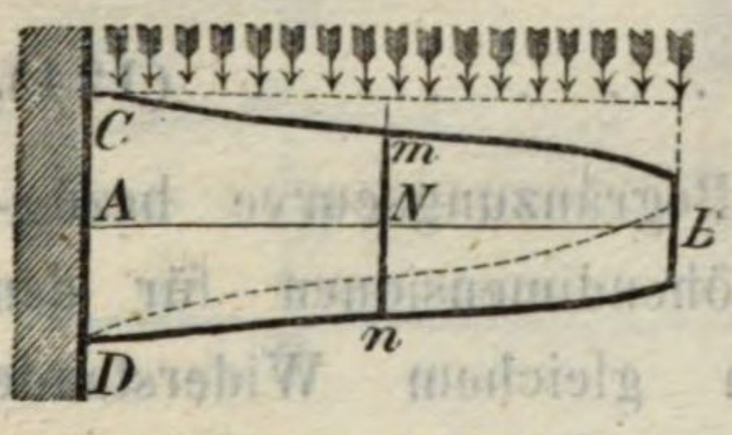
$$\left.\begin{aligned} \frac{v^3}{h^3} &= \frac{x}{l} \\ \text{und } \frac{u^3}{b^3} &= \frac{x}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (126).$$

Es wäre sodann die Begränzungscurve für die Oberfläche im Längendurchschnitte sowohl hinsichtlich der Höhen als auch der Breiten eine cubische Parabel. (Fig. 81.)

§. 97.

II. Fall. Festhaltung des Körpers an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach. (Fig 82.) Die Bezeichnungen seien dieselben, wie im vorigen §., nur bedeute jetzt Q die der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilte Belastung. In diesem Falle ist das Kraftmoment

Fig 82.



$$Rz = \frac{Q x^2}{2 l},$$

daher allgemein $M = \frac{Q x^2}{2 l}$.

Hätte man wieder als Querschnittsform die rechteckige, so wäre

$$\frac{Q x^2}{2 l} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2, \end{cases}$$

und insbesondere

$$\frac{Q\,l}{2} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\,a\,b\,h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,r\,b\,h^2, \end{cases}$$

also auch $x^2 : l^2 = u\,v^2 : b\,h^2$, und sofort

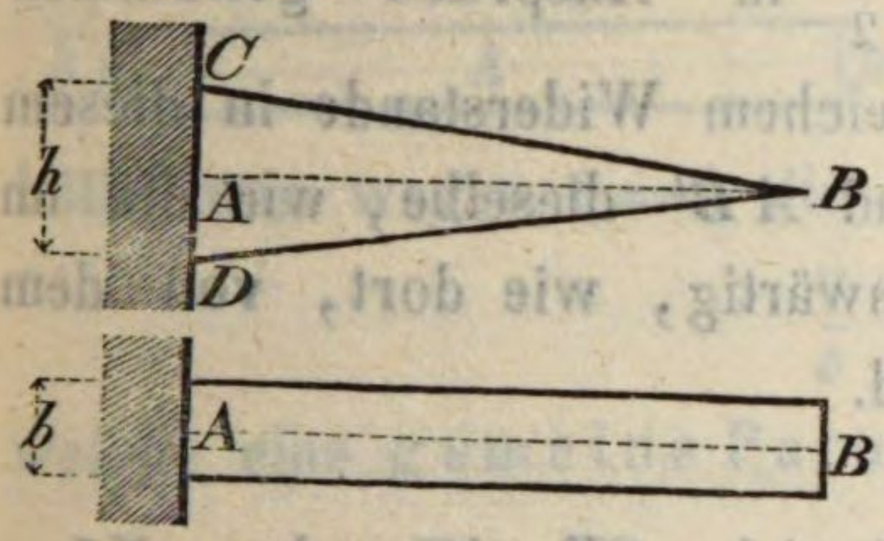
$$\frac{v^2}{h^2} \cdot \frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127).$$

Sollten die Rechtecke stets eine gleiche Breite haben, so wäre $u = b$ und

$$\frac{v}{h} = \frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128),$$

daher die Begränzung für die Höhendimensionen des Körpers von gleichem Widerstande geradlinig. (Fig. 83.)

Fig. 83.



Sollten hingegen die Rechtecke stets eine gleiche Höhe haben, so wäre $v = h$ und

$$\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129),$$

daher die Begränzungscurve für die Breitendimensionen des Körpers von gleichem Widerstande eine gemeine Parabel, deren Axe in B senkrecht auf AB steht. (Fig. 84.)

Fig. 84.

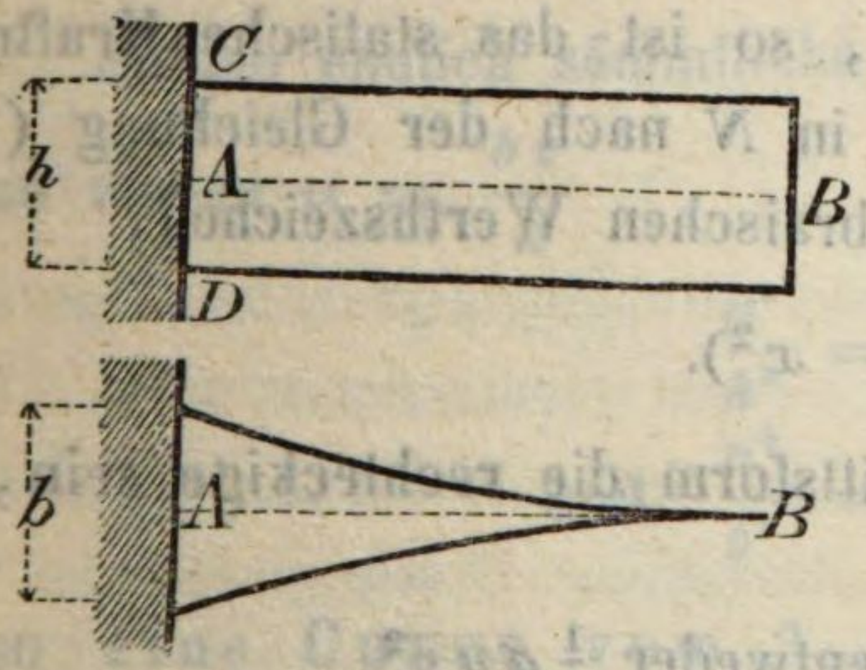
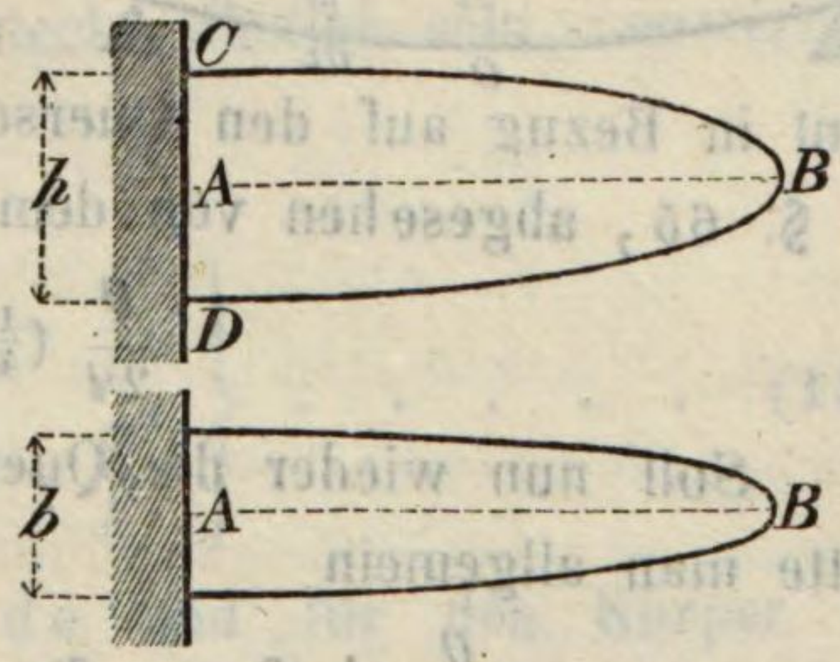


Fig. 85.



Sollten endlich die Rechtecke stets ähnlich sein, so müsste $u : v = b : h$, daher $u = \frac{b\,v}{h}$, sofort aber

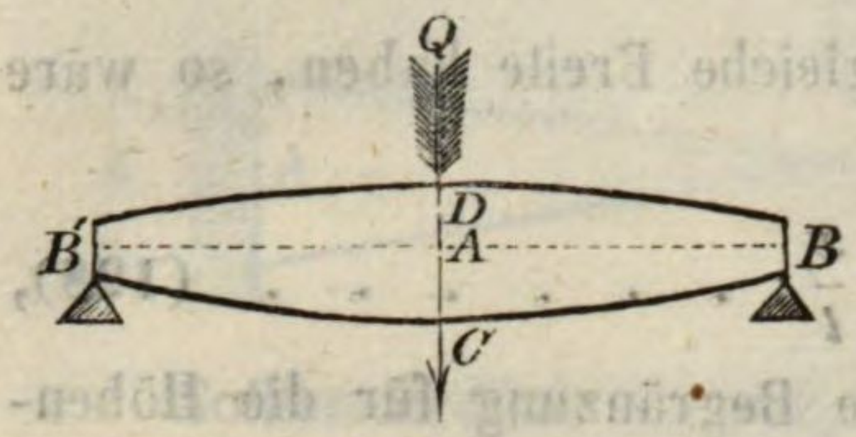
$$\left.\begin{aligned} \frac{v^3}{h^3} &= \frac{x^2}{l^2} \\ \text{und } \frac{u^3}{b^3} &= \frac{x^2}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

sein. Die betreffende Begränzungscurve gehörte sonach ebenfalls in die Familie der Parabeln. (Fig. 85.)

§. 98.

III. Fall. Unterstützung beider Enden des Körpers und Belastung in der Mitte desselben. (Fig.86.)

Fig 86.

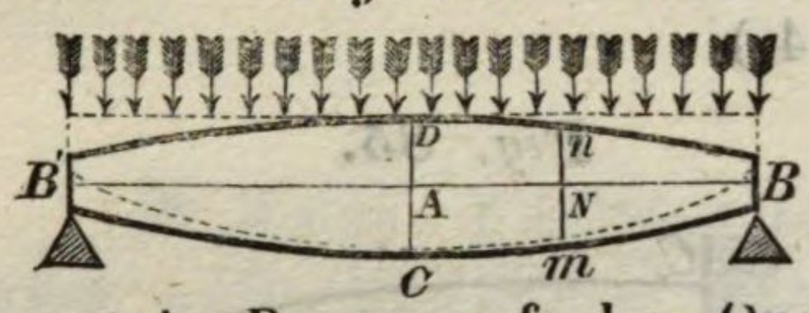


In Uebereinstimmung mit dem §. 63 befindet sich dieser Körper in demselben Zustande, wie wenn er in der Mitte CD festgehalten, und an den beiden Enden B und B' mit der Belastung $\frac{Q}{2}$ in Anspruch genommen würde. Die Form der Körper von gleichem Widerstande in diesem Falle ist also für jede Hälfte AB und AB' dieselbe, wie die im §. 96 besprochene, wenn auch gegenwärtig, wie dort, von dem eigenen Körpergewichte abstrahirt wird.

§. 99.

IV. Fall. Unterstützung beider Enden des Körpers, und gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach. (Fig. 87.)

Fig 87.



Setzt man in diesem Falle $AN = x$, $BB' = l$ und die ganze der Länge nach gleichförmig vertheilte Balastung $= Q$, so ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den Querschnitt in N nach der Gleichung (74) im §. 65, abgesehen von dem algebraischen Werthszeichen,

$$\frac{Q}{2l}\left(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2\right).$$

Soll nun wieder die Querschnittsform die rechteckige sein, so hätte man allgemein

$$\frac{Q}{2l}\left(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2\right) = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}auv^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6}ruv^2 \end{cases}$$

und insbesondere

$$\frac{Ql}{8} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}abh^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6}rbh^2, \end{cases}$$

sofort aber

$$\tfrac{1}{4}l^2 - x^2 : \tfrac{1}{4}l^2 = uv^2 : bh^2,$$

und daraus

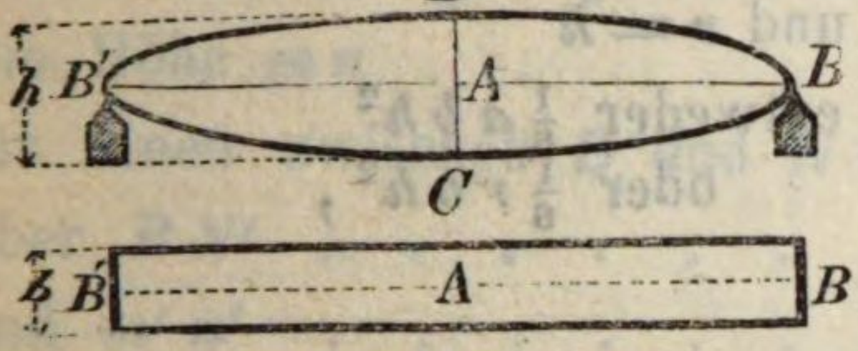
$$\frac{v^2}{h^2}\cdot\frac{u}{b} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (131).$$

Zur weiteren Versinnlichung mögen nun gleichfalls einige specielle Bedingungen eingeführt werden. Wollte man z. B. sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Breite geben, so würde wegen $u = b$

$$\frac{v^2}{h^2} = 1 - \frac{x^2}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (132),$$

daher die Curve, welche die Oberfläche des Körpers von gleichem Widerstande im Längendurchschnitte begränzte, eine Ellipse sein. (Fig. 88.)

Fig. 88.



Wollte man aber den sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Höhe geben, so hätte man wegen $v = h$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{u}{b} = 1 - \frac{x^2}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (133),$$

welche eine gemeine Parabel repräsentiren würde. (Fig. 89.)

Fig. 89.

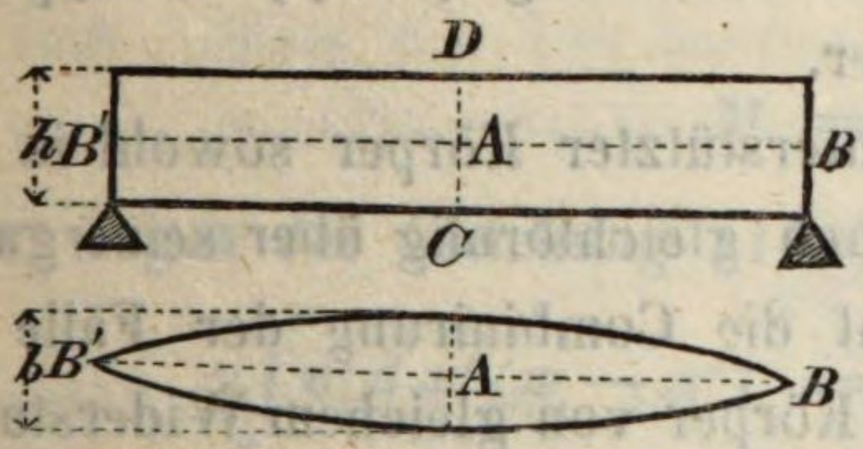
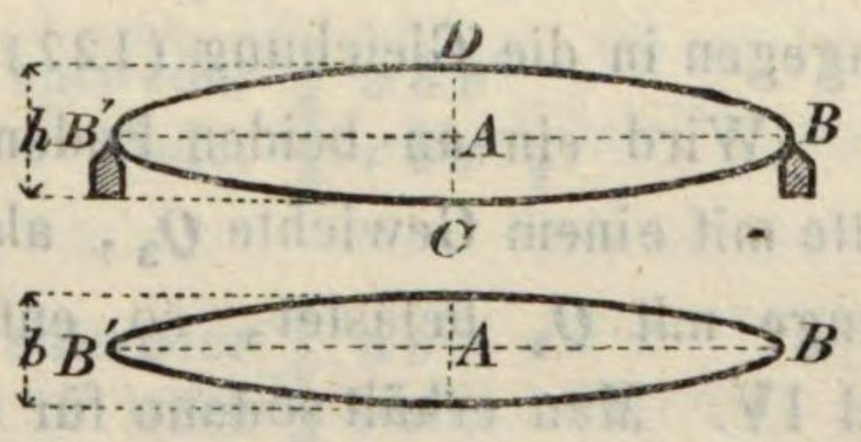


Fig. 90.



Sollten endlich sämmtliche Rechtecke ähnlich sein, so erhielte man wegen $u = \frac{b\,v}{h}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^3}{h^3} &= 1 - \frac{x^2}{l} \\ \text{und} \quad \frac{u^3}{b^3} &= 1 - \frac{x^2}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (134),$$

also eine Curve vom 3. Grade und für den Körper von gleichem Widerstande die Form, wie in der Fig. 90.

§. 100.

Combinirung der Fälle I und II, dann III und IV. Wird der Körper an einem Ende festgehalten, und am anderen Ende mit der Belastung Q_1, so wie der ganzen Länge nach mit der gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung der Fälle I und II. Behält man die betreffenden Be-

zeichnungen in den §§. 96 und 97 bei, so ist die Bedingungsgleichung für die Körper von gleichem Widerstande

$$M = Q_1 \, x + \frac{Q_2 \, x^2}{2 \, l},$$

also beispielsweise für einen rechteckigen Querschnitt

$$\text{allgemein } Q_1 \, x + \frac{Q_2 \, x^2}{2 \, l} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a \, u \, v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r \, u \, v^2, \end{cases}$$

und insbesondere wegen $x = l$, $u = b$ und $v = h$

$$(Q_1 + \tfrac{1}{2} \, Q_2) \, l = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a \, b \, h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r \, b \, h^2, \end{cases}$$

sofort aber jedenfalls

$$\frac{x}{l} \left\{ \frac{\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{1}{2} \frac{x}{l}}{\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{1}{2}} \right\} = \frac{u}{b} \cdot \frac{v^2}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135).$$

Diese Gleichung kann wieder auf mannigfaltige Weise benützt werden. Sie geht für $Q_2 = o$ in die Gleichung (123), für $Q_1 = o$ hingegen in die Gleichung (127) über.

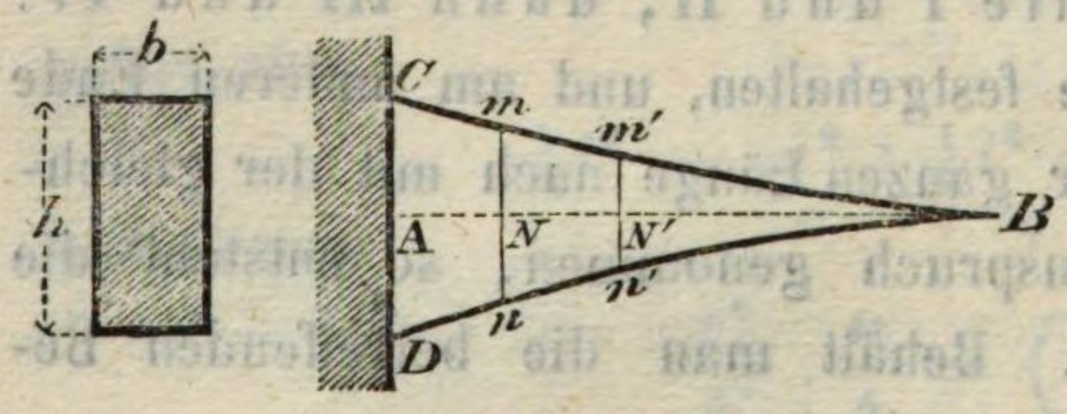
Wird ein an beiden Enden unterstützter Körper sowohl in der Mitte mit einem Gewichte Q_3, als auch gleichförmig über seine ganze Länge mit Q_4 belastet, so entsteht die Combinirung der Fälle III und IV. Man erhält sodann für die Körper von gleichem Widerstande als Bedingungsgleichung

$$M = \tfrac{1}{2} Q_3 \, (\tfrac{1}{2} l - x) + \frac{Q_4}{2l} \, (\tfrac{1}{4} l^2 - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (136),$$

wenn x und l, wie in der Figur (87) gewählt, und bloss der numerische Werth des statischen Kraftmomentes angenommen wird. Die sofortige Benützung dieser Gleichung unterliegt mit Rücksicht auf den Vorgang in den früheren §§. keinem Anstande. Auch erscheinen für $Q_4 = o$ und $Q_3 = o$ die in den §§. 98 und 99 behandelten Fälle III und IV für sich.

§. 101.

Fig. 91



Berücksichtigung des eigenen Körpergewichtes. Ein specielles Beispiel wird das einzuschlagende Verfahren deutlich machen. Es sei der Körper (Fig. 91) an einem Ende

festgehalten, und werde nur durch das eigene Gewicht beansprucht. Die Querschnitte sollen Rechtecke von gleicher Breite sein.

Man setze

die ganze Länge AB . . . . . $= l$,
die Höhe CD . . . . . $= h$,
die constante Breite . . . . . $= b$,
für einen beliebigen Querschnitt mn die Abscisse BN . . $= x$,
die Höhe mn . . . . . $= v$,
für einen zwischen B und N gelegenen Querschnitt $m'n'$
aber BN' . . . . . $= x'$
und $m'n'$ . . . . . $= v'$,
endlich das Gewicht der cubischen Einheit des Materiales . . $= \gamma$.

Das statische Moment des Gewichtes in Bezug auf die neutrale Axe im Querschnitte mn ist $Rz = b\gamma \int_o^x v' dx' (x - x')$ und das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a b v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b v^2, \end{cases}$$

daher wegen der Gleichung (122)

$$\gamma \int_o^x v' dx' (x - x') = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r v^2. \end{cases}$$

Differentirt man diese Gleichung zweimal nach x, so erhält man zuerst

$$\gamma dx \int_o^x v' dx' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a d(v^2) \\ \text{oder } \frac{1}{6} r d(v^2) \end{cases}$$

und weiters

$$\gamma v dx^2 = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a d^2(v^2) \\ \text{oder } \frac{1}{6} r d^2(v^2), \end{cases}$$

wenn man beachtet, dass

$$\int_o^x v' dx' = \int_o^x v dx \text{ ist.}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{d^2(v^2)}{dx^2} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{6\gamma}{a} v \\ \text{oder } \frac{6\gamma}{r} v, \end{cases}$$

und diesem Ausdrucke entspricht das Integrale

$$v = \begin{cases} \text{entweder } \frac{\gamma}{2a} x^2 \\ \text{oder } \frac{\gamma}{2r} x^2, \end{cases}$$

von welchen Doppelwerthen offenbar der grössere zu nehmen ist. Da nun $v = h$ und $x = l$ zusammengehörige Grössen sind, so hat man auch

$$h = \begin{cases} \text{entweder } \frac{\gamma}{2a} l^2 \\ \text{oder } \frac{\gamma}{2r} l^2 \end{cases}$$

und durch Vergleichung $y : h = x^2 : l^2$, sofort aber

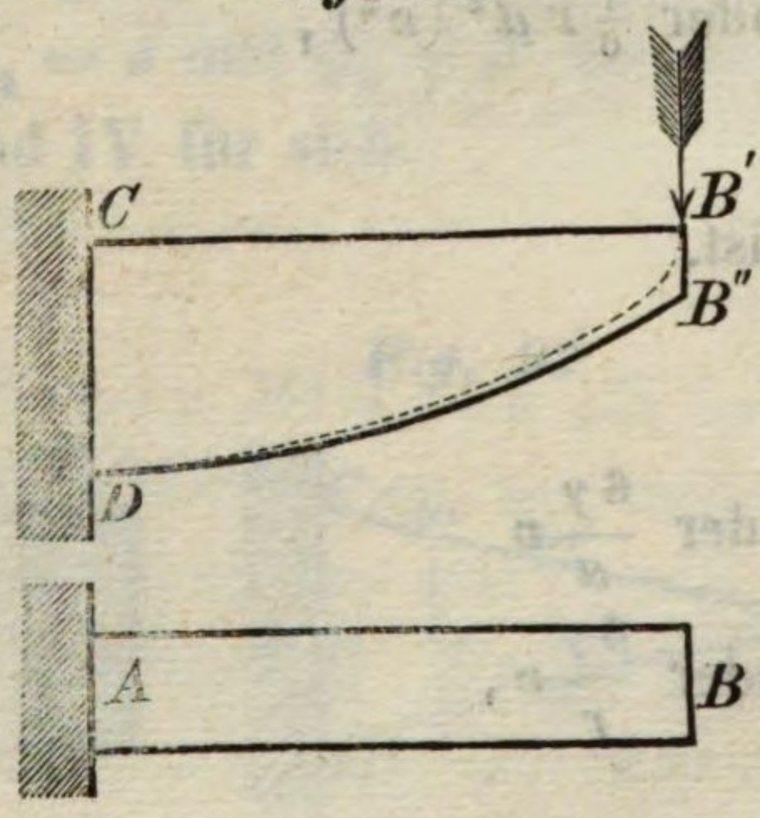
$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137).$$

In dem untersuchten Falle sind daher für den Körper von gleichem Widerstande die Curven BC und BD gemeine Parabeln, für welche die Axe in B normal auf AB steht Auf ähnliche Weise kann man auch in anderen Fällen verfahren.

§. 102.

Besondere Bemerkung. Man hat gesehen, dass bei Körpern von gleichem Widerstande die Querschnitte mit den statischen Kraftmomenten Rz kleiner werden, und dort, wo $z = o$ ist, gänzlich verschwinden. Das letzte Resultat ist eigentlich nicht mehr hinreichend genau. Die Gleichung (94) zwischen den statischen Kraft- und Widerstandsmomenten, welche bei der diessfälligen Untersuchung massgebend war, ist nämlich nur in so lange eine hinreichend genäherte, als z der Nulle sich nicht allzusehr nähert. Dieser Bedingung gemäss erkennt man, dass die entwickelten Formen für die Körper von gleichem Widerstande, von der Wahrheit in so ferne etwas abweichen werden, als die Querschnitte nicht mit z verschwinden dürfen, zumal auch die mittelst der Fig. 22 versinnlichte Tendenz des Uebereinanderverschiebens der Querschnitte zu berück-

Fig. 92.



sichtigen ist. So z. B. würde statt der Fig. 79 richtiger die Fig. 92 zu substituiren sein, wenn man hiebei mit Rücksicht auf die Fig. 77 die obere Begränzung geradlinig annähme.

§. 103.

Genäherte Formen für Körper von gleichem Widerstande. In manchen Fällen kann es zweckmässig sein, sich den Formen für Körper von gleichem Widerstande zu nähern. Als genäherte Formen kann man solche wählen, welche die vorhin durch Rechnung gefundenen umschliessen. Hiebei werden tangirende Ebenen an die betreffenden krummen Oberflächen nützliche Dienste leisten. So z. B. könnte man für den im §. 96 bezeichneten Fall statt den Figuren 79 und 81 genäherte Formen wählen, wie solche in den Figuren 93 und 94 ersichtlich sind. Eben so könnte die Fig. 95 anstatt der Fig. 88 genommen werden, wenn man zugleich die obere Begränzung des Längendurchschnittes geradlinig wünscht.

Fig. 93.

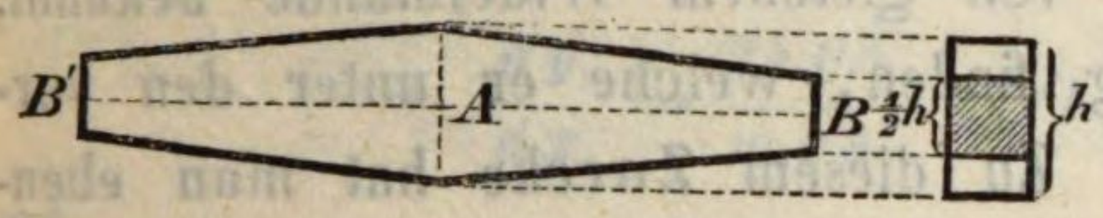


Fig. 94.

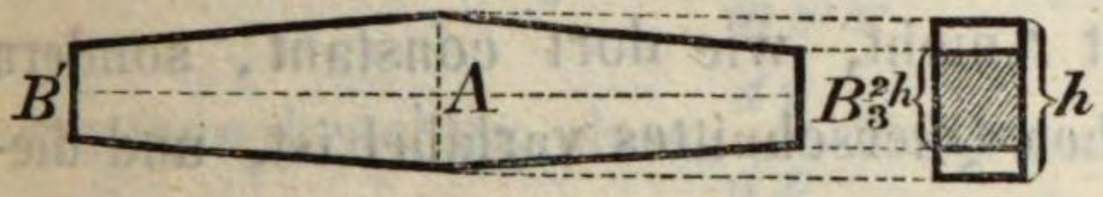
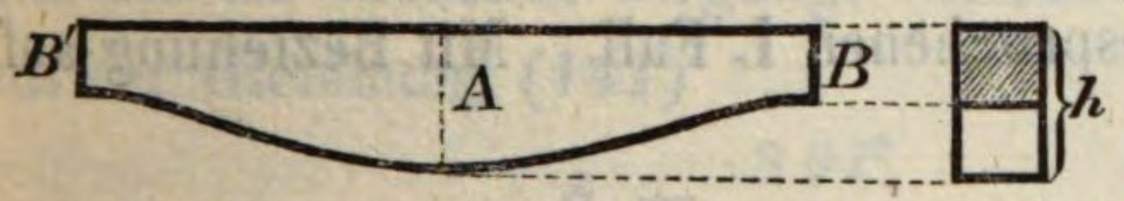
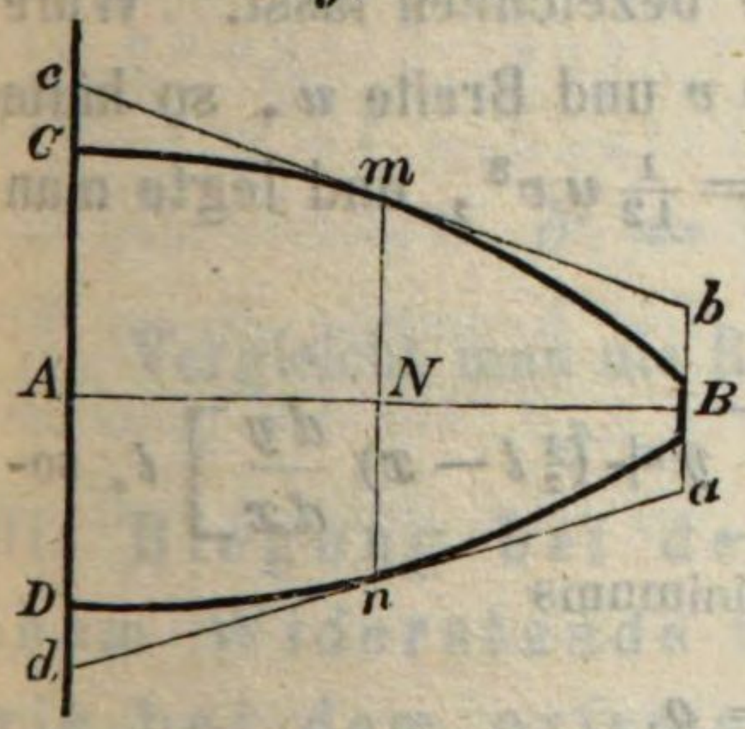


Fig. 95.



Bei der Wahl einer derartigen genäherten Körperform kann es geschehen, dass man die Absicht hat, anstatt der betreffenden Begränzungscurven BC und BD (Fig. 96) die Tangenten bc und ad so anzunehmen, dass die Fläche $abcd$ möglichst klein wird. Dieser Bedingung wird dadurch entsprochen, dass man $AN = BN$ macht *). Wäre z. B. die Curve, wie in

Fig. 96.



*) Sei nämlich zuerst bezüglich der Curve BC, $BN = x$, $AB = l$ und $mN = y$, so hat man $Bb = y - x\frac{dy}{dx}$ und $Ac = y + (l - x)\frac{dy}{dx}$, daher

der Fig. 79 eine Parabel, so würde durch die benannte Construction $Bb = \frac{1}{3} Ac$ werden.

Uebrigens leuchtet ein, dass bei solchen genäherten Körperformen die Lage des gefährlichen Querschnittes nicht mehr unbestimmt bleibt, sondern dort anzunehmen ist, wo die genäherte Form mit der der Rechnung entsprechenden zusammentrifft.

§. 104.

Biegung der Körper von gleichem Widerstande.

Ist die Form für einen Körper von gleichem Widerstande bekannt, so kann man auch die Biegung finden, welche er unter den vorhandenen Umständen erleidet. Zu diesem Zwecke hat man ebenfalls wie bei prismatischen Körpern die Gleichung (47) im §. 52 in geeigneter Weise anzuwenden, nur mit dem Unterschiede, dass der Werth für das Trägheitsmoment t nicht, wie dort constant, sondern nach Massgabe des veränderlichen Querschnittes variabel ist, und dieser Umstand bei der zweimal nach einander vorzunehmenden Integration zu berücksichtigen kommt. Um diess durch ein Beispiel zu zeigen, betrachte man den im §. 96 besprochenen I. Fall. Mit Beziehung auf die Figur 78 hat man zunächst

$$m t \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = - Q x,$$

indem man nämlich in der bezüglichen Gleichung (58) x statt $l - x$, daher $- dx$ statt dx setzt, und y, eben so wie in der Fig. 53, die Ordinate für den Punct N der Biegungscurve bezeichnen lässt. Wäre der Querschnitt ein Rechteck von der Höhe v und Breite u, so hätte man überdiess nach der Gleichung (51) $t = \frac{1}{12} u v^3$, und legte man

---

Area $ABbc = Y = \left(\frac{Bb + Ac}{2}\right) l$ oder $Y = \left[y + (\frac{1}{2} l - x) \frac{dy}{dx}\right] l$, sofort aber für den zu untersuchenden Fall des Minimums

$$\frac{dY}{dx} = l \left[\tfrac{1}{2} l - x\right] \frac{d^2 y}{dx^2} = o,$$

und hieraus $x = \frac{1}{2} l$. Für diesen Werth wird $\frac{d^2 Y}{dx^2} = - l \frac{d^2 y}{dx^2}$ positiv, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die Curve BC gegen die Axe AB concav gelegen, also $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ ist. Das Gleiche gilt für die untere Curve BD.

noch zur vollkommenen Bestimmung die der Figur 79 und der Gleichung (124) entsprechende Bedingung zu Grunde, so würde wegen $u = b$ und $v = h\sqrt{\frac{x}{l}}$ sofort

$$t = \tfrac{1}{12}\, b\, h^3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{l^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (138),$$

und auf diese Weise

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{12\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots (139).$$

Diesem Ausdrucke entsprechen die Integralien

$$\frac{d y}{d x} = \frac{24\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3} (\sqrt{l} - \sqrt{x}) \ldots\ldots (140)$$

und

$$y = \frac{24\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3} (x\sqrt{l} - \tfrac{2}{3} x\sqrt{x}) \ldots\ldots (141),$$

wenn man beachtet, dass $\frac{d y}{d x}$ für $x = l$ verschwinden, und für $x = o$ auch $y = o$ werden muss. Die grösste Ordinate y resultirt für $x = l$, und gibt die zu suchende Biegung. Heisst diese letztere δ, so erhält man aus der Gleichung (141)

$$\delta = \frac{8\, Q l^3}{m\, b\, h^3} \ldots\ldots (142).$$

Wäre der Körper prismatisch und der Querschnitt überall ein Rechteck von der Breite b und Höhe h gewesen, so würde zufolge der Gleichung (61) die Biegung $\delta' = \frac{1}{3}\frac{Q l^3}{m t}$, daher wegen $t = \frac{1}{12} b h^3$, auch

$$\delta' = \frac{4\, Q l^3}{m\, b\, h^3} \ldots\ldots (143).$$

Vergleicht man die Relationen (142) und (143), so erhält man

$$\delta = 2\, \delta' \ldots\ldots (144).$$

Die Biegung bei dem betrachteten Körper von gleichem Widerstande wäre daher doppelt so gross, als wie bei dem prismatischen Körper unter sonst gleichen Umständen.

Auf ähnliche Weise hat man in anderen Fällen zu verfahren, selbst dann, wenn man es bloss mit genäherten Formen für Körper von gleichem Widerstande zu thun hat. Es ist nämlich nur immer

das Hauptaugenmerk darauf zu richten, dass das betreffende Trägheitsmoment t als eine Function von x ausgedrückt werde, um hiedurch die nothwendige doppelte Integration der Gleichung (47) zu ermöglichen.

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Biegung *). Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung normal auf die Längenaxe.

§. 105.

Erklärung. Die Biegung eines materiellen Prismas erfolgt nicht plötzlich, sondern geht successive vor sich, indem die Puncte der Längenaxe eine verzögerte Bewegung annehmen, welche bei Beginn der Wirkung am grössten ist, und endlich nach Verlauf einer gewissen Zeit aufhört. Während dieser Zeit wird der Widerstand mit der Zunahme der Biegung nach und nach bis zu dem Grade gesteigert, welcher der am Schlusse der Bewegung hervorgebrachten totalen Biegung entspricht. Nachdem der jeweilige Widerstand als Gegenkraft auftritt, welche in der Längenaxe ihren Angriffspunct hat, so leuchtet ein, dass dieser Widerstand einen Weg zurücklegt, der aus der Grösse der Biegung zu beurtheilen ist.

Aus dieser Ursache wird bei jeder Biegung ein mechanisches Moment des Widerstandes in's Leben gerufen, welches von der jeweiligen Grösse des Widerstandes und der correspondirenden Biegung abhängt. Die Kenntniss dieses Momentes ist in manchen Fällen benützbar, wie z. B. bei der Beurtheilung der Wirkung eines Stosses, wenn derselbe normal auf die Längenaxe gerichtet ist.

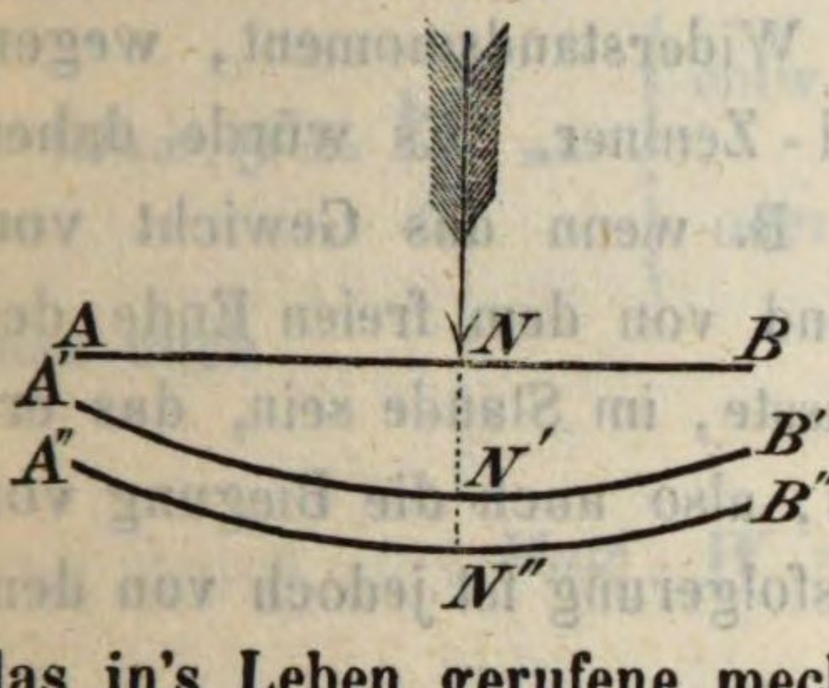
§. 106.

Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes. Zu diesem Behufe sei AB (Fig. 97) die Längenaxe eines

*) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand genannt.

materiellen Prismas, welches durch eine normal auf dieselbe gerichtete Kraftwirkung gebogen wird. Sei nach Verlauf einer gewissen

Fig. 97.



Zeit . . . . . t
die gedachte Längenaxe AB
in die Lage $A'B'$ gekommen,
und die dadurch eingetretene
Biegung NN' . . . . . $= \delta$,
der in diesem Augenblicke
sich einstellende Widerstand
N'' in N' . . . . . $= Q$,
das in's Leben gerufene mechanische Widerstandsmoment
aber . . . . . $= W$,
sei ferner für einen unendlich kleinen Zeitzuwachs . . . dt
die Biegungsvermehrung $N'N''$ . . . . . $= d\delta$,
so wie die Vergrösserung des Widerstandes . . . . . $= dQ$,
endlich die Vermehrung des mechanischen Widerstandsmomentes . . . . . $= dW$.

Diess vorausgesetzt, hat man analog, wie im §. 32,

$$dW = Q\,d\delta.$$

Um jetzt die Abhängigkeit zwischen Q und δ einzuführen, bemerke man, dass nach den Erörterungen im 1. Kapitel dieses Abschnittes die Biegung δ innerhalb der Elasticitätsgränzen der den Widerstand repräsentirenden Kraft proportional anzunehmen und sofort $\delta = cQ$ zu setzen ist, wo c in Bezug auf Q und δ als constant zu gelten hat, und bloss von den anderweitigen Umständen abhängt. Dieser Bemerkung zufolge erhält man wegen $d\delta = c\,dQ$ offenbar

$$dW = cQ\,dQ,$$

und sofort durch Integration

$$W = \frac{cQ^2}{2} = \frac{\delta^2}{2c} = \frac{Q\delta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145).$$

Das mechanische Widerstandsmoment steht daher im geraden Verhältnisse mit dem Quadrate des Widerstandes, oder auch mit dem Quadrate der Biegung, oder endlich auch mit dem Producte aus dem Widerstande und der Biegung, je nachdem man die eine oder andere von den Formeln betrachtet.

Wäre z. B. das Prisma an einem Ende festgehalten und am anderen Ende einer Kraftwirkung von 12 Zentnern ausgesetzt, welche eine Biegung von $\frac{1}{2}$ Zoll hervorbrächte, so hätte man für das durch diese Biegung entwickelte mechanische Widerstandsmoment, wegen $Q = 12$ und $\delta = \frac{1}{2}$, sofort $W = 3$ Zoll-Zentner. Es würde daher eine eben so grosse Stosswirkung, z. B. wenn das Gewicht von 1 Zentner 3 Zoll hoch gefallen wäre, und von dem freien Ende des Prismas plötzlich aufgehalten werden müsste, im Stande sein, das erwähnte mechanische Widerstandsmoment, also auch die Biegung von $\frac{1}{2}$ Zoll hervorzurufen. Bei dieser Schlussfolgerung ist jedoch von dem eigenen Gewichte des Prismas abgesehen.

§. 107.

Grösstes zulässiges mechanisches Widerstandsmoment. Das grösste mechanische Widerstandsmoment, auf welches ohne Gefahr für den Körperbestand gerechnet werden kann, wird erhalten, wenn man in der Relation (145) statt Q und δ die unter dieser Bedingung grössten zulässigen Werthe substituirt, also

$$Max.\ W = \tfrac{1}{2}\,(Max.\ Q)\,(Max.\ \delta) \quad . \quad . \quad (146)$$

setzt.

Wird zuerst das Prisma an einem Ende festgehalten, und mittelst einer Kraftwirkung am anderen Ende gebogen, so ist unter Beibehaltung der im 1. Kapitel dieses Abschnittes gewählten Bezeichnungen der grösste Werth für den Widerstand Q offenbar dem betreffenden Tragvermögen nach der Relation (106) gleich, während die grösste zulässige Biegung aus der Gleichung (117) zu entnehmen ist. In diesem Falle ist sonach

$$Max.\ Q = \frac{M}{l} = \begin{cases} \text{entw.} & \frac{a\,t}{h'\,l} \\ \text{oder} & \frac{r\,t}{h''\,l}, \end{cases} \quad \text{u.} \quad Max.\ \delta = \begin{cases} \text{entw.} \frac{1}{3} & \frac{a}{m}\,\frac{l^2}{h'} \\ \text{oder} \frac{1}{3} & \frac{r}{m}\,\frac{l^2}{h''}, \end{cases}$$

also auch

$$Max.\ W = \left\{ \begin{array}{ll} \text{entw.} \frac{1}{6} & \frac{a^2}{m}\,\frac{t\,l}{h'} \\ \text{oder} \frac{1}{6} & \frac{r}{m}\,\frac{t\,l}{h''^2} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (147).$$

Wird hingegen das Prisma an beiden Enden unterstützt, und concentrirt sich die Kraftwirkung in der halben Länge, so hat man nach den Gleichungen (108) und (119)

$$Max.Q = \frac{4M}{l} = \begin{cases} \text{entw.} \dfrac{4at}{h'l} \\ \text{oder} \dfrac{4rt}{h''l}, \end{cases} \quad \text{u.} \; Max.\delta = \begin{cases} \text{entw.} \frac{1}{12} \dfrac{a}{m} \dfrac{l}{h'} \\ \text{oder} \frac{1}{12} \dfrac{r}{m} \dfrac{l^2}{h''}, \end{cases}$$

also auch

$$Max.W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \frac{1}{6} \dfrac{a^2}{m} \dfrac{lt}{h'} \\ \text{oder} \frac{1}{6} \dfrac{r^2}{m} \dfrac{lt}{h''^2} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (148).$$

Es versteht sich übrigens von selbst, dass von den jeweiligen Doppelwerthen stets die kleineren zu gebrauchen sind.

Die Gleichungen (147) und (148) sind merkwürdiger Weise identisch, wenn anders die gleichnamigen Buchstaben gleiche Werthe haben.

Unter dieser Bedingung folgt, dass das Prisma in den betrachteten 2 Fällen dasselbe mechanische Widerstandsmoment zu leisten fähig ist, und daher in dieser Beziehung die beiderseitige Verschiedenheit in der Art der Anspruchsnahme vergleichsweise keinen Vortheil darbietet.

§. 108.

Anwendung auf besondere Querschnitte. Um die Anwendung des in dem vorigen §. Gesagten auf besondere Querschnitte des Prismas durchzuführen, ist es nur nöthig, in der aufgestellten Formel für $Max.W$ statt dem Trägheitsmomente t und den Höhendimensionen h' und h'' die entsprechenden Werthe zu setzen. Berücksichtiget man die im §. 55 angegebenen einfachen Querschnitte, so erhält man:

1. für ein Rechteck (Fig. 41)

$$Max.W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \frac{1}{18} \dfrac{a^2}{m} fl \\ \text{oder} \frac{1}{18} \dfrac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (149);$$

2. für ein Rhombus (Fig. 42), und für die Figuren (43) und (44)

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{36}\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } \frac{1}{36}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (150)$$

3. für eine Ellipse (Fig. 45) oder (Fig. 46)

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{24}\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } \frac{1}{24}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (151);$$

4. für eine halbe Ellipse (Fig. 47), wenn die oberen Fasern ausgedehnt, und die unteren zusammengedrückt werden

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entw. } 0{\cdot}035\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } 0{\cdot}065\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (152),$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden,

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entw. } 0{\cdot}065\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } 0{\cdot}035\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (153);$$

5. für ein Dreieck (Fig. 48), wenn die Fasern an der Basis ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden,

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{12}\,\frac{a}{m}\,fl\\ \text{oder } \frac{1}{48}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (154),$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die Fasern an der Spitze ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden,

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{48}\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } \frac{1}{12}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (155);$$

6. für ein Parabelsegment in der Stellung (Fig. 49)

$$Max\ .\ W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{30}\,\frac{a^2}{m}\,fl\\ \text{oder } \frac{1}{80}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (156);$$

7. für ein Parabelsegment in der Stellung (Fig. 50), wenn die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{2}{63}\,\frac{a^2}{m}\,fl \\ \text{oder } \frac{1}{14}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (157),$$

und im entgegengesetzten Falle, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden,

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } \frac{1}{14}\,\frac{a^2}{m}\,fl \\ \text{oder } \frac{2}{63}\,\frac{r^2}{m}\,fl\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (158).$$

Ex. Sei für einen hölzernen Balken mit rechteckigem Querschnitte $f = 100\square''$, $l = 288''$, $r = 10$ Zentner und $m = 16000$, so wäre nach der zweiten der Formeln (149), welche für Holz wegen $r < a$ den kleineren Werth gibt, $Max.\ W = 10$ Zoll-Zentner. Der Stoss eines Gewichtes von 1 Zentner würde daher von dem Balken noch ohne Gefahr aufgehalten werden können, wenn im Augenblicke des Stosses die Geschwindigkeit des Gewichtes nicht grösser wäre, als die zur Geschwindigkeitshöhe $10''$ gehörige.

§. 109.

Hauptsätze für das mechanische Widerstandsmoment.

1. Bezüglich der Wahl der richtigen Formel aus den betreffenden Doppelwerthen gelten offenbar dieselben Bemerkungen, welche im §. 79 bezüglich der Tragmomente angeführt worden sind.

2. Man erkennt aus den im vorigen §. gegebenen Formeln, dass allgemein

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c}\text{entweder } C\,.\,\frac{a^2}{m}\,K \\ \text{oder } C'\,.\,\frac{r^2}{m}\,K\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (159)$$

gesetzt werden kann, wenn C und beziehungsweise C' gewisse dem Querschnitte entsprechende Coefficienten sind, und $K = fl$ den Körperraum des Prismas bezeichnet.

Das mechanische Widerstandsmoment, welches das Prisma ohne Gefahr entwickeln kann, ist sonach un-

ter übrigens gleichen Umständen seinem Körperinhalte proportionirt.

Diese Eigenschaft ist übereinstimmend mit derjenigen, welche für das mechanische Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung und gegen Zusammendrückung angegeben wurde. (§. 33 ad 2.) Die dort beigefügte besondere Bemerkung wegen der nicht unbedingten Zulässigkeit dieses Raisonnements und wegen allfälliger Beschränkung desselben ist hier gleichfalls zu beachten.

4. Die im §. 33 ad 4 gemachte Bemerkung, in Betreff des Einflusses der mehr oder minder günstigen Umstände auf das mechanische Widerstandsmoment hat auch gegenwärtig volle Giltigkeit, indem die zu betrachtenden Werthe von $Max.W$, eben so wie dort die analogen Werthe von W_a und W_r, unter sonst gleichen Umständen von $\frac{a^2}{m}$ und beziehungsweise $\frac{r^2}{m}$ abhängen.

5. Für ein und dasselbe Prisma ist das mechanische Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung nach §. 33 ad 2

$$W_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2}{m}\,K,$$

und das gegen Zusammendrückung

$$W_2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{r^2}{m}\,K,$$

das gegen Biegung aber nach der Relation (159)

$$W_3 = \begin{cases} \text{entw. } C\ .\ \frac{a^2}{m}\,K \\ \text{oder } C'\ .\ \frac{r^2}{m}\,K. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{array}{r} \text{entweder } W_1 : W_3 = 1 : 2C \\ \text{oder } W_2 : W_3 = 1 : 2C' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (160).$$

Von diesen beiden Proportionen entspricht jedoch nur diejenige den thatsächlichen Verhältnissen, welche nach dem kleineren Werthe von W_3 resultirt. So z. B. hätte man für ein Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41), wenn bei dem verwendeten Materiale $a \lesseqgtr r$ wäre, nach der ersten der Formeln (149) $C = \frac{1}{18}$, also auch $W_1 : W_3 = 1 : 2C = 9 : 1$. Diess besagt, dass das betreffende Prisma in der Richtung der Längenaxe ohne Gefahr eine neunmal grössere Stosswirkung im Sinne der Ausdehnung aus-

halten kann, als normal auf die Axe, wenn man in letzterer Hinsicht die zu den Formeln (147) und (148) gehörigen Fälle beachtet, und dabei von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt.

6. Wird das mechanische Widerstandsmoment in den 2 Fällen verglichen, in welchen der Querschnitt, wie in der Fig. 73, in einander entgegengesetzte Lagen gebracht ist, so findet man der Hauptsache nach dieselben Eigenschaften, wie im §. 81 für das Tragmoment, nur mit dem Unterschiede, dass statt den dortigen Verhältnissen $\alpha:\beta$ und $a:r$ gegenwärtig die Quadrate derselben, nämlich $\alpha^2:\beta^2$ und $a^2:r^2$ zu substituiren sind. Durch das Umkehren des Querschnittes wird daher das mechanische Widerstandsmoment unter übrigens gleichen Umständen im Verhältnisse entweder wie $\alpha^2:\beta^2$, oder wie $a^2:r^2$ verändert, und diese Veränderung kann je nach dem betreffenden Falle in einer Vermehrung oder in einer Verminderung bestehen. Von diesen Verhältnissen ist auch gegenwärtig, eben so wie bezüglich des Tragmomentes, nur dasjenige massgebend, welches sich von der Einheit weniger entfernt. Dieser massgebende Werth wird oft die Einheit selbst werden, d. h. die Gleichheit des mechanischen Widerstandsmomentes in den betrachteten 2 Stellungen anzeigen. Auch leuchtet ein, dass die grösste Veränderung, welche in dem mechanischen Widerstandsmomente in Folge des Umkehrens eines Querschnittes überhaupt möglich ist, durch das Verhältniss $a^2:r^2$ ausgedrückt sein wird.

§. 110.

Folgerungen. Die für die mechanischen Widerstandsmomente gegebenen Formeln können durch gegenseitige Vergleichung zu mannigfaltigen nützlichen Resultaten führen. Es sollen hievon nur einige bemerkt werden.

1. Will man die mechanischen Widerstandsmomente vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten I und II (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen entwickeln können, und nennt man die betreffenden Maximalwerthe der mechanischen Widerstandsmomente W_I und W_{II}, so hat man unter Beibehaltung der diessfälligen Bezeichnungen nach den Formeln (149) und (151)

$$W_I = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{18}\,\frac{a^2}{m}\,K \\ \text{oder } \frac{1}{18}\,\frac{r^2}{m}\,K \end{cases} \text{ u. } W_{II} = \begin{cases} \text{entw } \frac{1}{24}\,\frac{^2a}{m}\,K \\ \text{oder } \frac{1}{24}\,\frac{^2r}{m}\,K, \end{cases}$$

und da von diesen Alternativwerthen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren, als die kleineren, Mass und Ziel zu geben haben, die Proportion

$$W_I : W_{II} = \tfrac{1}{18} : \tfrac{1}{24} = 4 : 3.$$

Es ist also das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment des Prismas mit dem quadratförmigen Querschnitte um den 3. Theil grösser, als das von dem Prisma mit dem kreisförmigen Querschnitte. Dasselbe gilt auch, wenn man überhaupt statt dem Quadrate ein Rechteck, und statt dem Kreise eine Ellipse wählt, vorausgesetzt, dass dabei der Querschnittsinhalt nicht geändert wird.

2. Zu einer weiteren Vergleichung untersuche man die grössten zulässigen Widerstandsmomente eines Prismas mit einem rechteckigen Querschnitte in den Stellungen I, II und III (Fig. 52). Bezeichnet man die betreffenden Maximalwerthe gleichfalls mit W und mit — den numerirten Fällen correspondirenden — Zeigern, so erhält man mit Rücksicht auf die Formeln (149) und (150)

$$W_I = \begin{cases} \text{entw. } \frac{a^2 K}{8m} \\ \text{oder } \frac{r^2 K}{18m}, \end{cases} \quad W_{II} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{a^2 K}{18m} \\ \text{oder } \frac{r^2 K}{18m} \end{cases} \text{ u. } W_{III} = \begin{cases} \text{entw. } \frac{a^2 K}{36m} \\ \text{oder } \frac{r^2 K}{36m}, \end{cases}$$

daher durch Vergleichung jedenfalls

$$\text{d. h. } \begin{array}{l} W_I : W_{II} : W_{III} = 1 : 1 : \frac{1}{2}, \\ W_I = W_{II} \text{ und } W_{III} = \frac{1}{2} W_I = \frac{1}{2} W_{II}. \end{array}$$

Diese Resultate sind merkwürdig. Sie lehren, dass das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment dasselbe bleibt, ob die Biegung in der Richtung der grossen oder der kleinen Seite des rechteckigen Querschnittes stattfindet, dass aber das fragliche Widerstandsmoment bis auf die Hälfte des vorigen

Werthes herabsinkt, wenn die Biegung normal auf die Diagonale des rechteckigen Querschnittes gerichtet ist.

3. Da das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment im directen Verhältnisse mit dem Körperraume des Prismas steht, so kann es geschehen, dass dasselbe bei ganz verschiedenen Lagen des Querschnittes ungeändert bleibt. Man hat bereits ad 2 einen solchen Fall bei dem rechteckigen Querschnitte kennen gelernt. Dasselbe findet bei dem dreieckigen Querschnitte statt. Wird nämlich derselbe in die 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes parallel zur neutralen Axe gehen, also gleichsam als Grundlinien fungiren, so hat man in jeder dieser 3 Stellungen zufolge der Gleichungen (154) oder (155) denselben Werth für das mechanische Widerstandsmoment, wenn nur bei dieser Vergleichung die gespannten Fasern stets an der jeweiligen Spitze des Querschnittes, oder stets an der Basis desselben vorkommen. Für $a = r$ würde auch diese Bedingung wegfallen. Endlich hat man für den elliptischen Querschnitt in jeder beliebigen Lage nach der Gleichung (151) wegen $fl = K$

$$Max.\ W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{24}\ \frac{a^3}{m}\ K \\ \text{oder } \frac{1}{24}\ \frac{r^3}{m}\ K, \end{cases}$$

wonach das Prisma mit diesem Querschnitte, wenn dasselbe um seine Längenaxe gedreht wird, in jeder Stellung das gleiche mechanische Widerstandsmoment entwickeln kann.

Die Ursache dieser nicht selten vorkommenden Eigenschaft ist nicht schwer einzusehen, wenn man beachtet, dass das mechanische Widerstandsmoment laut der Gleichung (146) nach der Grösse des Productes aus dem Tragvermögen und der diessfälligen Biegung gemessen wird. Entspricht nun dem grösseren Tragvermögen eine kleinere Biegung, und dem kleineren Tragvermögen eine grössere Biegung, und befolgt die Veränderung sowohl bei dem Tragvermögen als auch bei der Biegung dasselbe Gesetz, so werden offenbar die fraglichen Producte aus Tragvermögen und Biegung, und daher auch

die betreffenden mechanischen Widerstandsmomente gleiche Werthe haben.

§. 111.

Anwendung auf besondere Materialien (Schmiedeeisen, Gusseisen, Holz). Um die für die grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomente gefundenen Resultate für die genannten Materialien anschaulich zu machen, hat man nur statt $\frac{a^2}{m}$ und beziehungsweise $\frac{r^2}{m}$ die entsprechenden Werthe zu setzen. Zu einer beiläufigen Vorstellung können die betreffenden Mittelwerthe aus den §§. 34, 35, 36 und 37 entnommen werden. Ueberhaupt gilt das an jenen Orten, so wie in den darauf folgenden §§. 38 und 39 Angeführte der Hauptsache nach auch gegenwärtig.

Anmerkung. Die zwischen der Biegung und dem diessfälligen Widerstande herrschende Relation kann auf ähnliche Weise, wie im 1. Abschnitte bezüglich der Ausdehnung und Zusammendrückung, mittelst Curven graphisch dargestellt, und eine solche graphische Darstellung auch zur Anschauung der auf die Biegung bezüglichen Eigenschaften gebraucht werden. Es leuchtet ein, dass die Abhängigkeit zwischen der Biegung und dem Widerstande eben so, wie bei der Ausdehnung und Zusammendrückung, in so lange genau genug durch die Coordinaten einer geraden Linie repräsentirt werden könne, als die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

Was die Brauchbarkeit der vorstehenden Theorie über die Biegung anbelangt, so kann dieselbe nicht bezweifelt werden. Zahlreiche Versuche haben schon die hinreichende Genauigkeit der älteren Theorien, wenn auch nicht durchgehends, doch nach vielen Richtungen dargethan. Die in der vorliegenden Theorie eingeführten Verbesserungen und Ergänzungen insbesondere bezüglich der neutralen Schichte, des Tragmomentes und des Tragvermögens sind geeignet, auch die Anomalien zu beseitigen, die sich bei der Vergleichung der Erfahrungen mit den Resultaten der bisherigen Theorien ergeben haben. Diese letzteren (nach Navier und Redtenbacher), welche hinsichtlich der Bestimmung des Tragvermögens und der daran geknüpften Consequenzen in manchen Fällen bedeutend von einander abweichen, sind nämlich nur als specielle Theile der im vorliegenden

Werke gegebenen Theorie zu betrachten. In manchen Fällen kann allerdings die Theorie nach Navier, in manchen Fällen wieder die Theorie nach Redtenbacher richtig sein, in manchen Fällen aber können beide Theorien unrichtige Resultate geben. In dem Vorhergehenden hat man gesehen, dass die hier durchgeführte Theorie diese verschiedenen Fälle deutlich gruppirt, zugleich aber auch im Stande ist, dieselben unter sich zu vereinigen, und wie oben bemerkt, die Anomalien zu beseitigen, welche sich durch die Vergleichung der Resultate unter sich, und mit der Erfahrung ergeben haben. Einen unzweideutigen Beweis dafür wird man im §. 145 kennen lernen, welcher die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens behandelt, denn man wird dort sehen, dass in dieser Beziehung die Theorie nach Redtenbacher ein schon der einfachen Anschauungsweise widersprechendes, die Theorie nach Navier aber ein solches Resultat gibt, welches nur in einem besonderen Falle richtig sein kann, während dagegen die in diesem Werke durchgeführte Theorie, nach welcher das Tragmoment und Tragvermögen im Allgmeinen alternativ ausgedrückt sind, auf Ergebnisse leitet, welche nicht nur mit den im Grossen angestellten Versuchen, sondern auch schon mit der einfachen Anschauungsweise übereinstimmen. Nur darf nicht übersehen werden, dass solche Anomalien, welche durch eine zu ungleiche Qualität in der Materie, durch Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen, so wie durch eine Anwendung von abnormen Querschnittsformen oder zu unbedeutenden Körperlängen herbeigeführt werden sollten, ausser den Kreis dieser Betrachtung gehören, da in diesen Beziehungen gleich Anfangs der Giltigkeit der Theorie gewisse Gränzen gezogen worden sind, die bei ihrem Gebrauche selbstverständlich eingehalten werden müssen. Insbesondere darf man die im §. 41 zu Grunde gelegten Hypothesen nicht aus den Augen verlieren, wonach der Querschnitt des Prismas in Folge der Biegung nicht aus seiner Form gerathen soll. Desshalb hat man sich auch erlauben dürfen, die Pressungen der Fasern in dem der Zusammendrückung ausgesetzten Querschnittstheile nach den Erörterungen im 1. Abschnitte zu beurtheilen. Ist übrigens ein Ausweichen, ein Verbiegen der gepressten Querschnittstheile nach irgend einer Seite hin zu besorgen, so muss man, um die oben erwähnten Hypothesen der Wahrheit nahe zu bringen, die grösste zulässige Pressung r in den zusammengedrückten Fasern verhältnissmässig kleiner annehmen, als diejenige, welche bei dem Nichtvorhandensein jener Besorgniss gestattet wäre. Wie weit eine solche Verkleinerung zu gehen hat, diess hängt von der Art und Weise der Construction und von dem Grade der Möglichkeit ab, den Querschnitt in seiner Form zu erhalten. Ist es aber gelungen, den Werth von r mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände festzustellen, und hat man sich auch über den Werth der grössten zulässigen Spannung α vereinigt, so können die in diesem Abschnitte ge-

gebenen Regeln und Formeln innerhalb der oben erwähnten Gränzen unbedenklich zugelassen werden. Die durch diese Gränzen entstehenden Beschränkungen für den Gebrauch der Theorie können dem Werthe derselben keinen Eintrag thun, da die practisch vorkommenden Fälle in der Regel solche sind, bei welchen die Anforderungen im Sinne dieser Beschränkungen gestellt werden. Uebrigens wird der Widerstand von prismatischen Körpern mit verhältnissmässig kleinen Längen, wenn die Kraftwirkung normal auf die Längenaxe gerichtet ist (wie bei Bolzen, Nieten u. s. w.), im vierten Abschnitte des zweiten Hauptstückes besonders erörtert.

Zweites Hauptstück.

Anwendung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien auf Holz- und Eisen-Constructionen.

§. 112.

Die im 1. Hauptstücke gelieferte Theorie über den Widerstand fester elastischer Materialien findet Anwendung bei der Beurtheilung von Holz- und Eisenconstructionen. Diese Anwendung zu zeigen ist der Zweck des 2. Hauptstückes. Dieselbe besteht gleichsam nur in der erweiterten Behandlung einer Reihe von practisch wichtigen Fällen, und lässt eine eigentliche Begränzung des Gegenstandes nicht zu. Gleichwohl handelt es sich nur selten um die unmittelbare Benützung der gegebenen Formeln. Man wird vielmehr sehen, dass mittelst der vorstehenden Theorie bloss die Anhaltspuncte geboten sind, deren Ergreifung je nach den zu behandelnden Fällen den einzuschlagenden Weg für die nähere Untersuchung anzubahnen haben.

Erster Abschnitt.

Von den Querschnitten für Träger, welche der Biegung ausgesetzt sind.

---

§. 113.

Vorerinnerung. Im 1. Hauptstücke hat man die Anwendung der auf den Widerstand gegen die Biegung Bezug nehmenden Formeln, zur Erläuterung derselben, bloss auf die dort (§. 55) angegebenen einfachen Querschnittsfiguren gezeigt, und die noch weiters nöthigen Erörterungen für die Anwendung dem 2. Hauptstücke vorbehalten. (Siehe §. 57.) Eben so war man bezüglich der Lage des gefährlichen Querschnittes laut §. 75 nur auf den Fall bedacht, wenn die betreffende Biegungscurve keinen Wendepunct besitzt. Es erübrigt daher auch in dieser Beziehung die Ergänzungen für den Fall anzuknüpfen, wenn Wendepuncte in der Biegungscurve vorkommen. Hieran lassen sich sodann die Regeln anreihen, nach welchen man die Zweckmässigkeit der verschiedenen Querschnitte zu beurtheilen hat.

Erstes Kapitel.

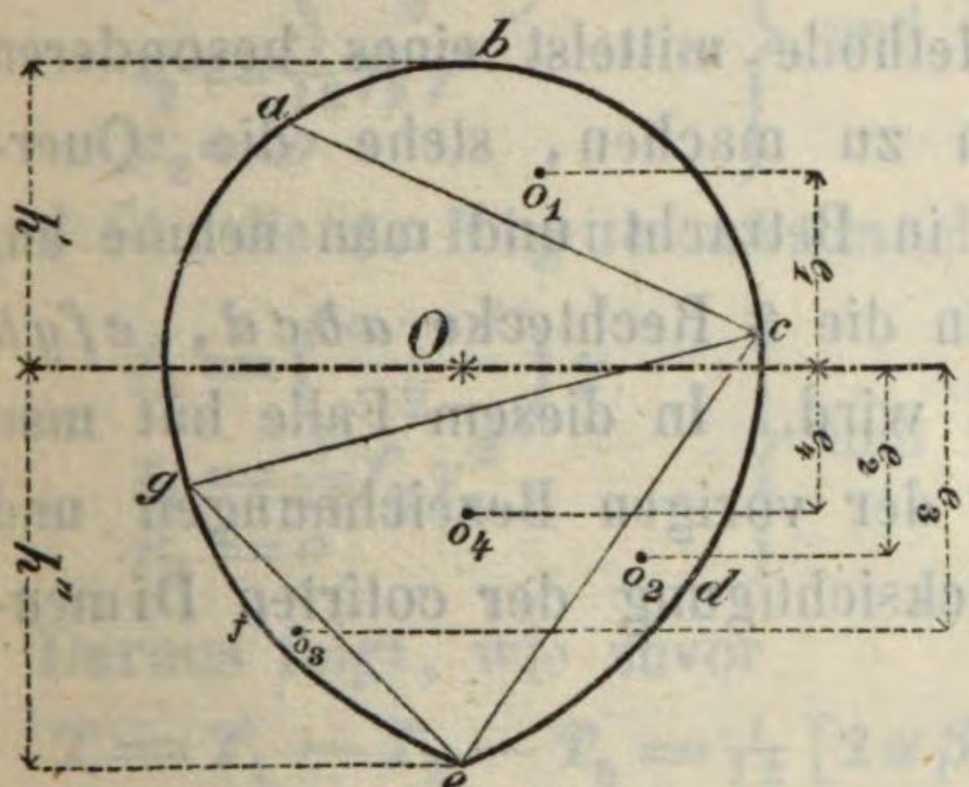
Von den zusammengesetzten Querschnittsformen.

§. 114.

Behandlung solcher Querschnitte. Man beachte, dass man es bei jedem Querschnitte hinsichtlich der Biegung des Trägers mit der Bestimmung der Lage der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe, und mit der Bestimmung des Trägheitsmomentes desselben in Bezug auf diese Axe zu thun hat.

Wie schon im §. 57 bemerkt worden ist, kann man das Trägheitsmoment einer Figur in Bezug auf die durch den Schwerpunct derselben gehende Axe aus den Trägheitsmomenten ihrer einzelnen Theile finden, wenn diese letzteren auf solche Axen bezogen werden, welche durch die Schwerpuncte dieser einzelnen Theile und parallel zur Hauptaxe gezogen sind. Man suche daher die einzelnen Theile der Figur so auszuwählen, dass ihre entsprechenden Trägheitsmomente bekannt erscheinen, um dadurch in die Lage zu kommen, auf das Trägheitsmoment der ganzen Figur schliessen zu können.

Fig. 98.



Seien z. B. n Theile des Querschnittes (Figur 98) vorhanden, nämlich *abc*, *cde*, *efg*, *cge*, etc...., die Flächenräume dieser Theile aufeinanderfolgend

f_1, f_2, f_3, ... und f_n,

und deren Schwerpuncte beziehungsweise in o_1, o_2, o_3, .. und o_n; hienach ergäbe sich für die ganze Figur der Flächenraum

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \Sigma f_n,$$

und es falle der Schwerpunct derselben nach . . . . . O,
durch welchen die Hauptaxe (neutrale Axe) zu ziehen ist;
es seien ferner die Trägheitsmomente der einzelnen Querschnittstheile in Bezug auf die durch ihre Schwerpuncte parallel zur Hauptaxe gezogenen Axen . . . . . $t_1, t_2, t_3 \ldots$ und t_n,
die auf die Hauptaxe übersetzten Trägheitsmomente hingegen

T_1, T_2, T_3, ... und T_n

man setze endlich das zu suchende Trägheitsmoment der ganzen Figur in Bezug auf die neutrale Axe . . . . . $= T$,
und bezeichne die Abstände der einzelnen Schwerpuncte von dieser Axe correspondirend mit . . . . . $e_1, e_2, e_3, \ldots$ und e_n.

Indem man die Trägheitsmomente T_1, T_2, T_3, ... und T_n, welche sich alle auf die Hauptaxe beziehen, zu dem Behufe summiren kann, um dadurch das Trägheitsmoment der ganzen Figur in Bezug auf diese Hauptaxe zu erhalten, hat man zunächst

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \Sigma T_n.$$

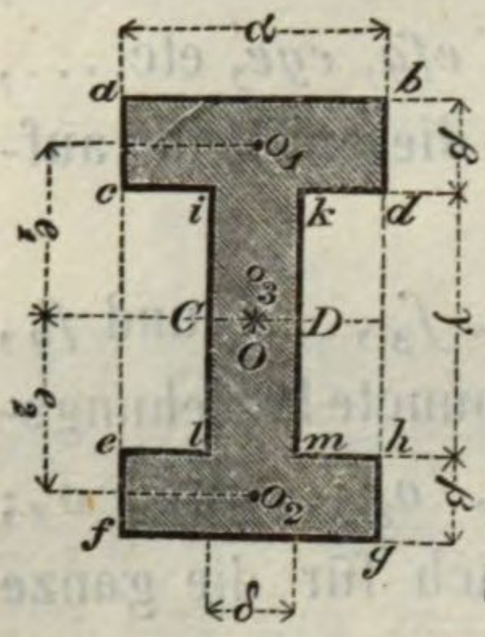
Nun ist aber zufolge des bekannten Satzes aus der Mechanik, betreffend das sogenannte Uebersetzen des Trägheitsmomentes von einer Axe auf eine andere zu jener parallelen Axe,

$$T_1 = t_1 + f_1\, e_1^{\,2},$$
$$T_2 = t_2 + f_2\, e_2^{\,2},$$
$$T_3 = t_3 + f_3\, e_3^{\,2},$$
$$\text{etc.}$$
$$\text{und } T_n = t_n + f_n\, e_n^{\,2};$$

daher durch Summirung

$$T = \Sigma T_n = \Sigma t_n + \Sigma f_n . e_n^{\,2} \quad . \quad . \quad . \quad (161).$$

Fig. 99.



Um diese Methode mittelst eines besonderen Falles anschaulich zu machen, stehe die Querschnitts-Figur 99 in Betracht und man nehme an, dass diese Figur in die 3 Rechtecke *a b c d*, *e f g h* und *i k l m* zerlegt wird. In diesem Falle hat man unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen und gleichzeitiger Berücksichtigung der cotirten Dimensionen

1. $f_1 = \alpha\beta$, $t_1 = \frac{1}{12} f_1 \beta^2$, $e_1 = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ } und $T_1 = f_1 \left[\frac{1}{12}\beta^2 + \frac{1}{4}(\beta+\gamma)^2\right] = \frac{1}{12}\alpha\beta\left[\beta^2 + 3(\beta+\gamma)^2\right]$,

2. $f_2 = \alpha\beta$, $t_2 = \frac{1}{12} f_2 \beta^2$, $e_2 = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ } und $T_2 = T_1$

und

3. $f_3 = \gamma\delta$, $t_3 = \frac{1}{12} f_3 \gamma^2$, $e_3 = o$ } und $T_3 = \frac{1}{12} f_3 \gamma^2 = \frac{1}{12}\delta\gamma^3$;

daher $F = f_1 + f_2 + f_3 = 2\alpha\beta + \gamma\delta$, weiters aber

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \tfrac{1}{12}\left[2\alpha\beta(4\beta^2 + 6\beta\gamma + 3\gamma^2) + \delta\gamma^3\right].$$

Endlich ist $H = 2\beta + \gamma$ und $h' = h'' = \frac{1}{2}H = \beta + \frac{\gamma}{2}$.

Ex. Für $\alpha = \gamma = 3''$ und $\beta = \delta = 1''$ erhält man speciell $T = 26\frac{3}{4}$, $F = 9\,\square''$, $H = 5''$, $h' = h'' = 2\frac{1}{2}''$.

Bei der Eintheilung der Querschnittsfigur in mehrere Theile kann es geschehen, dass manche Theile, also auch die betreffenden Trägheitsmomente negativ genommen werden müssen. Will man z. B. den betrachteten Querschnitt (Figur 99) dadurch entstanden

denken, dass man von dem Rechteke $abgf$ die beiden Rechtecke $ceil$ und $dhkm$ wegnimmt, so hat man den Querschnitt zwar gleichfalls aus 3 Rechtecken bestehend zu betrachten, jedoch sind die beiden letzteren negativ zu nehmen. In diesem Falle hat man für die 1. Figur $abgf$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \alpha\,(2\beta+\gamma) \\ t_1 &= \tfrac{1}{12} f_1\,(2\beta+\gamma)^2 \\ e_1 &= o \end{aligned}\right\} \text{ und } T_1 = t_1 = \tfrac{1}{12}\alpha\,(2\beta+\gamma)^3,$$

für die 2. Figur $ceil$

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma \\ t_2 &= \tfrac{1}{12} f_2\,\gamma^2 \\ e_2 &= o \end{aligned}\right\} \text{ und } T_2 = t_2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma^3,$$

und für die 3. Figur $dhkm$ eben so

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma \\ t_3 &= \tfrac{1}{12} f_3\,\gamma^2 \\ e_3 &= o \end{aligned}\right\} \text{ und } T_3 = t_3 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma^3.$$

Daraus folgt, wie zuvor

$$T = T_1 - T_2 - T_3 = \tfrac{1}{12}\left[2\alpha\beta\,(4\beta^2+6\beta\gamma+3\gamma^2)+\delta\gamma^3\right].$$

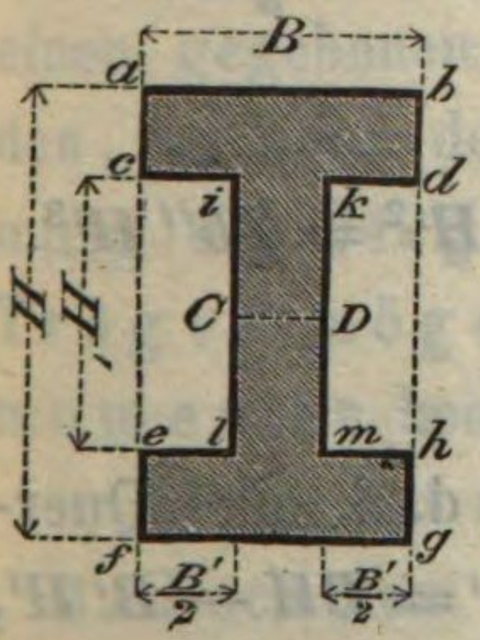
Die Formel für das Trägheitsmoment des betrachteten Iförmigen Querschnittes kann übrigens auch auf eine einfachere Weise dargestellt werden. Setzt man nämlich (Fig. 100)

$$\overline{fg} = B,\ \overline{bg} = H,\ \overline{ci} + \overline{kd} = B' \text{ und } \overline{dh} = H',$$

so wird offenbar $F = (BH - B'H')$ und

$$T = \tfrac{1}{12}\,(BH^3 - B'H'^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162).$$

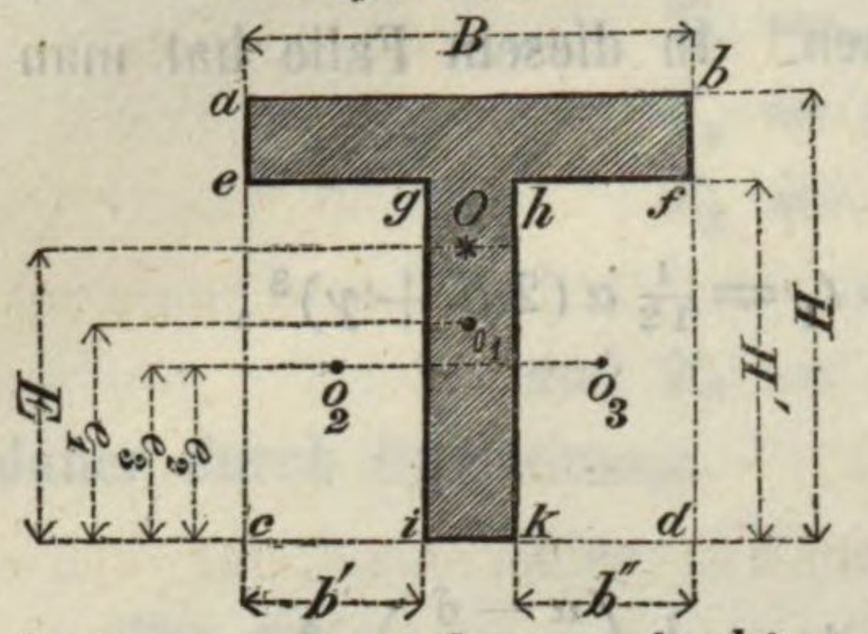
Fig. 100.



Es ist nicht nothwendig, dass man die Trägheitsmomente der einzelnen Figuren unmittelbar auf die neutrale Axe übersetzt. Man kann zuweilen durch ein zweimaliges Uebersetzen bequemer zum Ziele gelangen, indem man sämmtliche Trägheitsmomente zuerst nur überhaupt auf eine gemeinschaftliche Axe, welche mit der neutralen Axe parallel läuft, übersetzt, und erst hierauf die weitere Uebersetzung auf die neutrale Axe selbst vornimmt. Dieses Verfahren ist in solchen Fällen zweckmässig, wo man den Schwerpunct der ganzen Querschnittsfigur *a priori* nicht kennt, und daher dessen

Lage erst aufzusuchen hat. Zur näheren Erläuterung diene folgendes Beispiel. Es stehe der ⊤ förmige Querschnitt (Fig. 101) in Betracht, und es sei derselbe aus den Rechtecken *a b c d*, *c e g i* und *d f h k* gebildet anzusehen, von welchen die letzteren als negativ zu gelten haben. Der Querschnitt habe in Bezug auf die einwirkenden Kräfte eine solche Lage, dass die neutrale Axe parallel zu $\overline{cd}$ laufe. Es sollen nun die Trägheitsmomente der gedachten 3 Rechtecke zuerst auf die Axe $\overline{cd}$ übersetzt werden.

Fig. 101.



Sei die Fläche des Rechteckes *a b c d* . . . . . $= f_1$,
der Abstand ihres Schwerpunctes o_1 von der gewählten Axe $\overline{cd}$ $= e_1$,
das entsprechende Trägheitsmoment in Bezug auf die durch
diesen Schwerpunct o_1 gehende Axe . . . . . $= t_1$,
das in Bezug auf die Axe $\overline{cd}$ aber . . . . . $= T_1$,
und bezeichne eben so die analogen Grössen für die beiden anderen Rechtecke *c e g i* und *d f k h* mit f_2 und f_3, e_2 und e_3, t_2 und t_3, endlich T_2 und T_3, so hat man mit Rücksicht auf die Cotirung in der Figur

1. $f_1 = BH$, $e_1 = \frac{1}{2}H$, $t_1 = \frac{1}{12} f_1 H^2$ } daher $T_1 = t_1 + f_1 e_1^2 = \frac{1}{3} f_1 H^2 = \frac{1}{3} B H^3$,

2. $f_2 = b' H'$, $e_2 = \frac{1}{2} H'$, $t_2 = \frac{1}{12} f_2 H'^2$ } daher $T_2 = t_2 + f_2 e_2^2 = \frac{1}{3} f_2 H'^2 = \frac{1}{3} b' H'^3$

3. $f_3 = b'' H'$, $e_3 = \frac{1}{2} H'$, $t_3 = \frac{1}{12} f_3 H'^2$ } daher $T_3 = t_3 + f_3 e_3^2 = \frac{1}{3} f_3 H'^2 = \frac{1}{3} b'' H'^3$.

Demgemäss ist:

1. Die algebraische Summe der Flächentheile, d. i. die Querschnittsfläche $F = f_1 - f_2 - f_3 = BH - (b' + b'') H' = BH - B' H'$, wenn $b' + b'' = B'$ gesetzt wird;

2. die algebraische Summe der statischen Momente der Flächentheile in Beziehung auf die Axe $\overline{cd}$, wenn *O* der Schwerpunct der gan-

zen Figur ist, und dessen Fntfernung von der Axe $\overline{c\,d}$ mit E bezeichnet wird,

$$FE = f_1 e_1 - f_2 e_2 - f_3 e_3 = \tfrac{1}{2}(BH^2 - B'H'^2),$$

und daraus behufs der Bestimmung der Lage des Schwerpunctes O

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{BH^2 - B'H'^2}{BH - B'H'}\right);$$

3. endlich die algebraische Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf die Axe $\overline{c\,d}$,

$$T_1 - T_2 - T_3 = \tfrac{1}{3}(BH^3 - B'H'^3).$$

Heisst man jetzt T das zu suchende Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe, und beachtet man, dass der für $(T_1 - T_2 - T_3)$ gefundene Werth sich auf eine Axe bezieht, welche mit der neutralen Axe in der Entfernung E parallel läuft, so hat man zunächst $T + FE^2 = (T_1 - T_2 - T_3)$, somit $T = (T_1 - T_2 - T_3) - FE^2$.

Substituirt man in dieser Gleichung statt F, E und $(T_1 - T_2 - T_3)$ die betreffenden Werthe, so erhält man schliesslich

$$T = \tfrac{1}{3}(BH^3 - B'H'^3) - \tfrac{1}{4}\,\frac{(BH^2 - B'H'^2)^2}{(BH - B'H')} \quad . \quad . \quad . \quad (163).$$

Für die besonderen Dimensionen $B = 5''$, $H = 5''$, $B' = 4''$ und $H' = 4''$ erhält man beispielsweise

$$F = 9\square'', \quad E = 3\tfrac{7}{18}'' \text{ und } T = 19\tfrac{23}{36}.$$

§. 115.

Anwendung des für das Trägheitsmoment gefundenen Werthes. Hat man den Werth des Trägheitsmomentes für einen gegebenen Querschnitt in Bezug auf die neutrale Axe gefunden, so kann derselbe nach Anleitung des 1. Hauptstückes zur Bestimmung der Biegung, des Tragmomentes und beziehungsweise Tragvermögens, so wie des mechanischen Widerstandsmomentes benützt werden.

Dabei hat man Folgendes zu bemerken:

1. Nach dem §. 53 steht die Biegung unter sonst gleichen Umständen im verkehrten Verhältnisse zu dem fraglichen Trägheitsmomente des Querschnittes, und man kann dem Begriffe über die zu erreichende Steifigkeit dadurch zu Hilfe kommen, dass man in dieser

Beziehung einen Vergleich zwischen dem in Betracht stehenden Querschnitte und einer bekannten einfachen Querschnittsfigur, z. B. einem Rechtecke von gleichem Flächenraume anstellt. Es war z. B. für den I förmigen Querschnitt (Fig. 100) nach den dort angenommenen speciellen Dimensionen $T = 26\frac{3}{4}$. Man könnte nun fragen, wie gross das Trägheitsmoment T' eines Rechteckes wäre, wenn dasselbe die gleiche Höhe $H = 5''$ und den gleichen Flächenraum $F = 9\square''$ hätte. Die Antwort auf diese Frage gibt die Formel (51), denn es ist nach derselben $T^1 = \frac{1}{12} F H^2 = 18\frac{3}{4}$.

Hieraus schliesst man, dass die Biegungen zweier Träger, von welchen der eine den gewählten I förmigen, der andere aber einen rechteckigen Querschnitt besitzt, bei gleicher Höhe und gleichem Inhalte der beiderseitigen Querschnitte, so wie unter sonst gleichen Umständen, sich verhalten, wie

$$\frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = 18\tfrac{3}{4} : 26\tfrac{3}{4} = 75 : 107 = 1 : 1{\cdot}427.$$

Berücksichtiget man auch das andere Beispiel des vorigen §., so hat man für den dort betrachteten ⊤ förmigen Querschnitt (Fig. 101) nach den speciell angenommenen Dimensionen $T = 19\frac{23}{36}$. Für ein Rechteck von derselben Höhe und Querschnittsgrösse wäre wieder $T' = 18\frac{3}{4}$. In diesem Falle wird daher das Verhältniss zwischen den Biegungen der 2 Prismen mit den beiden verglichenen (⊤ förmigen und rechteckigen) Querschnitten

$$\frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = 18\tfrac{3}{4} : 19\tfrac{23}{36} = 675 : 707 = 1 : 1{\cdot}047.$$

2. Die Bestimmung des Tragmomentes hat aus der Relation (95)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{aT}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rT}{h''} \end{cases}$$

zu geschehen, wobei T das vorhin erwähnte Trägheitsmoment des Querschnittes, a und r die auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Anspruchsnahmen pr. $\square''$ bis zu den Elasticitätsgränzen, h' und h'' aber die Abstände der gespanntesten und gepresstesten Fasern von der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe bedeuten. Wie im §. 77 bemerkt wurde, ist je nach dem besonderen Falle von den doppelten

Werthen der kleinere auszuwählen. So z. B. erhält man für den vorbesprochenen ⊥förmigen Querschnitt wegen

$$T = 26\tfrac{3}{4} \text{ und } h' = h'' = 2\tfrac{1}{2},$$

sofort

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 10{\cdot}7\,a \\ \text{oder } 10{\cdot}7\,r, \end{cases}$$

daher für Schmiedeeisen (wegen $r \gtrless a$) $M = 10{\cdot}7\,r$, und für Gusseisen (wegen $a < r$) $M = 10{\cdot}7\,a$.

Man kann nun auch in Ansehung dieses Tragmomentes zur besseren Verdeutlichung desselben einen Vergleich mit dem Tragmomente eines Rechteckes von derselben Höhe und Querschnittsgrösse anstellen.

Es ist nämlich nach der Relation (96) das Tragmoment M' eines solchen Rechteckes wegen $F = 9\,\square''$ und $H = 5''$

$$M' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\,aFH = 7\frac{1}{2}\,a \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,rFH = 7\frac{1}{2}\,r. \end{cases}$$

Vergleicht man jetzt M mit M', so kommen jedenfalls nur die Werthe mit a oder mit r in Betracht, so dass man für alle Materialien erhält

$$M : M' = 10{\cdot}7 : 7{\cdot}5 = 1{\cdot}427 : 1, \text{ also } M > M'.$$

Für den ⊤förmigen Querschnitt (Fig. 101) wird es bei der Bestimmung des Tragmomentes darauf ankommen, in welcher Weise die Anspruchsnahme der Fasern im Querschnitte geschieht. Findet etwa die Ausdehnung an der breiten Seite $\overline{ab}$, und die Zusammendrückung an der schmalen Seite $\overline{ik}$ statt, so wird

$$h' = H - E = 1\tfrac{11}{18}'', \; h'' = E = 3\tfrac{7}{18}'',$$

ferner $T = 19\frac{23}{36}$, also auch nach der Relation (95) das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 12\ \frac{11}{58}\,a \\ \text{oder } 5\ \frac{97}{122}\,r. \end{cases}$$

Wäre z. B. für Schmiedeeisen $r = 0{\cdot}9\,a$, und für Gusseisen $r = 3\,a$, so hätte man für das erstere $M = 5\,\frac{97}{122}\,r$, und für das letztere

$$M = 12\,\tfrac{11}{58}\,a.$$

Vergleicht man auch hier das für den ⊤förmigen Querschnitt gefundene Tragmoment mit dem eines Rechteckes von gleicher Höhe und Querschnittsgrösse, und heisst man dieses letztere M', so er-

hält man wegen $F = 9\square''$ und $H = 5''$, für Schmiedeeisen $M' = 7\frac{1}{2}r$ und für Gusseisen $M' = 7\frac{1}{2}a$, sofort aber für das erstere

$$M : M' = 5\tfrac{97}{122} : 7\tfrac{1}{2} = 0{\cdot}773 : 1$$

und für das letztere $M : M' = 12\frac{11}{58} : 7\frac{1}{2} = 1{\cdot}625 : 1.$

Dieses Verhältniss ist also nicht constant, sondern hängt von der Materialgattung ab.

Die gewählten Beispiele sind hinreichend, um einen klaren Begriff zu geben, wie das Tragmoment und beziehungsweise das Tragvermögen mit der Grösse, Gestalt und Lage des Querschnittes, so wie mit der Materialgattung im Zusammenhange steht.

3. Die Bestimmung des grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomentes geschieht nach Massgabe der Relationen (147) und (148). Es ist nämlich dieses Moment

$$Max.\ W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\cdot\frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\cdot\frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

und aus diesen Alternativwerthen der kleinere auszuwählen. So hat man z. B. für den $\top$ förmigen Querschnitt (Fig. 100)

$$T = 26\tfrac{3}{4},\ h' = h'' = 2\tfrac{1}{2}'',$$

daher

$$Max.\ W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{107}{150}\,\frac{a^2 l}{m} \\ \text{oder } \frac{107}{150}\,\frac{r^2 l}{m}. \end{cases}$$

Um auch in dieser Hinsicht den Vergleich mit einem rechteckigen Querschnitte von der gleichen Fläche $F = 9\square''$ anzustellen, bemerke man, dass das betreffende mechanische Widerstandsmoment $Max.\ W'$ nach den Formeln (149)

$$Max.\ W' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{18}\,\frac{a^2 Fl}{m} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 l}{m} \\ \text{oder } \frac{1}{18}\,\frac{r^2 Fl}{m} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2 l}{m}, \end{cases}$$

demnach für alle Materialien das fragliche Verhältniss

$$Max.\ W : Max\ W' = \tfrac{107}{150} : \tfrac{1}{2} = 1{\cdot}427 : 1$$

wird.

Untersucht man in ähnlicher Weise auch das grösste zulässige Widerstandsmoment für den $\top$ förmigen Querschnitt (Fig. 101), so

findet man, wenn die Fasern an der breiten Seite $\overline{a\,b}$ ausgedehnt und an der schmalen Seite $\overline{i\,k}$ zusammengedrückt werden,

$$h' = 1\tfrac{11}{18}'', \; h'' = 3\tfrac{7}{18}'' \text{ und } T = 19\tfrac{23}{36},$$

hiernach allgemein

$$Max.\,W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{21}{16}\frac{21}{82} \cdot \frac{a^2 l}{m} \\ \text{oder } \frac{21}{74}\frac{21}{42} \cdot \frac{r^2 l}{m}, \end{cases}$$

also z. B. für Schmiedeeisen, wenn $r = 0{\cdot}9\,a$ wäre,

$$Max.\,W = \tfrac{21}{74}\tfrac{21}{42}\,\frac{r^2 l}{m},$$

und für Gusseisen, wenn $r = 3a$ wäre

$$Max.\,W = \tfrac{21}{16}\tfrac{21}{82}\,\frac{a^2 l}{m}.$$

Für ein gleich grosses Rechteck würde das mechanische Widerstandsmoment mit Rücksicht auf die beispielsweisen Relationen zwischen a und r, für die genannten Materialien beziehungsweise

$$Max.\,M' = \tfrac{1}{2}\,\frac{r^2 l}{m} \text{ und } Max.\,M' = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2 l}{m}.$$

Die gegenseitige Vergleichung ergäbe daher

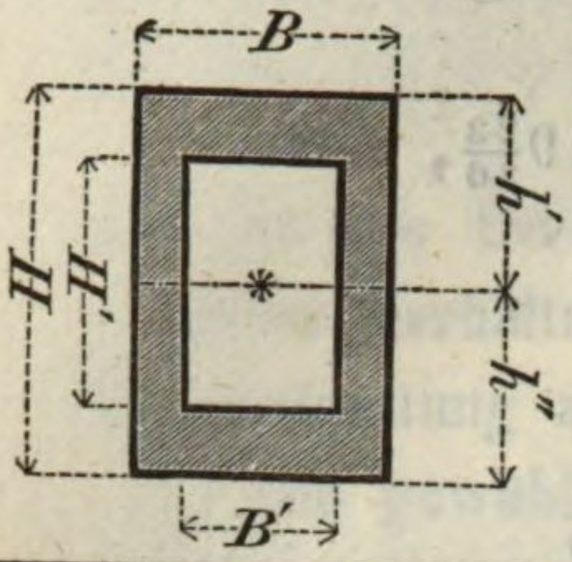
für Schmiedeeisen $Max.\,W : Max.\,W' = 0{\cdot}570 : 1$,
für Gusseisen aber $Max.\,W : Max.\,W' = 2{\cdot}522 : 1$.

Diese Beispiele zeigen, wie das mechanische Widerstandsmoment mit der Gestalt des Querschnittes, dem Körperraume und der Materialgattung zusammenhängt.

§. 116.

Zusammenstellung. Nachfolgende Zusammenstellung enthält für eine Reihe von practisch wichtigen Querschnitten die entsprechenden Werthe für die Trägheitsmomente T. Man hat dabei im Querschnitte die durch seinen Schwerpunct gehende neutrale Axe horizontal und zugleich sich vorzustellen, dass die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden. Für die entgegengesetzte Anspruchsnahme der Fasern würde nur h' mit h'' zu verwechseln sein, hiebei jedoch das Trägheitsmoment T keine Veränderung erleiden. Die Querschnittsfläche selbst ist mit F bezeichnet.

Fig. 102.



$$\frac{B'}{B} = m, \quad \frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \frac{H}{2},$$

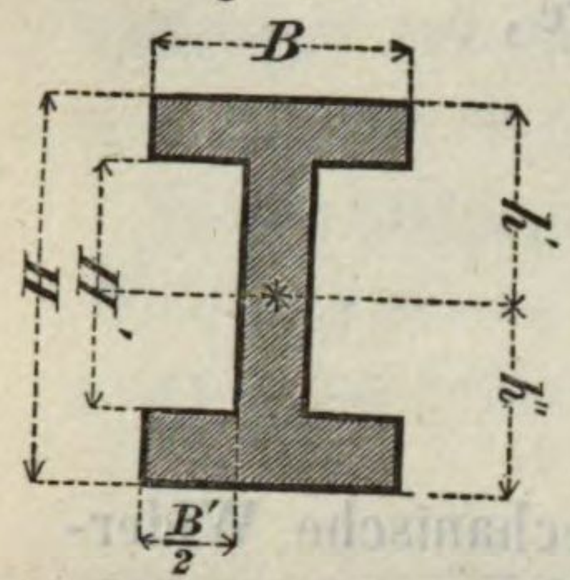
$$F = (BH - B'H') = (1 - mn)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(BH^3 - B'H'^3) = \tfrac{1}{12}(1 - mn^3)\,BH^3$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{1 - mn^3}{1 - mn}\right) FH^2. \qquad (164)$$

Fig. 103.



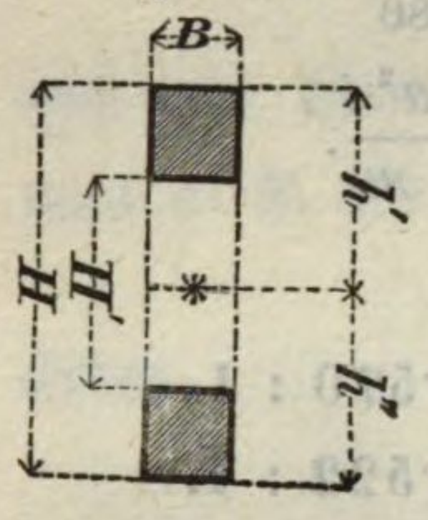
Die Formeln (164) gelten auch für diese Figur.

Für $m = n$ wird insbesondere

$$F = (1 - n^2)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(1 - n^4)\,BH^3 = \tfrac{1}{12}(1 + n^2)\,FH^2. \qquad (165)$$

Fig. 104.



$$\frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

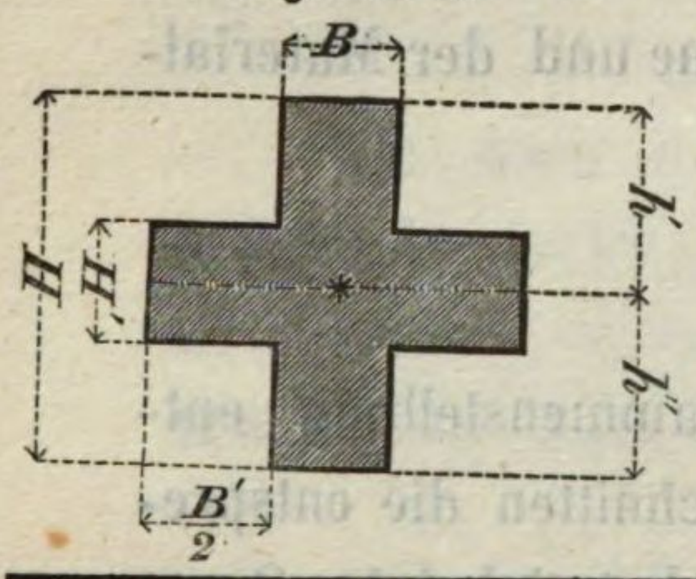
$$F = B(H - H') = (1 - n)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}B(H^3 - H'^3) = (1 - n^3)\,BH^3,$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}(1 + n + n^2)\,FH^2. \qquad (166)$$

Fig. 105.



$$\frac{B'}{B} = m, \quad \frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

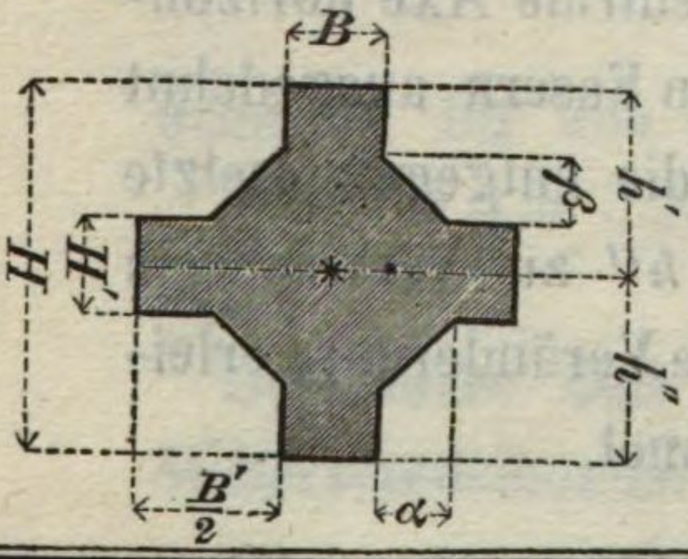
$$F = (1 + mn)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(1 + mn^3)\,BH^3,$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{1 + mn^3}{1 + mn}\right) FH^2. \qquad (167)$$

Fig. 106.



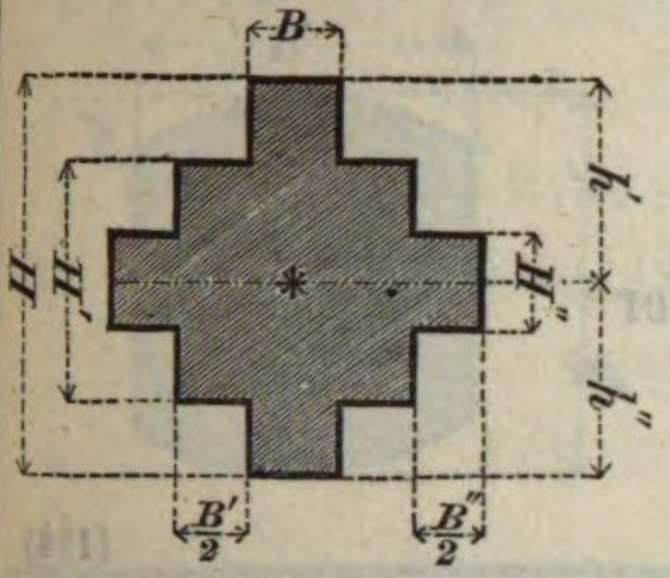
$$\frac{B'}{B} = m, \quad \frac{H'}{H} = n, \quad \frac{\alpha}{B} = p, \quad \frac{\beta}{H} = q, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

$$F = (1 + mn + 2pq)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}\left[1 + mn^3 + 2pq\,(3n^2 + 4nq + 2q^2)\right] BH^3,$$

$$T = \frac{1 + mn^3 + 2pq\,(3n^2 + 4nq + 2q^2)}{12\,(1 + mn + 2pq)}\,FH^2. \qquad (168)$$

Fig. 107.



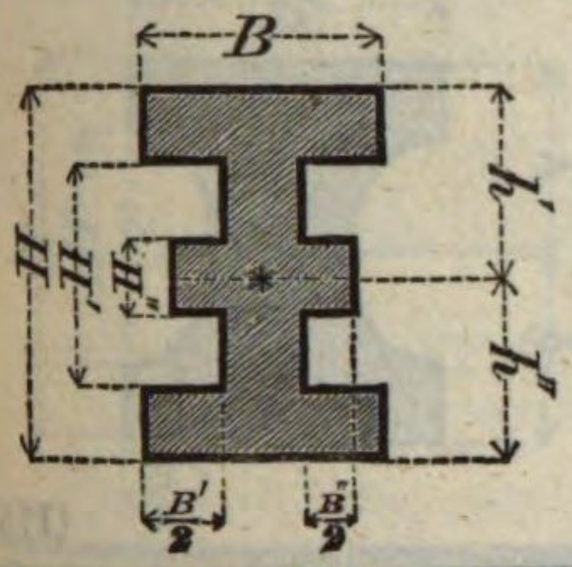
$$\frac{B'}{B} = m,\ \frac{H'}{H} = n,\ \frac{B''}{B} = p,\ \frac{H''}{H} = q,\ h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

$$F = (1 + mn + pq)\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12} (1 + mn^3 + pq^3)\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{12} \left(\frac{1 + mn^3 + pq^3}{1 + mn + pq} \right) FH^2. \qquad (169)$$

Fig. 108.



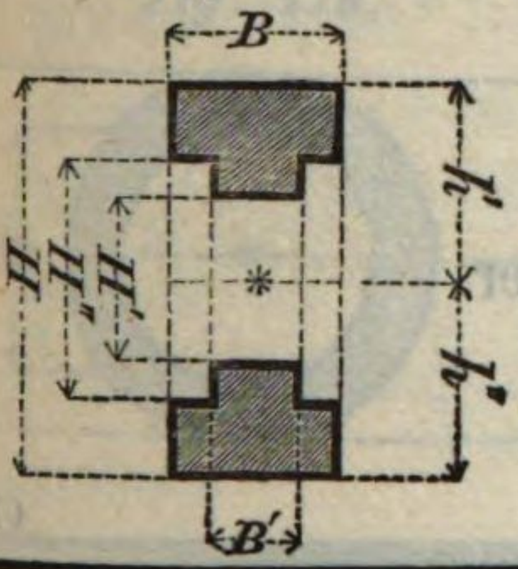
$$\frac{B'}{B} = m,\ \frac{H'}{H} = n,\ \frac{B''}{B} = p,\ \frac{H''}{H} = q,\ h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

$$F = (1 - mn + pq)\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12} (1 - mn^3 + pq^3)\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{12} \left(\frac{1 - mn^3 + pq^3}{1 - mn + pq} \right) FH^2. \qquad (170)$$

Fig. 109.



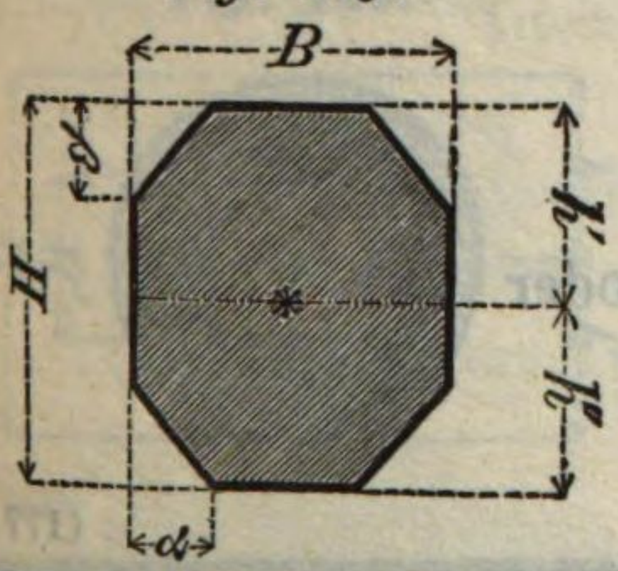
$$\frac{B'}{B} = m,\ \frac{H'}{H} = n,\ \frac{H''}{H} = q,\ h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

$$F = [1 - mn - (1 - m)q]\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12} [1 - mn^3 - (1 - m)q^3]\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{12} \left[\frac{1 - mn^3 - (1 - m)q^3}{1 - mn - (1 - m)q} \right] FH^2. \qquad (171)$$

Fig. 110.



$$\frac{\alpha}{B} = m,\ \frac{\beta}{H} = n,\ h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

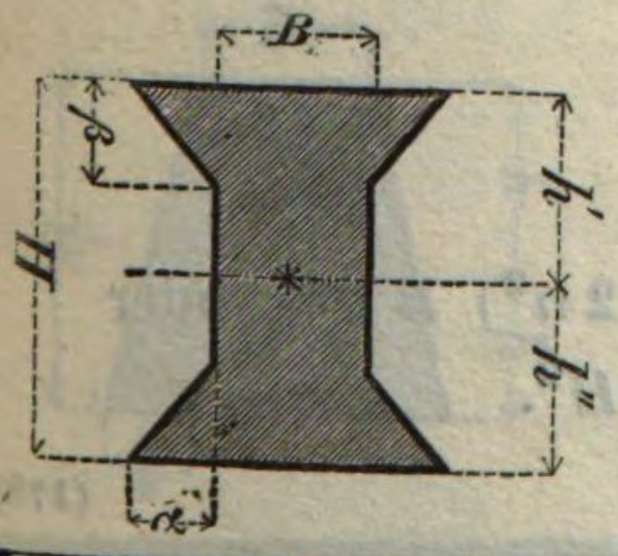
$$F = (1 - 2mn)\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12} [1 - 2mn\ (3 - 4n + 2n^2)]\, BH^3,$$

oder

$$T = \frac{1 - 2mn\ (3 - 4n + 2n^2)}{12\,(1 - 2mn)}\, FH^2. \qquad (172)$$

Fig. 111.



$$\frac{\alpha}{B} = m,\ \frac{\beta}{H} = n,\ h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

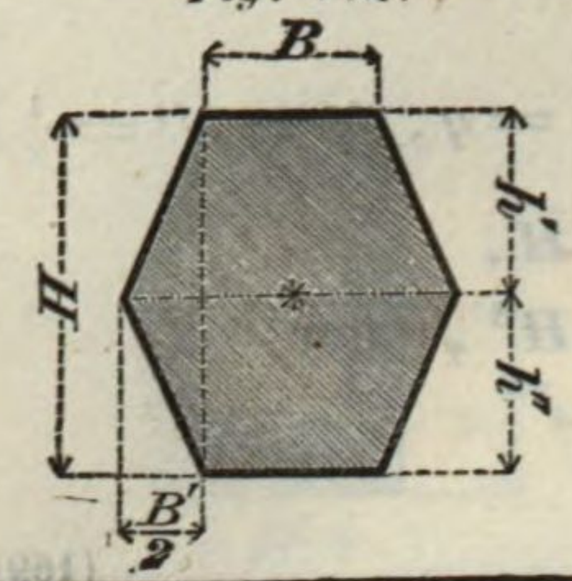
$$F = (1 + 2mn)\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12} [1 + 2mn\ (3 - 4n + 2n^2)]\, BH^3,$$

oder

$$T = \frac{1 + 2mn\,(3 - 4n + 2n^2)}{12\,(1 + 2mn)}\, FH^2. \qquad (173)$$

Fig. 112.



$$\frac{B'}{B} = m,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

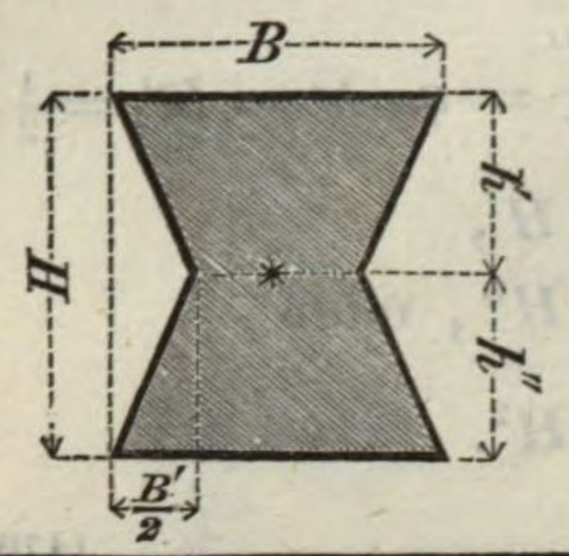
$$F = \tfrac{1}{2}\ (2 + m)\ B H,$$

$$T = \tfrac{1}{48}\ (4 + m)\ B H^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{24} \left(\frac{4 + m}{2 + m}\right) F H^2.$$

(174)

Fig. 113.



$$\frac{B'}{B} = m,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

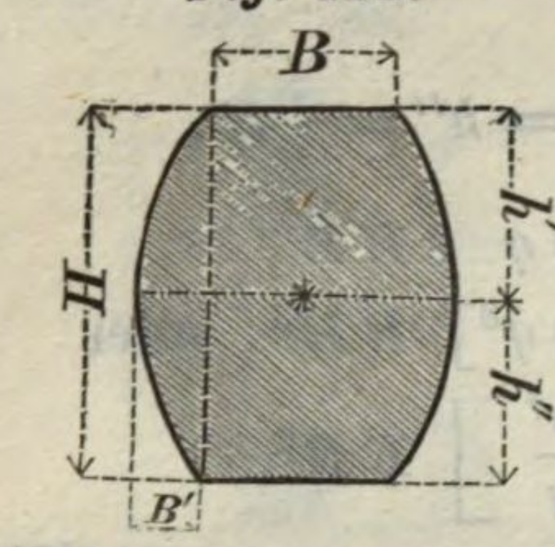
$$F = \tfrac{1}{2}\ (2 - m)\ B H,$$

$$T = \tfrac{1}{48}\ (4 - m)\ B H^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{24} \left(\frac{4 - m}{2 - m}\right) F H^2.$$

(175)

Fig. 114.



$$\frac{B'}{B} = m,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

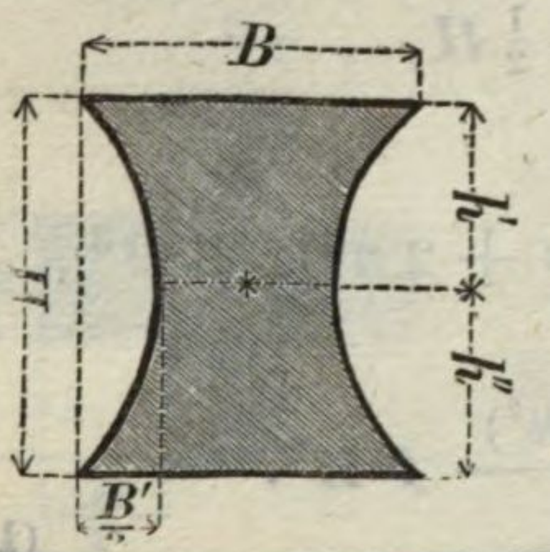
$$F = \tfrac{1}{3}\ (3 + 2\,m)\ B H,$$

$$T = \tfrac{1}{60}\ (5 + 2\,m)\ B H^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{20} \left(\frac{5 + 2\,m}{3 + 2\,m}\right) F H^2.$$

(176)

Fig. 115.



$$\frac{B'}{B} = m,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

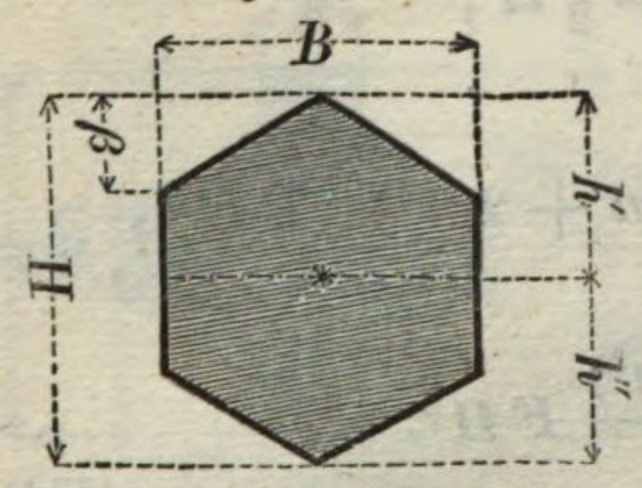
$$F = \tfrac{1}{3}\ (3 - 2\,m)\ B H,$$

$$T = \tfrac{1}{60}\ (5 - 2\,m)\ B H^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{20} \left(\frac{5 - 2\,m}{3 - 2\,m}\right) F H^2.$$

(177)

Fig. 116.



$$\frac{\beta}{H} = n,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

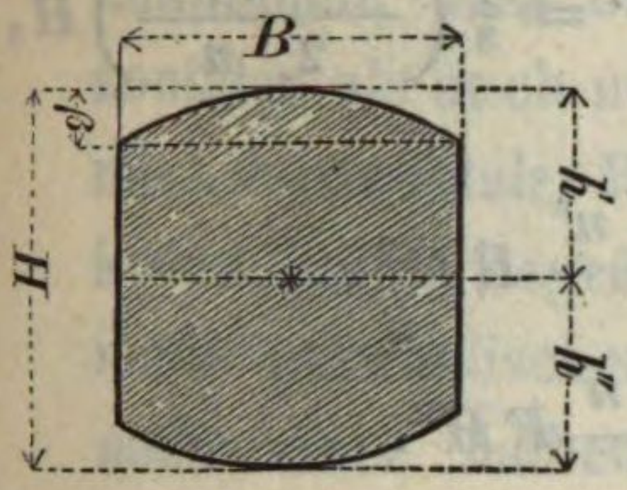
$$F = \quad (1 - n)\ B H,$$

$$T = \tfrac{1}{12} (1 - n)(1 - 2\,n + 2\,n^2)\ B H^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{12} (1 - 2\,n + 2\,n^2)\ F H^2.$$

(178)

Fig. 117.



$$\frac{\beta}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

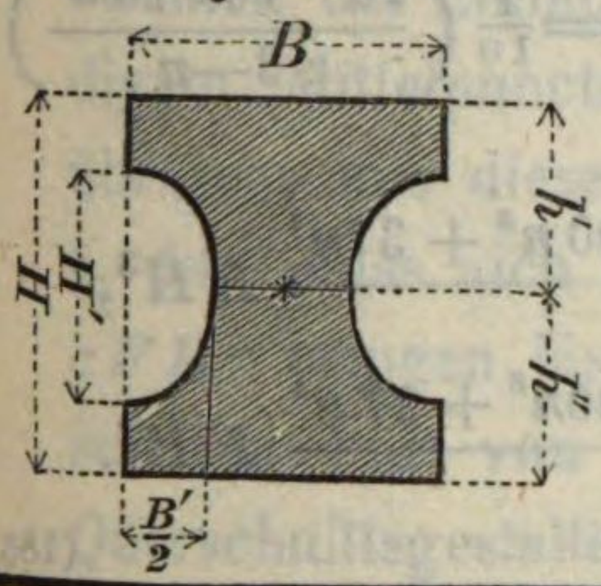
$$F = \tfrac{1}{3} \,(\,3 - 2n)\, BH,$$

$$T = \tfrac{1}{420}\,(35 - 70n + 84\,n^2 - 40n^3)\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \frac{35 - 70n + 84n^2 - 40n^3}{140\,(3 - 2n)}\, FH^2,$$

(179)

Fig. 118.



$$\frac{B'}{B} = m, \quad \frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

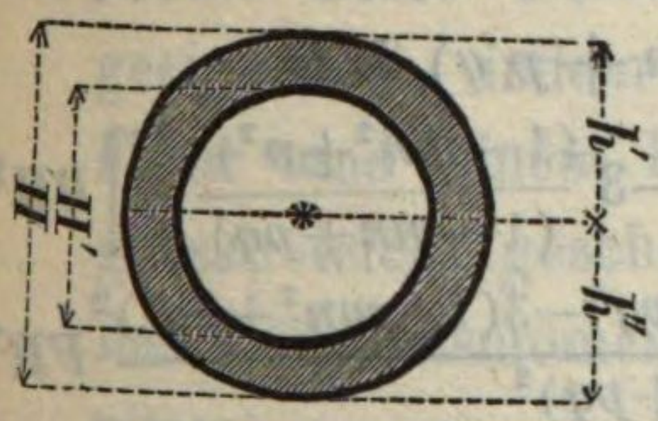
$$F = \tfrac{1}{4} \,(\,4 - \pi mn)\, BH, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

$$T = \tfrac{1}{192}\,(16 - 3\,\pi m n^3)\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{48} \left(\frac{16 - 3\pi m m^3}{4 - \pi m n}\right) FH^2.$$

(180)

Fig. 119.



$$\frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

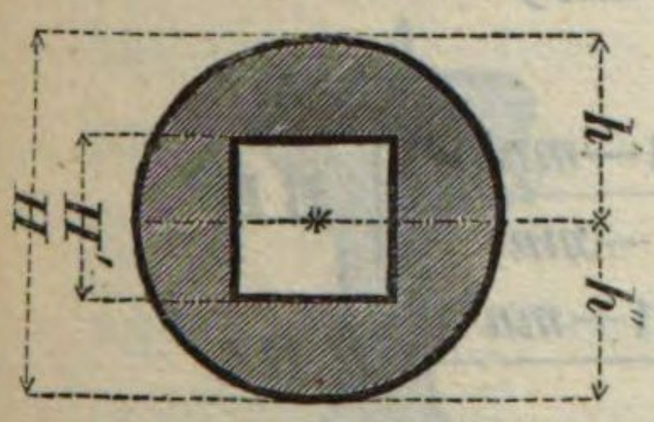
$$F = \frac{\pi}{4}\,(H^2 - H'^2) = \frac{\pi}{4}\,(1 - n^2)\, H^2,$$

$$T = \frac{\pi}{64}\,(H^4 - H'^4) = \frac{\pi}{64}\,(1 - n^4)\, H^4, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{16}\,(1 + n^2)\, FH^2.$$

(181)

Fig. 120.



$$\frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

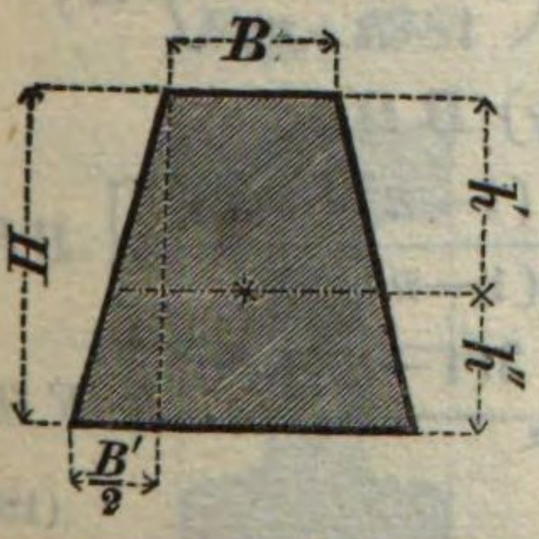
$$F = \tfrac{1}{4} \,(\,\pi - \,\, 4\,n^2)\, H^2,$$

$$T = \tfrac{1}{192}\,(3\,\pi - 16\,n^4)\, H^4, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{48} \left(\frac{3\,\pi - 16\,n^4}{\pi - 4\,n^2}\right) FH^2.$$

(182)

Fig. 121.



$$\frac{B'}{B} = m, \quad h' = \tfrac{1}{3} \left(\frac{3 + 2\,m}{2 + m}\right) H, \quad h'' = \tfrac{1}{3} \left(\frac{3 + m}{2 + m}\right) H,$$

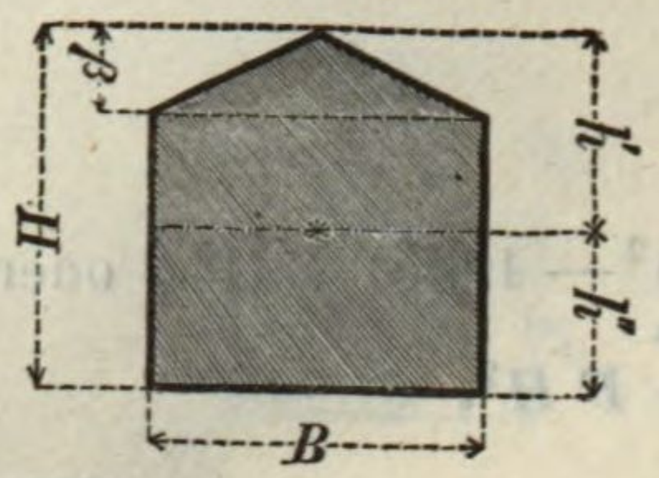
$$F = \tfrac{1}{2}\,(2 + m)\, BH,$$

$$T = \frac{6 + 6m + m^2}{36\,(2 + m)}\, BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \frac{6 + 6\,m + m^2}{18\,(2 + m)^2}\, FH^2.$$

(183)

Fig. 122.



$$\frac{\beta}{H}=n,\ h'=\tfrac{1}{3}\left(\frac{3-n^2}{2-n}\right)H,\ h''=\tfrac{1}{3}\left(\frac{3-3n+n^2}{2\ \ n}\right)H,$$

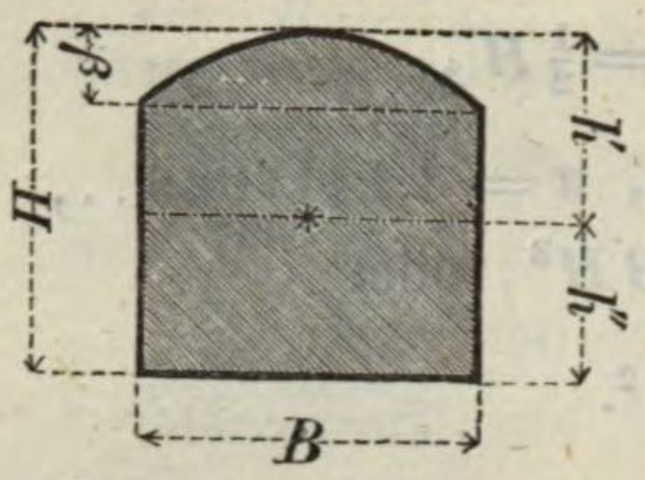
$$F=\tfrac{1}{2}(2-n)\,BH,$$

$$T=\frac{6-12n+12n^2-6n^3+n^4}{36\,(2-n)}\,BH^2,$$

$$T=\frac{6-12n+12n^2-6n^3+n^4}{18\,(2-n)^2}\,FH^2.$$

(184)

Fig. 123.



$$\frac{\beta}{H}=n,\ h'=\tfrac{3}{10}\left(\frac{5-n^2}{3-n}\right)H,\ h''=\tfrac{1}{10}\left(\frac{15-10n+3n^2}{3-n}\right)H,$$

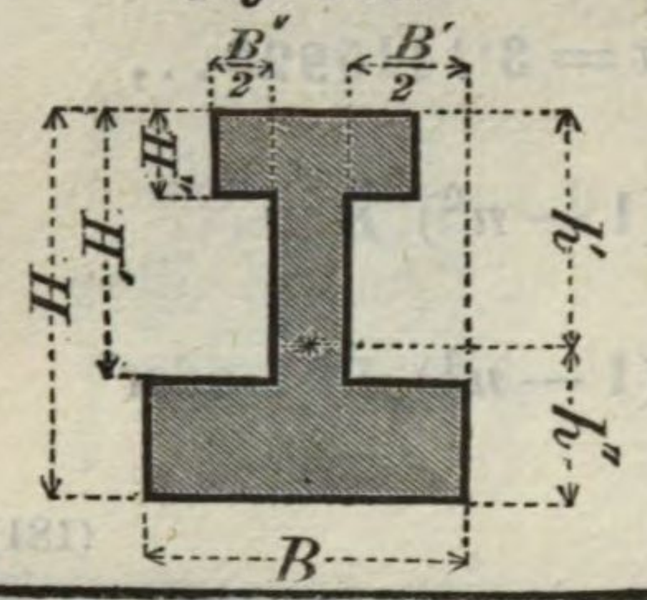
$$F=\tfrac{1}{3}(3-n)\,BH,$$

$$T=\frac{525-700n+630n^2-300n^3+37n^4}{2100\,(3-n)}\,BH^3,$$

$$T=\frac{525-700n+630n^2-300n^3+37n^4}{700\ (3-n)^2}\,FH^2.$$

(185)

Fig. 124.



$$\frac{B'}{B}=m,\ \frac{H'}{H}=n,\ \frac{B''}{B}=p,\ \frac{H''}{H}=q,\ h=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-mn^2+pq^2}{1-mn+pq}\right)H,$$

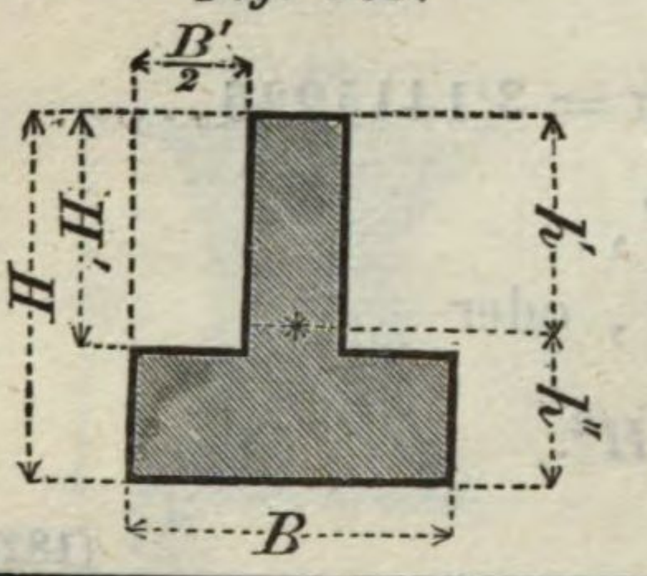
$$h''=H-h',\ F=(1-mn+pq)\,BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left[4(1-mn^3+pq^3)-3\,\frac{(1-mn^2+p^2)^2}{(1-mn+pq)}\right]BH^3,$$

$$T=\frac{4(1-mn^3+pq^3)(1-mn+pq)-3(1-mn^2+pq^2)^2}{12(1-mn+pq)^2}\,FH^2.$$

(186)

Fig. 125.



$$\frac{B'}{B}=m,\ \frac{H'}{H}=n,\ h'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-mn^2}{1-mn}\right)H,\ h''=H-h',$$

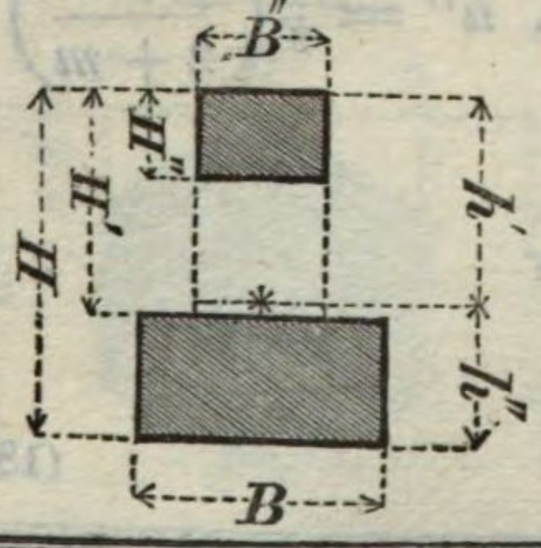
$$F=(1-mn)\,BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left[4\,(1-mn^3)-\frac{3\,(1-mn^2)^2}{(1-mn)}\right]BH^3,$$

$$T=\frac{4\,(1-mn^3)\,(1-mn)-3\,(1-mn^2)^2}{12\,(1-mn)^2}\,FH^2.$$

(187)

Fig. 126.



$$\frac{B''}{B}=p,\ \frac{H'}{H}=n,\ \frac{H''}{H}=q,\ h'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-n^2+pq^2}{1-n+pq}\right)H,$$

$$h''=H-h',\ F=(1-n+pq)\,BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left[4\,(1-n^3+pq^3)-\frac{3\,(1-n^2+pq^2)^2}{(1-n+pq)}\right]BH^3,$$

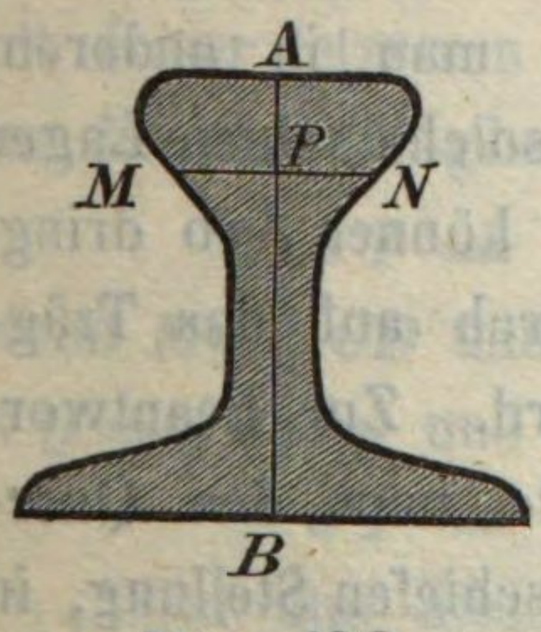
$$T=\frac{4(1-n^3+pq^3)(1-n+pq)-3(1-n^2+pq^2)^2}{12\,(1-n+pq)^2}\,FH^2.$$

(188)

An diese Zusammenstellung findet man noch die Erklärung anzuknüpfen, dass die Figuren 102 bis *inclus.* 120 sowohl nach horizontaler als auch nach verticaler Richtung, die übrigen Figuren aber nur nach horizontaler Richtung symmetrisch gebildet sind, ferner dass die krummlinige Begränzung in den Figuren 114, 115, 117 und 123 nach parabolischen Segmenten, und in der Figur 118 beiderseits nach einer halben Ellipse angenommen ist. Die Annahme der erwähnten parabolischen Begränzung anstatt des Kreisbogens hat den Vortheil der Einfachheit, und bietet selbst für Kreisbögen von 90gradigem Mittelpunctswinkel genügende Genauigkeit dar. Man sieht übrigens aus dieser Zusammenstellung in Uebereinstimmung mit dem §. 54, dass sich das fragliche Trägheitsmoment stets auf die Form cFH^2 bringen lässt, wobei c nicht von der Grösse des Querschnittes, sondern nur von der Gestalt desselben abhängt, also für analoge Querschnittsgestalten, bei welchen die in der Zusammenstellung bezeichneten Verhältnisszahlen (m, n, p, q) dieselben sind, constant wird. Diese Darstellungsweise (cFH^2) ist zur Beurtheilung die geeignetste, indem sodann der Vergleich zwischen der betreffenden Figur und einem Rechtecke von derselben Höhe und Querschnittsgrösse leicht geschehen kann, wenn man nämlich beachtet, dass das Trägheitsmoment eines solchen Rechteckes den Werth $\frac{1}{12}FH^2$ annimmt.

§. 117.

Fig. 127.



Eintheilung der Querschnitts-Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrie. Symmetrisch gebildete Figuren spielen in der Anwendung als Querschnitte eine wichtige Rolle. Um derartige Querschnitts-Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrie einzutheilen, bemerke man, dass in einem Querschnitte (Fig. 127) eine **Axe der Symmetrie** diejenige Gerade $\overline{AB}$ genannt werden soll, wodurch jede Normale darauf (z. B. $\overline{MN}$ in P) halbirt wird. Desshalb kann man die Figuren von einander durch **die Zahl der Axen** unterscheiden, die sie in Bezug auf die Symmetrie besitzen. So hat z. B. die Fig. 127 **eine solche Axe**, während die Figuren 128,

Fig. 128.

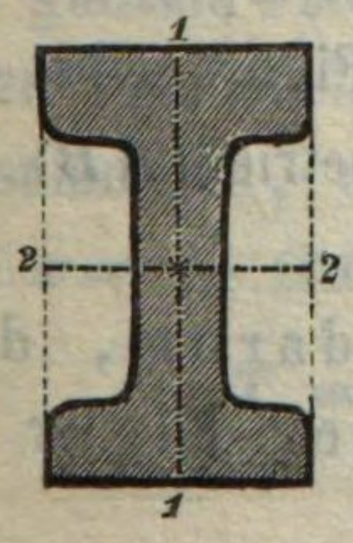


Fig. 129.

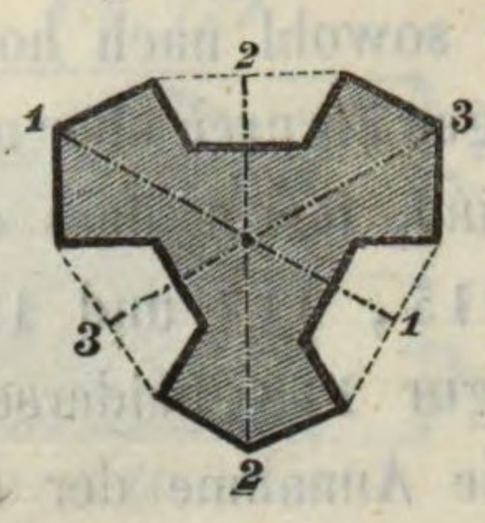


Fig. 130.

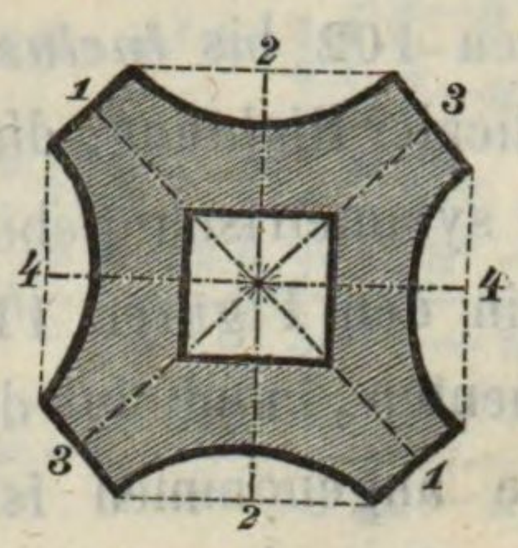
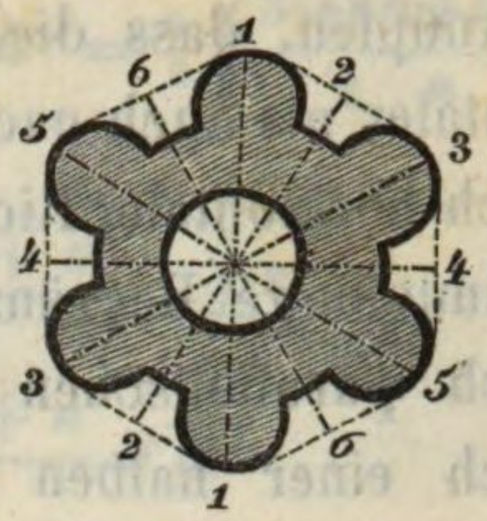


Fig. 131.



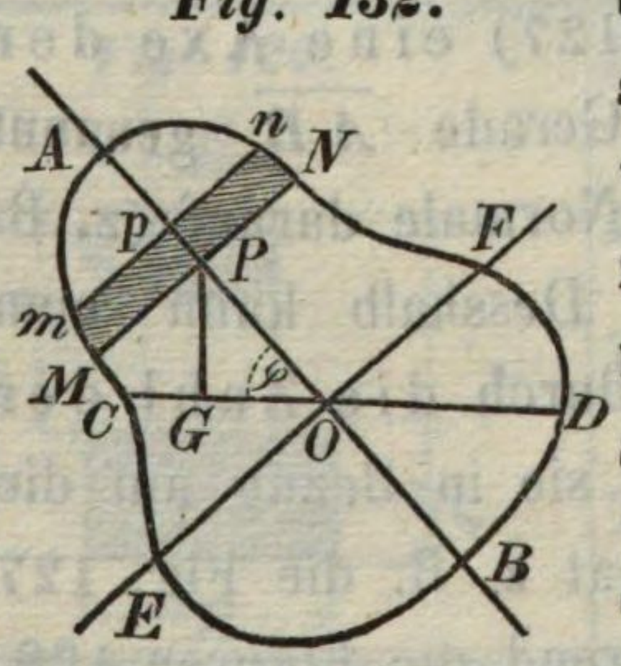
129, 130, 131 mehrere, nämlich respective 2, 3, 4, 6 Axen der Symmetrie enthalten. Eben so sind sämmtliche regelmässige Polygone symmetrische Figuren, welche eine mit der Seitenzahl übereinstimmende Anzahl von Axen der Symmetrie besitzen. Zugleich leuchtet ein, dass, wenn überhaupt die Anzahl der Symmetrie-Axen n ist, je zwei solche unmittelbar auf einander folgende Axen den Winkel von $\frac{180}{n}$ Graden einschliessen, alle Axen aber durch den Schwerpunct der Figur gehen.

§. 118.

Trägheitsmoment solcher symmetrisch gebildeten Querschnitts-Figuren in verschiedenen Lagen.

Man hat bisher die Querschnitte stets in solchen Lagen betrachtet, wo die Hauptdimensionen entweder parallel zur neutralen Axe oder normal auf dieselbe gerichtet, daher beziehungsweise horizontal und vertical gelegen waren, wenn die neutrale Axe selbst eine horizontale Lage hatte. Nur die Figuren 43 und 46 hat man in anderen, gleichsam schiefen Lagen berücksichtiget. Da solche schiefe Lagen auch bei anderen Querschnitts-Figuren vorkommen können, so dringt sich nun die Frage auf, welcher Einfluss dadurch auf das Trägheitsmoment des Querschnittes hervorgebracht wird. Zur Beantwortung dieser Frage betrachte man den Querschnitt (Fig. 132) in einer schiefen Stellung, in welcher CD die durch den Schwerpunct O gezogene neutrale Axe ist. Die Figur selbst soll mindestens eine Axe der Symmetrie (AB) besitzen.

Fig. 132.

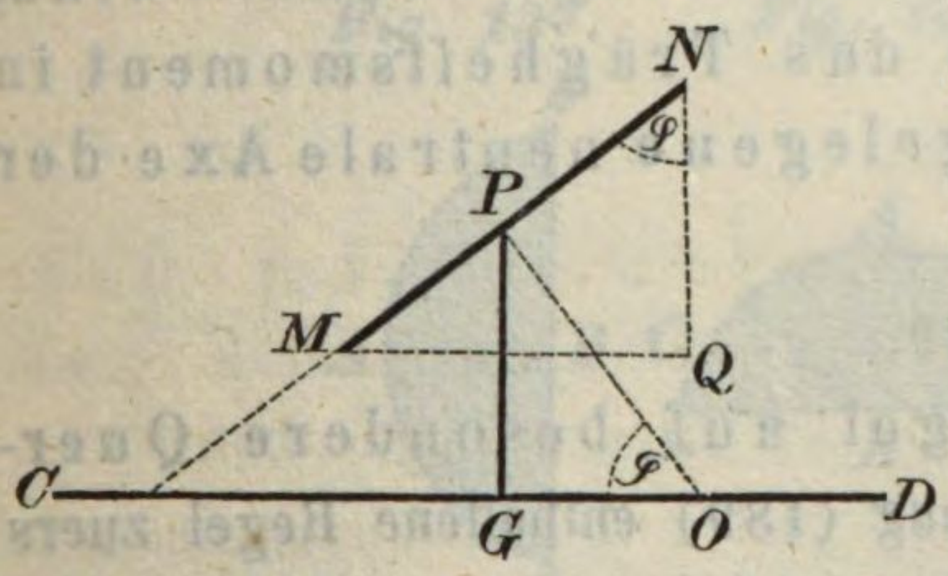


Es handelt sich nun darum, das Trägheitsmoment T dieser Figur in

Bezug auf die der gewählten Lage entsprechende neutrale Axe CD zu finden.

Zu diesem Behufe sei der erwähnte Schwerpunct O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, bei welchem die positiven Abscissen auf der Axe der Symmetrie von O gegen A gezählt werden, während die Ordinatenaxe in die hierauf normale Richtung fällt, und man bezeichne für einen willkürlichen Punct M der Begränzungscurve die Abscisse OP mit x, die Doppelordinate MN hingegen mit y. Zieht man in einer unendlich kleinen Entfernung ($Pp = dx$) die nächste Doppelordinate mn, so entsteht das Flächenelement $MNmn$, welches offenbar als eine materielle Linie zu betrachten sein wird, deren unendlich kleiner Inhalt df durch $y\,dx$ auszudrücken ist. Nennt man ferner φ den Winkel, welcher von der Axe der Symmetrie und der neutralen Axe eingeschlossen wird, und setzt man die Entfernung des Mittelpunctes P der Doppelordinate von letztgenannter Axe, nämlich $PG = z$, so wird das unendlich kleine Trägheitsmoment dT des Flächenelementes mit jenem übereinstimmen, das einer materiellen Geraden MN (Fig. 133) entspricht,

Fig. 133.



wenn ihre Masse $= df$, ihre Länge $= y$, die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Drehungsaxe $= z$, und der Winkel, den sie mit dieser letzteren bildet $= 90^0 - \varphi$ gesetzt wird. Man hat daher für das Trägheitsmoment des Flächenelementes df

$$dT = \tfrac{1}{12} df \overline{NQ}^2 + df \overline{PG}^2,$$

wenn $MQ \parallel CD$ und $NQ \perp MQ$ gezogen wird. Es ist aber $df = ydx$, $NQ = y\cos\varphi$ und $z = x\sin\varphi$, also auch

$$dT = \tfrac{1}{12}\cos^2\varphi\; y^3\,dx + \sin^2\varphi\; x^2 y\,dx.$$

Um aus diesem Differentialausdrucke das Trägheitsmoment T der ganzen Fläche zu finden, hat man die Momente von sämmtlichen Flächenelementen, aus welchen die betrachtete Figur besteht, zu summiren, daher die Integrale zwischen den Gränzen $x = OA$ und $x = -OB$ zu nehmen. Man erhält daher

$$T = \tfrac{1}{12}\cos^2\varphi \int_{-OB}^{+OA} y^3\,dx + \sin^2\varphi \int_{-OB}^{+OA} x^2 y\,dx.$$

Treffen die neutrale Axe und die Axe der Symmetrie zusammen, und bezeichnet man für diesen besonderen Fall den Werth des Trägheitsmomentes mit T', so hat man wegen $\varphi = o$

$$T' = \frac{1}{12} \int_{-OB}^{+OA} y^3 \, dx.$$

Stehen jedoch die beiden erwähnten Axen normal auf einander, und nennt man den diessfälligen Werth T'', so wird wegen $\varphi = 90^0$

$$T'' = \int_{-OB}^{+OA} x^2 y \, dx.$$

Werden jetzt diese beiden für T' und T'' gefundenen Werthe in der allgemeinen Gleichung für T berücksichtigt, so erhält man die eben so einfache wie merkwürdige Relation

$$T = T' \cos^2 \varphi + T'' \sin^2 \varphi \; *) \quad . \quad . \quad . \quad (189).$$

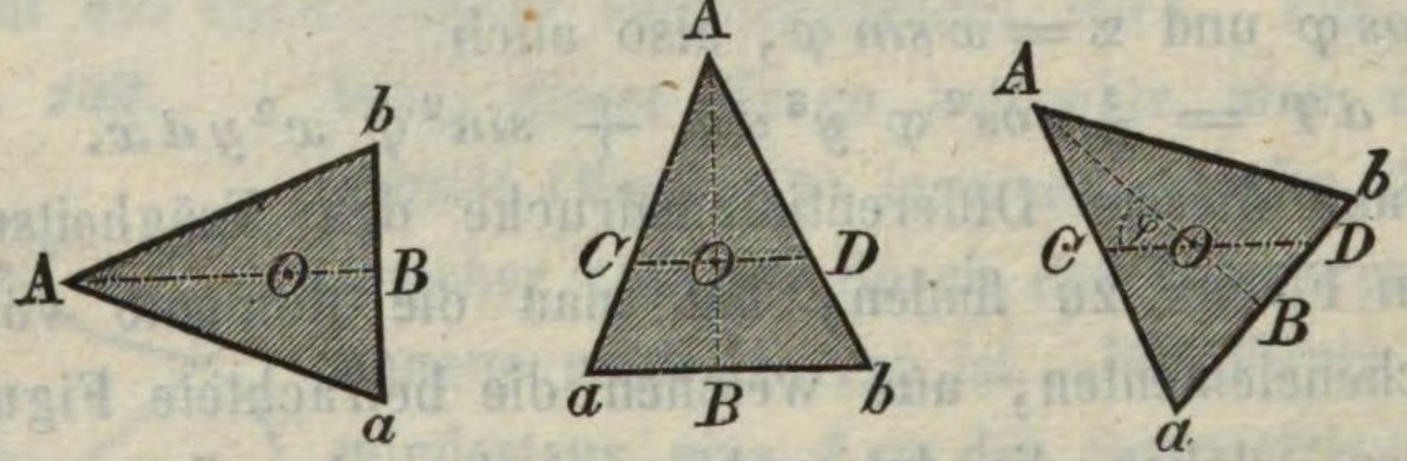
Wenn daher für eine symmetrisch gebildete Figur die Werthe der beiden Trägheitsmomente in Bezug auf die gewählten Coordinatenaxen bekannt sind, so lässt sich hieraus auch das Trägheitsmoment in Bezug auf jede wie immer gelegene neutrale Axe der Figur bestimmen.

§. 119.

Anwendung dieser Regel auf besondere Querschnitte. Um die in der Gleichung (189) enthaltene Regel zuers auf Figuren mit Einer Axe der Symmetrie anzuwenden, betrachtet man das gleichschenklige Dreieck und das parabolische Segment.

Für das gleichschenklige Dreieck ist die Höhe zugleich die Axe der Symmetrie. Es befinde sich dasselbe in Fig. 134 in der

Fig. 134. *Fig. 135* *Fig. 136.*



*) Diese Relation hat der Verfasser bereits im Jahre 1851 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins Nr. 10 zur öffentlichen Kenntniss gebracht.

Lage, wo die Axe der Symmetrie mit der horizontalen neutralen Axe zusammenfällt, also $\varphi = o$ wird, in Fig. 135 hingegen in der Lage, wo jene Axe normal auf der neutralen Axe steht, also $\varphi = 90^o$ wird, während die schiefe Lage in Fig. 136 zu einem beliebigen Winkel φ gehört. Da das Trägheitsmoment des Dreieckes in den beiden ersten Stellungen bekannt ist, so kann man dasselbe auch für die erwähnte schiefe Lage finden. Setzt man nämlich $\overline{a\,b} = \alpha$, $\overline{A\,B} = \beta$ und $Area\ A\,a\,b = \frac{1}{2}\alpha\,\beta = F$, so hat man unter Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. und zufolge der Gleichungen (52) und (55)

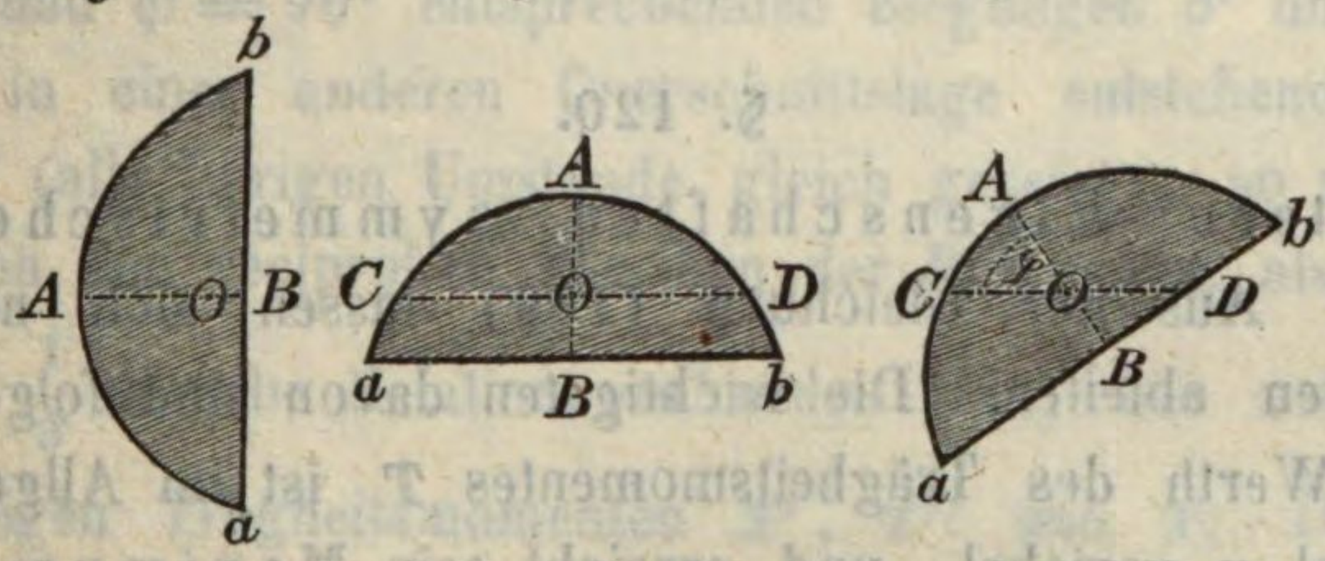
$$T' = \tfrac{1}{24} F \alpha^2 \text{ und } T'' = \tfrac{1}{18} F \beta^2,$$

also auch nach der Gleichung (189)

$$T = \tfrac{1}{6} F (\tfrac{1}{4} \alpha^2 cos^2 \varphi + \tfrac{1}{3} \beta^2 sin^2 \varphi) \ . \ . \ . \quad (190).$$

Betrachtet man auf dieselbe Weise das parabolische Segment in den Stellungen Fig. 137, 138 und 139, welche den betreffenden

Fig. 137. *Fig. 138.* *Fig. 139.*



Winkeln von o, 90 und φ Graden entsprechen, und setzt man wieder $\overline{a\,b} = \alpha$, $\overline{A\,B} = \beta$ und $Area\ A\,a\,b = \frac{2}{3}\alpha\,\beta = F$, so hat man nach den Gleichungen (56) und (57)

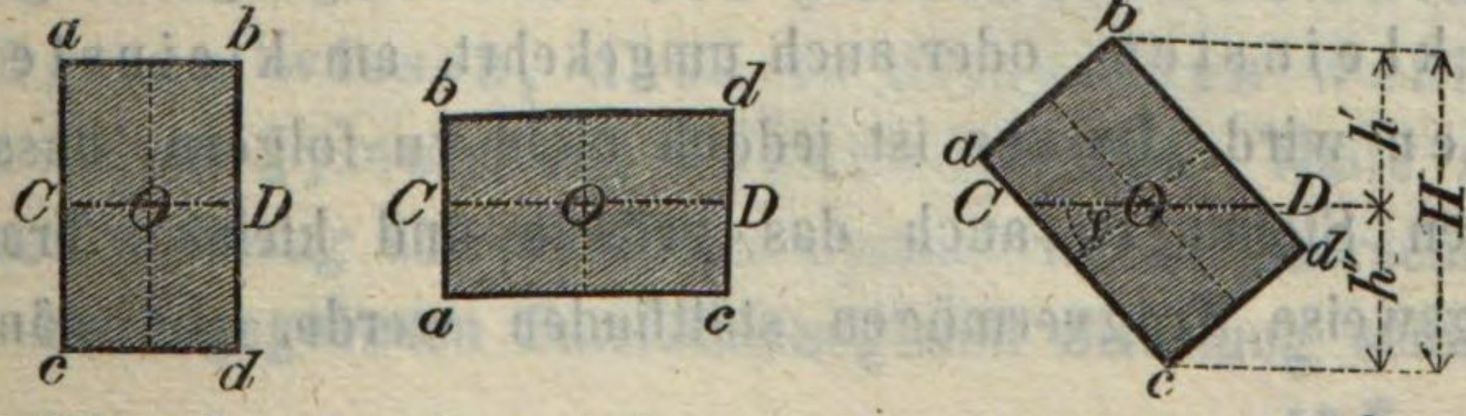
$$T' = \tfrac{1}{20} F \alpha^2 \text{ und } T'' = \tfrac{12}{175} F \beta^2,$$

sofort aber

$$T = \tfrac{1}{5} F [\tfrac{1}{4} \alpha^2 cos^2 \varphi + \tfrac{12}{35} \beta^2 sin^2 \varphi] \ . \ . \quad (191).$$

Um noch die Anwendung der gegebenen Regel auf eine Figur mit 2 Axen der Symmetrie zu zeigen, stehe ein Rechteck in den 3 Lagen Fig. 140, 141 und 142 in Betracht. Sei $\overline{a\,b} = \alpha$,

Fig. 140. *Fig. 141.* *Fig. 142.*



$\overline{b\,d} = \beta$ und *Area* $a\,b\,c\,d = F = \alpha\,\beta$, so hat man offenbar nach der Gleichung (51)

$$T' = \tfrac{1}{12} F \beta^2 \text{ und } T'' = \tfrac{1}{12} F \alpha^2,$$

daher auch

$$T = \tfrac{1}{12} F \,(\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi) \quad . \quad . \quad (192).$$

Ueberdiess ist die Höhe der Fig. (142) $H = \beta \cos\varphi + \alpha \sin\varphi$, und die Abstände der am meisten gespannten und gepressten Fasern von $C\,D$ sind $h' = h'' = \frac{1}{2} H$, wesshalb die Gleichung (192) auch die Form annimmt

$$T = \frac{(\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi)}{12\,(\beta \cos\varphi + \alpha \sin\varphi)^2} F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (193).$$

Fällt insbesondere die neutrale Axe in die Diagonale, so ist $tg\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, $\sin^2\varphi = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ und $\cos^2\varphi = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, daher in Uebereinstimmung mit der bereits gegebenen Relation (52)

$$T = \tfrac{1}{24} F H^2.$$

§. 120.

Weitere Eigenschaften symmetrischer Querschnitte. Aus der Gleichung (189) lassen sich noch andere Eigenschaften ableiten. Die wichtigsten davon sind folgende:

1. Der Werth des Trägheitsmomentes T ist im Allgemeinen mit dem Winkel φ variabel, und erreicht sein Maximum für $\varphi = o$, sein Minimum aber für $\varphi = 90^o$, oder auch umgekehrt. Es ist daher der grössere von den beiden Werthen T' und T'' das Maximum, der kleinere hingegen das Minimum des Trägheitsmomentes, während alle anderen Werthe für T zwischen T' und T'' liegen. Indem nun die Biegung eines Trägers sich umgekehrt, wie das betreffende Trägheitsmoment verhält, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass unter allen Lagen des Querschnittes die 2 besonderen, wo $\varphi = o$ und $\varphi = 90^o$ wird, also die neutrale Axe mit der Axe der Symmetrie zusammenfällt, und auf derselben normal steht, diejenigen sind, in welchen die Biegung am grössten und am kleinsten, oder auch umgekehrt, am kleinsten und am grössten wird. Daraus ist jedoch nicht zu folgern, dass in diesen besonderen Stellungen auch das grösste und kleinste Tragmoment, beziehungsweise Tragvermögen stattfinden werde. Ist nämlich auf

die erwähnte Weise der Werth des betreffenden Trägheitsmomentes bekannt geworden, so muss dasselbe zur Bestimmung des Tragmomentes oder des mechanischen Widerstandsmomentes erst nach den früher gegebenen Regeln benützt werden. So erhält man z. B. für das Tragmoment des Rechteckes in der schiefen Stellung desselben (Fig. 142)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi}{\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi}\right) a F \\ \text{oder } \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi}{\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi}\right) r F \end{cases} \quad . \quad . \quad (194),$$

je nachdem von den auf die Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen a und r die eine oder die andere kleiner ist. Dieser Ausdruck ist zwar ebenfalls mit φ variabel, erreicht aber das Maximum und Minimum nicht für dieselben Werthe, wie der Ausdruck für T.

2. Heisst man die den besonderen 2 Stellungen des Querschnittes für $\varphi = o$ und $\varphi = 90^0$ entsprechenden Biegungen δ' und δ'', hingegen die in einer anderen Querschnittslage entstehende Biegung allgemein δ (alle übrigen Umstände gleich gesetzt), so muss offenbar zwischen den reciproken Werthen der Biegungen, also zwischen $\frac{1}{\delta'}$, $\frac{1}{\delta''}$ und $\frac{1}{\delta}$ dieselbe Relation vorhanden sein, wie zwischen den dazu gehörigen Trägheitsmomenten T', T'' und T. Desshalb ist man berechtigt zu schreiben

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos^2\varphi}{\delta'} + \frac{\sin^2\varphi}{\delta''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195).$$

Diese Gleichung lehrt, die Biegung des Trägers für eine beliebige Lage des Querschnittes zu finden, wenn die Werthe der grössten und kleinsten Biegung, welche nach Massgabe der verschiedenen Querschnittslagen entstehen können, bekannt sind. Dabei ist bemerkenswerth, dass, wenn die Grössen δ' und δ'' gegeben sind, es durchaus nicht nothwendig erscheine, die eigentliche Gestalt des Querschnittes zu kennen. Es genügt zu wissen, dass in demselben wenigstens eine Axe der Symmetrie vorhanden sei. Hätte z. B. ein Balken einen in Bezug auf eine Axe symmetrischen Querschnitt, und wäre bei einer gegebenen Unterstützung und Belastung seine grösste

Durchbiegung 3″ und zwar in derjenigen Querschnittslage, in welcher die Axe der Symmetrie mit der neutralen Axe zusammenfällt, hingegen die kleinste Durchbiegung, welche nunmehr in der um einen rechten Winkel gedrehten Querschnittslage eintreten muss, nur 1″, so könnte die etwa aufgestellte Frage, wie viel sich der Balken bei einer solchen Stellung des Querschnittes durchbiegen werde, in welcher die neutrale Axe mit der Axe der Symmetrie einen Winkel von 30 Graden einschliessen würde, alle übrigen Umstände aber ungeändert bleiben sollen, ganz einfach durch die Auflösung der Gleichung $\delta = \frac{cos^2 30^0}{3} + \frac{sin^2 30^0}{1}$ beantwortet werden, weil sodann $\delta' = 3''$, $\delta'' = 1''$ und $\varphi = 30^0$ gesetzt werden muss. Sonach erhielte man $\delta = 2$ Zoll.

3. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes T ist es gerade nicht nothwendig, dass die beiden zu den Winkeln $\varphi = \varphi' = o$ und $\varphi = \varphi'' = 90^0$ gehörigen Trägheitsmomente unmittelbar gegeben seien. Wären nämlich anstatt dieser Werthe 2 andere T''' und T^{IV} gegeben, welche den Winkeln $\varphi = \varphi'''$ und $\varphi = \varphi^{IV}$ entsprächen, so würden sich im Allgemeinen die Gleichungen

$$T''' = T' cos^2 \varphi''' + T'' sin^2 \varphi''' \text{ und}$$
$$T^{IV} = T' cos^2 \varphi^{IV} + T'' sin^2 \varphi^{IV}$$

zur Bestimmung der darin unbekannten Grössen T' und T'' benützen lassen. Aus diesen Gleichungen folgt nämlich

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{T^{IV} sin^2 \varphi''' - T''' sin^2 \varphi^{IV}}{sin(\varphi''' + \varphi^{IV}) sin(\varphi''' - \varphi^{IV})} \\ \text{und } T'' &= \frac{T''' cos^2 \varphi^{IV} - T^{IV} cos^2 \varphi'''}{sin(\varphi''' + \varphi^{IV}) sin(\varphi''' - \varphi^{IV})} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (196).$$

Zu Folge dieser Relationen ist es genügend, das Trägheitsmoment des Querschnittes in irgend 2 Lagen desselben zu kennen, um auf das Trägheitsmoment desselben in jeder andern Lage zu schliessen. Man erkennt übrigens, dass die Gleichungen (196) nur dann bestimmt erscheinen, wenn φ''' von φ^{IV} und $\varphi''' + \varphi^{IV}$ von 2 oder 4 Rechten verschieden sind.

4. Nimmt man in der Gleichung (189) $T' = T''$, so wird für ieden Winkel φ

$$T = T' (cos^2 \varphi + sin^2 \varphi) = T' = T'' \quad . \quad . \quad (197).$$

In diesem besonderen Falle ist also das Trägheitsmoment des Querschnittes in allen Lagen desselben eine constante Grösse.

Damit z. B. diese Eigenschaft bei einem gleichschenkligen Dreiecke eintrete, müsste wegen $T' = T''$ mit Rücksicht auf die Gleichung (190) $\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{3}\beta^2$, also $\alpha : \beta = 2 : \sqrt{3} = 1 : 0{\cdot}866$, d. h. das Dreieck gleichseitig sein.

Hingegen hätte man bei einem parabolischen Segmente mit Rücksicht auf die Gleichung (191)

$\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{12}{35}\beta^2$, also $\alpha : \beta = 4\sqrt{3} : \sqrt{35} = 1 : 0{\cdot}854$.

Endlich wäre bei dem rechteckigen Querschnitte die erwähnte Eigenschaft dann vorhanden, wenn in der Gleichung (192) $\alpha = \beta$, d. h. das Rechteck in ein Quadrat übergehen würde. Hiermit stimmt die für das Quadrat gemachte Bemerkung im §. 56 ad 2 überein. Es leuchtet ein, dass man bei jeder Figur, welche eine oder zwei Axen der Symmetrie besitzet, die Dimensionen stets so wählen kann, dass die beiden mit T' und T'' bezeichneten, und sofort auch die auf alle anderen Querschnittslagen bezüglichen Trägheitsmomente einander gleich werden.

Ein Träger mit einem solchen Querschnitte muss sodann unter übrigens gleichen Umständen bei jeder Querschnittslage stets einerlei Biegung zeigen, wenn hierbei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

5. Hat eine Figur mehr als 2 Axen der Symmetrie, und denkt man sich dieselbe nach und nach in alle verschiedenen Lagen gebracht, so begreift man, dass bei der Regelmässigkeit einer solchen Figur jedesmal, wenn die neutrale Axe mit einer Axe der Symmetrie zusammenfällt, das Trägheitsmoment T den gleichen Werth annehmen muss. Die Gleichungen (196) lehren aber, dass in dem Falle, wo für 2 verschiedene Werthe von $\varphi = \varphi'''$ und $\varphi = \varphi^{IV}$ die correspondirenden Werthe für die Trägheitsmomente T''' und T^{IV} einander gleich werden, auch die zu den Winkeln $\varphi = \varphi' = 0$ und $\varphi = \varphi'' = 90^0$ gehörigen T' und T'' identisch sein müssen, wenn hierbei selbstverständlich $\sin\varphi'''$ und $\sin\varphi^{IV}$ und eben so $\cos\varphi'''$ und $\cos\varphi^{IV}$ verschieden sind, also φ''' und φ^{IV} sich weder zu 180^0 noch zu 360^0 ergänzen.

Desshalb kann mit Bezug auf die vorige Bemer-

kung ad 4 behauptet werden, dass für Figuren mit mehr als 2 Axen der Symmetrie das Trägheitsmoment, also auch die Biegung eines derartig geformten Prismas in jeder Querschnittslage unverändert bleibt. Diese Eigenschaft ist für die Praxis wichtig, und die Zahl der Figuren, welche dieselbe besitzen, ist unbegränzt*).

Von diesen Figuren gehören in die vorderste Reihe alle regelmässigen Polygone. Für das regelmässige Dreieck und für das Quadrat wurde die Richtigkeit dieser Eigenschaft bereits ad 4 erkannt. Offenbar gehört auch der Kreis in diese Figuren-Kategorie, indem derselbe eine unendlich grosse Anzahl von Axen der Symmetrie besitzt. Ausserdem können aber derlei Querschnitte ganz beliebig begränzt sein, wie diess aus den Fig. 129, 130, 131 ersichtlich ist, welche beziehungsweise 3, 4, 6 Axen der Symmetrie, also auch die in Rede stehende Eigenschaft der Unveränderlichkeit des Trägheitsmomentes besitzen. So z. B. würde eine Wasserradwelle, welche ein regelmässiges Sechseck zum Querschnitte hat, bei der rotirenden Bewegung des Rades stets dieselbe Biegung erleiden. Eben so ist einzusehen, dass die bei Aufstellung von Strassengeländern in Verwendung kommenden Geländerbäume mit quadratischem Querschnitte ganz gleichen Durchbiegungen ausgesetzt seien, es möge derselbe auf eine seiner Seiten oder eine seiner Diagonalen gelegt werden, daher man sich täuschen würde, wenn man durch die letztere Stellung im Vergleich zur ersteren eine grössere Steifigkeit erreichen zu können glaubte. Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, dass eine ungleiche Qualität in der Materie oder ein Ueberschreiten der Elasticitätsgränzen diese Resultate stören können.

Was das Tragmoment solcher Querschnitte betrifft, deren Trägheitsmoment sich in den verschiedenen Querschnittslagen nicht ändert, so ist klar, dass dasselbe nur mehr mit dem reciproken Werthe der betreffenden Höhendimension h' oder h'', nämlich des Abstandes der am meisten gespannten oder gepressten Fasern von der neutralen Axe

---

*) Auf diese merkwürdige Eigenschaft regelmässig gebildeter Querschnitte hat der Verfasser schon im Jahre 1851 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines (Nr. 10) aufmerksam gemacht. Was insbesondere den quadratischen Querschnitt betrifft, so wurde diese Eigenschaft bereits von Navier bemerkt.

veränderlich ist. Je kleiner nämlich der bezügliche Abstand ist, auf ein desto grösseres Tragvermögen kann geschlossen werden, und umgekehrt. So wäre z. B. für das Quadrat in jeder beliebigen Stellung nach der Gleichung (194) wegen $\beta = \alpha$

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \text{entweder } \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^3}{\sin\varphi + \cos\varphi}\right) a \\ \text{oder } \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^3}{\sin\varphi + \cos\varphi}\right) r \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (198).$$

Dieser Werth nimmt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 45^0$ ab, und von $\varphi = 45^0$ bis $\varphi = 90^0$ zu, wird also ein Maximum für $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$, d. h. wenn die neutrale Axe parallel zur Quadratseite läuft, hingegen für $\varphi = 45^0$ ein Minimum, d. h. wenn die neutrale Axe in eine Diagonale des Ouadrates fällt. Der Maximalwerth ist $\frac{1}{6} a \alpha^3$ und der Minimalwerth $\frac{1}{6} \frac{a \alpha^3}{\sqrt{2}}$, oder auch respective $\frac{1}{6} r \alpha^3$ und $\frac{1}{6} \frac{r \alpha^3}{\sqrt{2}}$, sonach das gegenseitige Verhältniss wie $\sqrt{2} : 1$, was mit der Bemerkung ad 2 im §. 56 übereinstimmt.

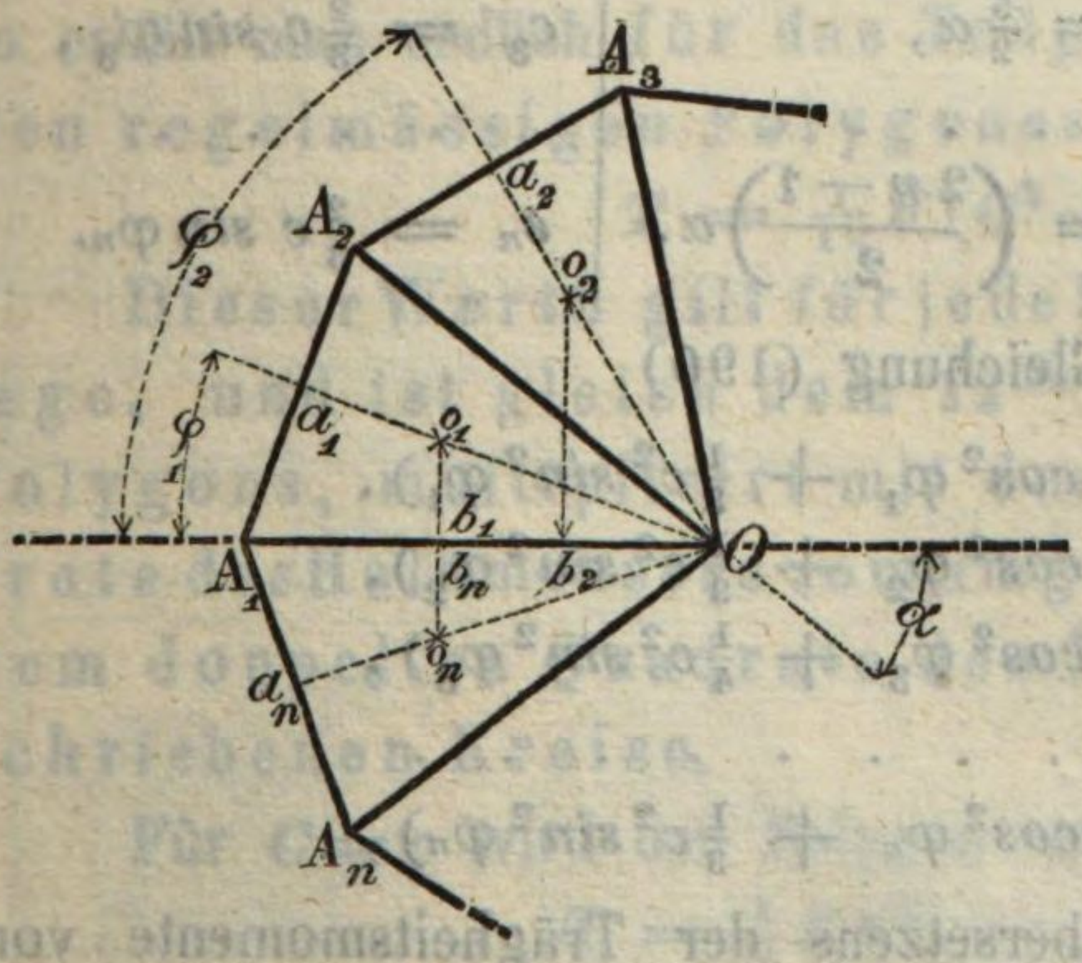
§. 121.

Trägheitsmoment regelmässiger Polygone. In dem vorigen §. wurde bewiesen, dass das Trägheitsmoment eines regelmässigen Polygons in jeder Lage desselben einen und denselben Werth annimmt. Es erübrigt nur noch, diesen Werth selbst kennen zu lernen. Zu diesem Behufe stehe (Fig. 143) ein regelmässiges Polygon mit n Seiten in Betracht. Da die Lage desselben beliebig ist, so nehme man sie so an, dass eine Axe der Symmetrie, z. B. $A_1 O$, mit der horizontalen neutralen Axe zusammenfällt. Man stelle sich jetzt das Polygon aus den n gleichschenkligen und zugleich congruenten Dreiecken

$A_1 O A_2$, $A_2 O A_3$, . . , $A_1 O A_n$

zusammengesetzt vor, und nenne sofort

Fig. 143.



die Seite desselben als Grundlinie dieser Dreiecke

$A_1 A_2 = A_2 A_3 = .. = A_1 A_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = b,$

den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises als Höhe dieser Dreiecke $O a_1 = O a_2 = ... = O a_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = c,$

den Flächenraum eines jeden solchen Dreieckes

$A_1 O A_2, \; A_2 O A_3, ... A_1 O A_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = f,$

den Flächenraum des ganzen Polygons $. \; . \; . \; . \; . \; . \; . = F,$

den Centriwinkel in demselben, nämlich

$< A_1 O A_2 = < A_2 O A_3 = ... = < A_1 O A_n \quad . \; . \; . \; . = \alpha,$

die Winkel, welche die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke mit der neutralen Axe $A_1 O$ einschliessen $= \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n,$

die Abstände ihrer Schwerpuncte o_1, o_2, o_3, o_n von dieser Axe, also $o_1 b_1, o_2 b_2, ... o_n b_n$ beziehungsweise $= e_1, e_2, e_3, ..., e_n,$

die Trägheitsmomente der Dreiecke in Bezug auf die durch ihre eigenen Schwerpuncte gehenden horizontalen Axen

$= t_1, t_2, t_3, ..., t_n,$

in Bezug auf die gemeinschaftliche neutrale Axe $A_1 O$ aber

$= T_1, T_2, T_3, ..., T_n,$

endlich das zu suchende Trägheitsmoment des ganzen regelmässigen Polygones selbst $. \; . \; . \; . \; . = T.$

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man zunächst

$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n},$	$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha,$	$e_1 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_1,$
$b = 2c \, tang \frac{\alpha}{2},$	$\varphi_2 = \frac{3}{2}\alpha,$	$e_2 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_2,$
$f = \frac{1}{2} b c,$	$\varphi_3 = \frac{5}{2}\alpha,$	$c_3 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_3,$
	. . . .	. . . .
$F = nf,$	$\varphi_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\alpha,$	$e_n = \frac{2}{3} c \sin \varphi_n.$

Es ist ferner nach der Gleichung (190)

$$t_1 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_1 + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_1\right),$$
$$t_2 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_2 + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_2\right),$$
$$t_3 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_3 + \tfrac{1}{4} c^2 \sin^2 \varphi_3\right),$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$t_n = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_n + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_n\right),$$

und nach dem Satze des Uebersetzens der Trägheitsmomente von einer Axe auf eine andere

$$T_1 = t_1 + fe_1^2,$$
$$T_2 = t_2 + fe_2^2,$$
$$T_3 = t + fe_3^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$T_n = t_n + fe_n^2,$$

also auch durch Substitution der betreffenden Werthe

$$T_1 = \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{12} b^2 \cos^2 \varphi_1 + c^2 \sin^2 \varphi_1),$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{12} b^2 \cos^2 \varphi_2 + c^2 \sin^2 \varphi_2),$$
$$T_3 = \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{12} b^2 \cos^2 \varphi_3 + c^2 \sin^2 \varphi_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_n = \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{12} b^2 \cos^2 \varphi_n + c^2 \sin^2 \varphi_n),$$

und sofort wegen $T = \Sigma T_n$

$$T = \tfrac{1}{2} f[\tfrac{1}{12} b^2 \Sigma \cos^2 \varphi_n + c^2 \Sigma \sin^2 \varphi_n],$$ wobei ist:

$$\Sigma \cos^2 \varphi_n = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \cos^2\left[(2n-1)\frac{\alpha}{2}\right]$$

und $$\Sigma \sin^2 \varphi_n = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \sin^2\left[(2n-1)\frac{\alpha}{2}\right].$$

Nach den Lehren der Trigonometrie ist in jedem regelmässigen Polygone $\Sigma \cos^2 \varphi_n = \Sigma \sin^2 \varphi_n = \frac{1}{2} n$, also reducirt sich der Ausdruck für T auf

$$T = \tfrac{1}{4} n f(\tfrac{1}{12} b^2 + c^2) = \tfrac{1}{4} F(\tfrac{1}{12} b^2 + c^2).$$

Heisst man noch den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $A_1 O = C$, und bemerkt, dass sodann $\frac{1}{4} b^2 = C^2 - c^2$ zu setzen ist, so erhält man endlich für das Trägheitsmoment eines jeden regelmässigen Polygones ganz einfach

$$T = \tfrac{1}{12} F(C^2 + 2c^2) \ldots\ldots (199).$$

Dieser Werth gilt für jede beliebige Querschnittslage, und ist gleich dem 12ten Theil der Fläche des Polygons, multiplicirt mit der Summe aus dem Quadrate des Halbmessers vom umgeschriebenen Kreise und dem doppelten Quadrate des Halbmessers vom eingeschriebenen Kreise.

Für $C = c$ wird das Polygon ein Kreis, und hiefür

$$T = \tfrac{1}{4} F C^2 = \tfrac{1}{16} F (2C)^2.$$

Dieser Werth stimmt mit der Formel (53) überein, da $2C$ den Diameter des Kreises vorstellt.

Für das gleichseitige Dreieck ist $C = 2c$, also auch $T = \frac{1}{2} F c^2 = \frac{1}{18} F (3c)^2$. Dieser Werth stimmt mit der Formel (55) überein, da $3c$ die Höhe des Dreieckes ist.

Für das Quadrat ist ferner $C^2 = 2c^2$, folglich

$$T = \frac{1}{3} F c^2 = \frac{1}{12} F (2c)^2.$$

Dieser Werth steht in Uebereinstimmung mit der Formel (51), da $2c$ die Quadratseite bezeichnet.

§. 122.

Zusammenstellung der Trägheitsmomente für die regelmässigen Polygone. Die nachfolgende Zusammenstellung enthält die Werthe der Trägheitsmomente für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w. bis 12 Seiten, so wie für den Kreis, und zwar durch den Flächenraum F ausgedrückt. Es ist nämlich wegen $c = C \cos \frac{\alpha}{2}$, und $F = \frac{1}{2} n \sin \alpha C^2$ auch

$$T = \frac{1}{6} \left(\frac{2 + \cos \alpha}{n \sin \alpha} \right) F^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Zahl der Polygon-Seiten n	Centriwinkel in Graden α	Trägheitsmoment T des regelmässigen Polygons in Bezug auf die neutrale Axe in jeder Querschnittslage	
		Eigentlicher Werth desselben	Wenn bei gleichem Flächenraume das Trägheits-Moment des Kreisquerschnittes = 1 ist.
3	120	$0{\cdot}0962\ F^2$	1·209
4	90	$0{\cdot}0833\ F^2$	1·047
5	72	$0{\cdot}0809\ F^2$	1·016
6	60	$0{\cdot}0802\ F^2$	1·008
8	45	$0{\cdot}0798\ F^2$	1·003
9	40	$0{\cdot}0797\ F^2$	1·001
10	36	$0\ 0797\ F^2$	1·001
12	30	$0{\cdot}0796\ F^2$	1·000
∞ Kreis	0	$0{\cdot}0796\ F^2$	1·000

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass das Trägheitsmoment von regelmässigen Polygonen bei einerlei Flächenraum mit der Zunahme der Seitenzahl abnimmt, und sich dem Werthe $\frac{1}{4\pi} F^2 = 0{\cdot}0796\, F^2$, welcher dem Kreisquerschnitte entspricht, desto mehr nähert, je grösser n genommen wird.

Die Biegung eines Trägers, dessen Querschnitt ein regelmässiges Polygon ist, wird daher bei einem gegebenen Inhalte desselben desto grösser, je mehr Seiten das Polygon hat, und für den Kreisquerschnitt ist die grösste Biegung vorhanden.

§. 123.

Tragmoment regelmässiger Polygone. Nachdem das Trägheitsmoment der regelmässigen Polygone in jeder Lage der neutralen Axe bekannt ist, so unterliegt es keinem Anstande, das betreffende Tragmoment zu finden. Man hat nämlich nach der Gleichung (95) allgemein

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{aT}{h'} = \frac{1}{12} a F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{h'} \right) \\ \text{oder } \frac{rT}{h''} = \frac{1}{12} r F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{h''} \right) \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (201)$$

und es wird sich nur darum handeln, die richtigen Werthe für die Grössen h' und h'' zu substituiren. Zu diesem Behufe unterscheide man, ob die Anzahl der Polygonseiten gerade oder ungerade ist.

1. Ist die Seitenzahl n eines regelmässigen Polygones eine gerade, so hat man in jeder Querschnittslage $h' = h''$. Der grösste Werth, welchen die Abstände h' und h'' nach den verschiedenen Querschnittslagen erreichen können, ist offenbar der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, der kleinste Werth hingegen der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Fig. 144.

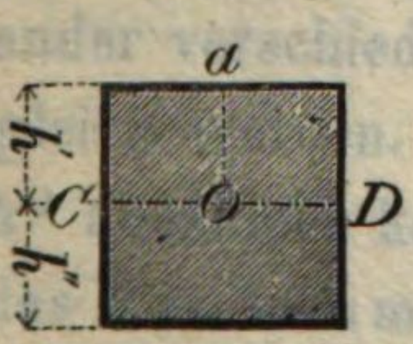
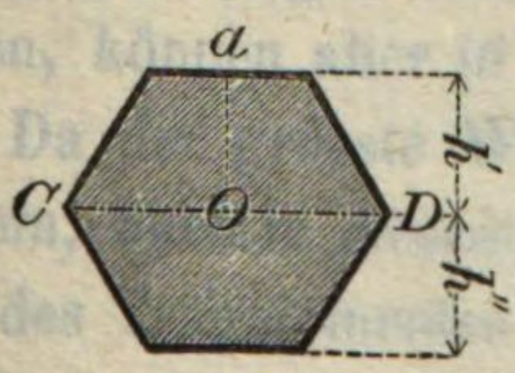


Fig. 145.



Das grösste Tragmoment *Max. M* entsteht daher für $h' = h'' = c$, d. h. wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises vertical steht, wie in den Figuren 144 und 145, und das klein-

Fig. 146.

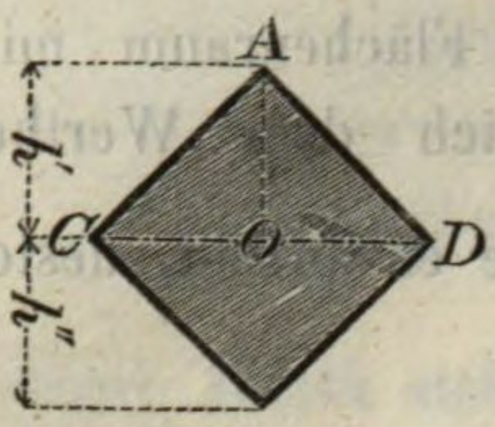
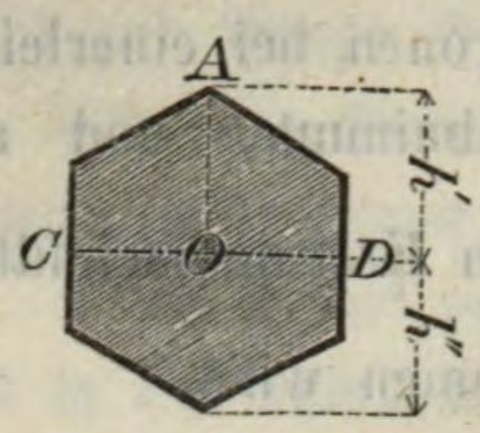


Fig. 147.



ste Tragmoment *Min. M* für $h' = h'' = C$, d. h. wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises vertical ist, wie in den Figuren 146 und 147, wo in beiden Fällen die neutrale Axe horizontal angenommen wird. Demgemäss wird

$$Max.\ M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12} a F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) \\ \text{oder } \frac{1}{12} r F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (202).$$

und

$$Min.\ M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12} a F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) \\ \text{oder } \frac{1}{12} r F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (203).$$

Auch hat man nach dem Vorigen

$$F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) = \frac{(2 + \cos\alpha)\sqrt{2}}{\sqrt{n \sin\alpha}} F^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) = \frac{(2 + \cos\alpha)\sqrt{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{n \sin\alpha}} F^{\frac{3}{2}}.$$

Endlich ist das Verhältniss zwischen dem jeweiligen Maximal- und Minimal-Werthe des Tragmomentes

$$Max.M : Min.M = C : c = 1 : \cos\frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad (204).$$

Nach diesen Relationen wurde folgende Tabelle entworfen:

Anzahl der Polygon-Seiten n	Tragmoment regelmässiger Polygone mit gerader Seitenzahl für alle Materialien				
	Eigentlicher Werth von		Verhältniss	Wenn bei gleichem Flächenraume das Tragmoment des Kreisquerschnittes = 1 ist	
	Max. M	*Min. M*	*Max. M*: *Min. M*	*Max. M*	*Min. M*
4	entw. $0{\cdot}167\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}167\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}118\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}118\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·707	1·18	0·84
6	entw. $0{\cdot}149\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}149\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}129\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}129\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·866	1·06	0·91
8	entw. $0{\cdot}145\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}145\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}134\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}134\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·924	1·03	0·95
10	entw. $0{\cdot}144\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}144\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}137\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}137\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·951	1·02	0·97
12	entw. $0\,143\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}143\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}138\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0\,138\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·966	1·01	0·98
∞ Kreis	entw. $0{\cdot}141\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}141\,rF^{\frac{3}{2}}$	entw. $0{\cdot}141\,aF^{\frac{3}{2}}$ oder $0{\cdot}141\,rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 1	1	1

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass von allen regelmässigen Polygonen, deren Seitenzahl gerade ist, mit Rücksicht auf die verschiedenen Lagen, die der Querschnitt haben kann, bei einem gegebenen Flächenraume und sonst gleichen Umständen das Quadrat sowohl das grösste Tragmoment, wenn nämlich die neutrale Axe mit der Quadratseite parallel läuft, als auch das kleinste Tragmoment, wenn jene Axe in eine Diagonale fällt, besitzt.

2. Ist bei einem regelmässigen Polygone die Anzahl der Seiten ungerade, so sind im Allgemeinen die Grössen h' und h'' von einander verschieden, können aber in besonderen Querschnittslagen auch gleich werden. Da der grösste Werth, welchen der Abstand h' oder h'' annehmen kann, auch in diesem Falle C ist, so leuchtet ein, dass das Minimum des Tragmomentes *Min. M* sich gleichfalls in derjenigen Querschnittslage ergeben werde, wo der Halbmesser des umge-

Fig. 148.

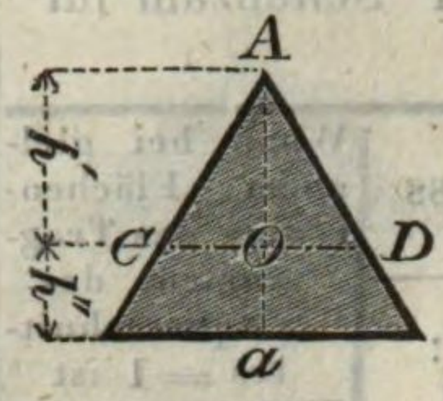
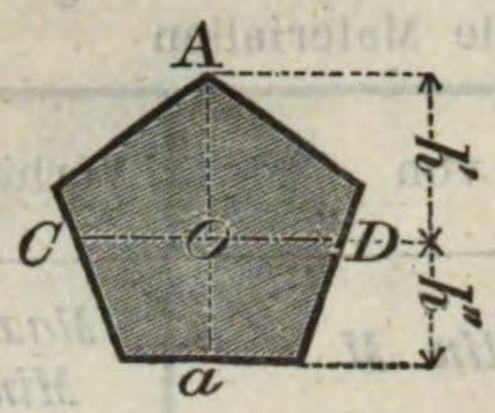


Fig. 149.



schriebenen Kreises vertical liegt. Wird dieses Minimalmoment, wie in den Figuren 148 und 149, in Folge der Ausdehnung der Fasern erschöpft, so hat man $h' = C$ und

$$Min.\,M = \frac{a\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\,a\,F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (205).$$

Dieser Fall tritt für $r > a$, also bei dem Gusseisen ein.

Fig. 150.

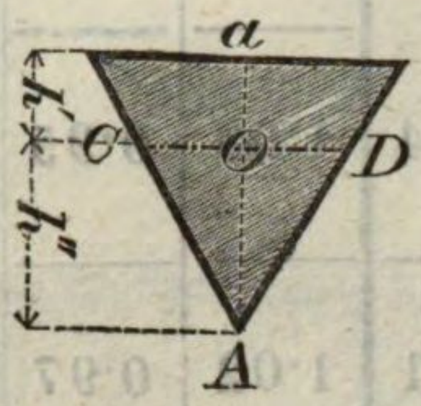
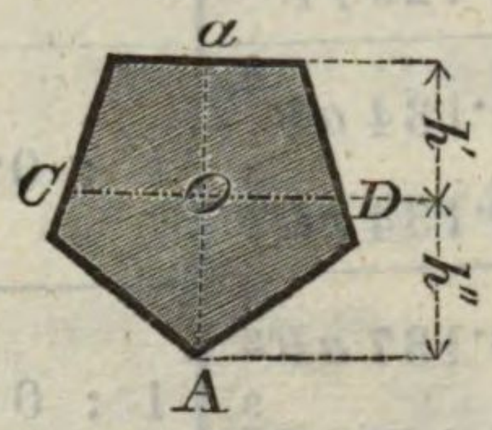


Fig. 151.



Wird hingegen das Minimalmoment, wie in den Figuren 150 und 151, in Folge der Zusammendrückung der Fasern erschöpft, so hat man $h'' = C$ und

$$Min.\,M = \frac{r\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\,r\,F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (206).$$

Dieser Fall tritt für $r < a$, also bei den Holzmaterialien ein.

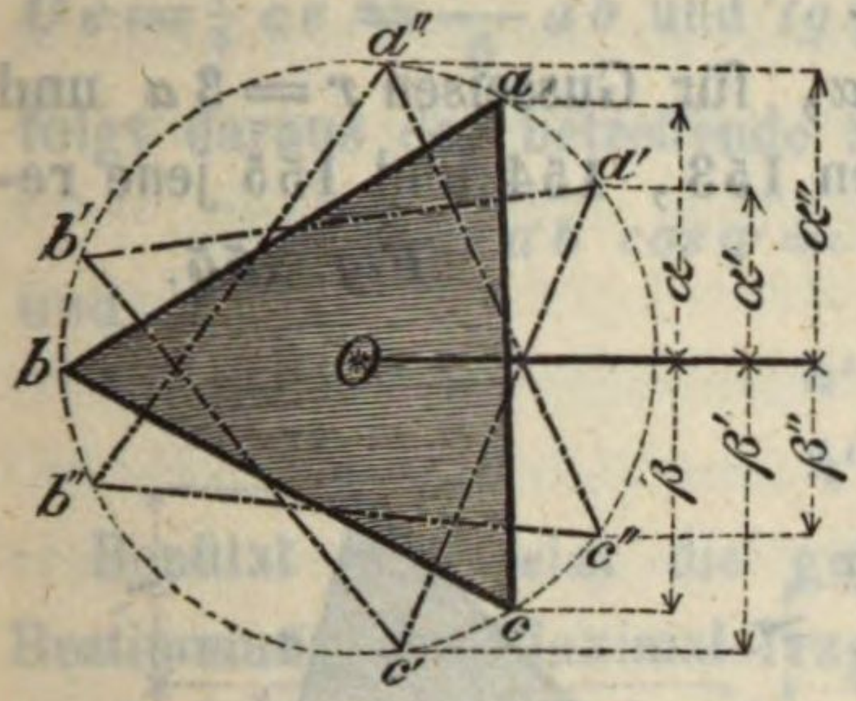
Für $r = a$ kann entweder das eine oder das andere geschehen, indem das Minimalmoment in zwei einander entgegengesetzten Stellungen zu erreichen ist. Dieser Fall wird bei dem Schmiedeeisen Anwendung finden, wenn für dasselbe in der That die Gleichheit der Grössen a und r zugelassen werden kann. Es ist sodann

$$Min.\,M = \frac{a\,T}{C} = \frac{r\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\,a\,F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) = \tfrac{1}{12}\,r\,F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) \quad (207).$$

3. Um auch das grösste Tragmoment für die regelmässigen Polygone von einer ungeraden Seitenzahl zu finden, welches nach den verschiedenen Querschnittslagen eintreten kann, erwäge man, dass dann der kleinere von den beiden Werthen $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ ein Maximum werden muss. Diess geschieht, wenn

$$\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''} \text{ oder } a : r = h' : h''$$

Fig. 152.



wird, vorausgesetzt, dass dieser Fall überhaupt möglich ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sehr bald ein. Es sei z. B. (Fig. 152) das gleichseitige Dreieck abc eben in der besonderen Lage, wo $h'=\alpha$ und $h''=\beta$ solche Werthe haben, dass $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ wird. In diesem Falle ist das Tragmoment

$$M = \frac{aT}{\alpha} = \frac{rT}{\beta}.$$

Dreht man jetzt die Figur um ihren Schwerpunct, so dass sie etwa in die Lage $a'b'c'$ kommt, so wird $h'=\alpha'$, $h''=\beta'$, also das Tragmoment

$$M' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{aT}{\alpha'} \\ \text{oder } \frac{rT}{\beta'}. \end{cases}$$

Nun ist nach der Figur $\alpha' < \alpha$ und $\beta' > \beta$, daher $\frac{aT}{\alpha'} > \frac{aT}{\alpha}$ und $\frac{rT}{\beta'} < \frac{rT}{\beta}$, ferner wegen $\frac{aT}{\alpha} = \frac{rT}{\beta}$ offenbar $\frac{rT}{\beta'} < \frac{aT}{\alpha'}$. Demgemäss hat von den Doppelwerthen für M' der zweite den kleineren Werth, und da man desshalb $M' = \frac{rT}{\beta'}$, sofort aber $M' < M$ erhält, so ist das Tragmoment in der veränderten Stellung $a'b'c'$ kleiner, als in der früheren Stellung abc.

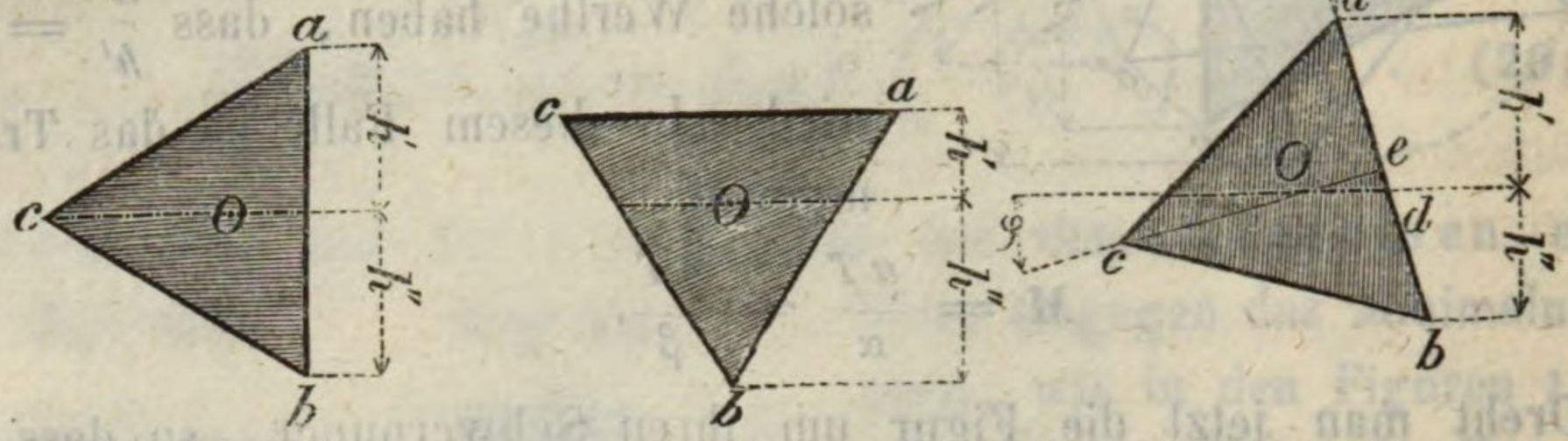
Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass eine Drehung des Querschnittes nach der anderen Seite das Tragmoment gleichfalls verkleinert. Kommt nämlich das Δabc in die Lage $a''b''c''$, so findet man das betreffende Tragmoment M'' aus der Relation $M'' = \frac{aT}{\alpha'}$, woraus wegen $\alpha'' > \alpha$ auch $M'' < M$ folgt.

Da also $M' < M > M''$ ist, und diese Relation in dem gleichen Sinne auch für die anderen regelmässigen Polygone mit ungerader Seitenzahl gilt, so unterliegt es keinem Zweifel, dass der besondere Werth von M selbst ein Maximum sein muss, wenn, wie bereits vorne

bemerkt wurde, überhaupt eine solche Polygonstellung möglich ist, in welcher $h' : h'' = a : r$ werden kann.

Wäre z. B. für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holz $r = \frac{3}{4} a$, so zeigen die Figuren 153, 154 und 155 jene re-

Fig. 153. *Fig. 154.* *Fig. 155.*



spectiven Stellungen des gleichseitigen Dreieckes, in welchen das Tragmoment ein Maximum wird. Man hat nämlich nach diesen Annahmen für Schmiedeeisen (Fig. 153) $h' = h'' = \frac{1}{2} \overline{a\,b}$, daher eine Dreiecksseite vertical und wegen $F = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{a\,b}^2$

$$h' = h'' = 0{\cdot}7598 \sqrt{F} \quad \ldots \quad (208).$$

Für Gusseisen wäre die Gleichheit der Verhältnisse $h' : h''$ und $a : r$ nicht möglich, man muss daher diejenige Stellung (Fig. 154) wählen, in welcher die genannten Verhältnisse am wenigsten von einander differiren. In dieser Stellung liegt eine Dreiecksseite horizontal und man erhält

$$h' : h'' = 1 : 2, \; h' = \tfrac{1}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{6} \overline{a\,b} \text{ und } h'' = \tfrac{2}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{a\,b},$$

daher wegen $F = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{a\,b}^2$ auch

$$\left.\begin{aligned} h' &= 0{\cdot}4387 \sqrt{F} \\ \text{und } h'' &= 0{\cdot}8774 \sqrt{F} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (209).$$

Für Holz endlich wäre die Stellung (Fig. 155) zu wählen, in welcher $h' : h'' = a : r = 4 : 3$ und demnach

$$\overline{a\,d} : \overline{b\,d} = a : r = 4 : 3, \; \overline{a\,d} = \left(\frac{a}{a+r}\right) \overline{a\,b} = \tfrac{4}{7} \overline{a\,b}$$

und $\overline{b\,d} = \left(\frac{r}{a+r}\right) \overline{a\,b} = \frac{3}{7} \overline{a\,b}$ wird. Ist noch $\overline{O\,e} \perp \overline{a\,b}$, daher

$$\overline{d\,e} = \overline{a\,d} - \overline{a\,e} = \left(\frac{a}{a+r} - \tfrac{1}{2}\right) \overline{a\,b} = \frac{a-r}{2(a+r)} \overline{a\,b} = \tfrac{1}{14} \overline{a\,b},$$

$\overline{Oe} = \frac{1}{3}\overline{ce} = \frac{\sqrt{3}}{6}\overline{ab}$ und $tg\varphi = \frac{\overline{de}}{\overline{Oe}} = \frac{(a-r)\sqrt{3}}{a+r} = \frac{\sqrt{3}}{7} = 0{\cdot}2475$, so folgt daraus der betreffende Stellungswinkel $\varphi = 13^0\,54'$,

$$h = \overline{ab}\ cos\varphi = 0\ 9708\ \overline{ab} = 1{\cdot}4752\ \sqrt{F},$$

und

$$\left.\begin{aligned} h' &= 0{\cdot}8430\ \sqrt{F} \\ h'' &= 0{\cdot}6322\ \sqrt{F} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210).$$

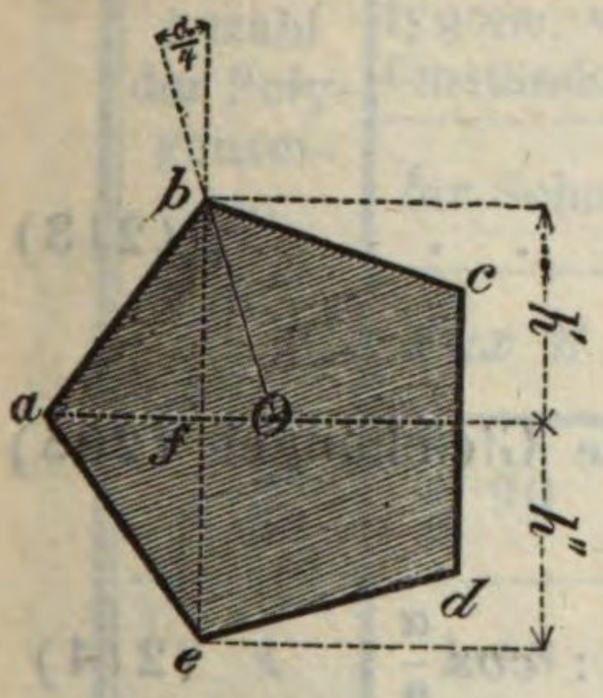
Benützt man jetzt die gefundenen Werthe von h' und h'' zur Bestimmung des Maximal-Tragmomentes für das gleichseitige Dreieck, so findet man beispielsweise

für Schmiedeeisen $Max.\ M = 0{\cdot}127\ aF^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}127\ rF^{\frac{3}{2}}$

für Gusseisen . $Max.\ M = 0{\cdot}219\ aF^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}073\ rF^{\frac{3}{2}}$

und für Holz . . $Max.\ M = 0{\cdot}114\ aF^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}152\ rF^{\frac{3}{2}}$.

Fig. 156.



Bei den anderen regelmässigen Polygonen mit ungerader Seitenzahl hat man zunächst für solche Materialien, für welche man $r = a$ setzen kann, zur Erreichung des grössten Tragmomentes stets die Stellung zu wählen, wo, wie in der Fig. 156, $h' = h''$ wird. In dieser Stellung ist immer eine grösste Diagonale $\overline{be}$ vertical, und der Winkel ebO, den der Halbmesser $\overline{bO}$ des umgeschriebenen Kreises mit jener Diagonale einschliesst, gleich $\frac{1}{4}\alpha$, wenn α den Polygonswinkel $\frac{360^0}{n}$ bedeutet. Unter diesen Umständen ist $h' = h'' = \frac{1}{2}\overline{be} = C cos\frac{\alpha}{4}$ und das grösste Tragmoment

$$Max.\ M = \frac{aT}{C cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{rT}{C cos\frac{\alpha}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad (211).$$

Indem aber nach der Gleichung (207)

$$Min.\ M = \frac{aT}{C} = \frac{rT}{C}$$

war, erhält man als gegenseitiges Verhältniss

$$Max.\ M\ :\ Min.\ M = 1\ :\ cos\frac{\alpha}{4} \quad . \quad . \quad (212),$$

also für $n = 5$ . . $1 : 0{\cdot}951$

„ „ $n = 9$ . . $1 : 0{\cdot}985$ u. s. w.

Vergleicht man die Verhältnisse (204) und (212), so bemerkt man, dass dieselben für $a = r$ verschiedene Gesetze befolgen, je nachdem die Seitenzahl n des Polygons gerade oder ungerade ist. Das Verhältniss (212) wird für Schmiedeeisen zuzulassen sein, wenn man $r = a$ annehmen kann.

Für Gusseisen und Holz ist bezüglich der regelmässigen Polygone mit ungerader Seitenzahl (abgesehen von dem gleichseitigen Dreiecke) zu bemerken, dass die vorerwähnte Bedingung $h' : h'' = a : r$ nicht mehr erreicht werden kann. In diesem Falle ist das Maximalmoment in derjenigen Querschnittslage vorhanden, wo der Abstand der bis zur Elasticitätsgränze beanspruchten Fasern (h' oder h'') $= c =$ dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises wird. In dieser Stellung liegt der genannte Halbmesser c vertical, und sie ist derjenigen Stellung (Fig. 148, 149, 150 und 151), welche dem Minimalmoment entspricht, geradezu entgegengesetzt. Es wird daher das betreffende Maximalmoment

$$\left.\begin{aligned} \text{für Gusseisen } \mathit{Max.}\ M &= \frac{a\,T}{c} \\ \text{und für Holz . . } \mathit{Max}\ M &= \frac{r\,T}{c} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

also für beide Materialien mit Rücksicht auf die Gleichungen (205) und (206)

$$\mathit{Max.}\ M : \mathit{Min.}\ M = C : c = 1 : \cos\frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad (214)$$

Dieses Verhältniss ist

für $n = 5$ . . . . . 1 : 0·809,
für $n = 9$ . . . . . 1 : 0 940,

u. s. w.

Man sieht, dass für Gusseisen und Holz jetzt dasselbe Verhältniss zwischen *Max. M* und *Min. M* wieder eintritt, wie solches in der Relation (204) allgemein für eine gerade Polygonseitenzahl aufgestellt wurde.

§. 124.

Vergleichung der Tragmomente regelmässiger Polygone bei verschiedenen Materialien in den günstigsten und ungünstigsten Querschnittslagen.

Zu einer solchen Vergleichung eignen sich die nach dem vorigen §. resultirenden Werthe für *Max. M* und *Min. M*. Ist die Seitenzahl des regelmässigen Polygones gerade, so gibt die Tabelle im vorigen §. ad 1 bereits den nöthigen Aufschluss. In diesem Falle sind die Zahlenverhältnisse von der Materialgattung unabhängig. Ist aber die Seitenzahl des Polygons ungerade, so unterliegen die Zahlenverhältnisse nach der Materialgattung einer grösseren oder geringeren Veränderung. In der nachfolgenden Tabelle sind die Maximal- und Minimalwerthe von *M* für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w., bis 12 Seiten in Theilen des Tragmomentes des Kreisquerschnittes von gleichem Flächenraume ausgedrückt, wobei für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holzmaterialien $r = \frac{3}{4} a$ beispielsweise angenommen ist.

Anzahl der Polygonseiten *n*	Maximal- und Minimal-Tragmomente der regelmässigen Polygone, wenn bei gleichem Flächenraume und sonst gleichen Umständen das Tragmoment des Kreisquerschnittes = 1 ist					
	für Schmiedeeisen		für Gusseisen		für Holz	
	Max M	*Min. M*	*Max. M*	*Min. M*	*Max. M*	*Min. M*
3	0·90	0 78	1·55	0·78	1·08	0 78
4	1·18	0·84	1·18	0·84	1·18	0 84
5	0·93	0 88	1 10	0·88	1·09	0·88
6	1·06	0·91	1·06	0·91	1·06	0·91
8	1·03	0 95	1 03	0·95	1·03	0·95
9	0·98	0 96	1·02	0·96	1·02	0·96
10	1·02	0·97	1 02	0·97	1·02	0·97
12	1·01	0·98	1·01	0·98	1·01	0·98
∞ Kreis	1	1	1	1	1	1

§. 125.

Mechanisches Widerstandsmoment von Trägern, welche regelmässige Polygone als Querschnitte besitzen. Um auch das zulässige mechanische Widerstandsmoment solcher Träger zu finden, berücksichtige man die allgemeinen Gleichungen (147) und (148). Heisst man das grösste zulässige Widerstandsmoment in einer beliebigen Querschnittslage W, die Länge des Prismas l und den Körperraum desselben K, so hat man $K = Fl$ und

$$W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{Tl}{h''^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

daher auch wegen $T = \frac{1}{12}\,(2 \quad \cos\alpha)\,F\,C^2$

$$W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{72}\,(2+\cos\alpha)\,\frac{a^2}{m}\,.\,K\,.\,\frac{C^2}{h''^2} \\ \text{oder } \frac{1}{72}\,(2+\cos\alpha)\,\frac{r^2}{m}\,.\,K\,.\,\frac{C^2}{h''^2} \end{cases} \quad . \quad . \quad (215),$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

Nach den verschiedenen Querschnittslagen, welche in Bezug auf die neutrale Axe eintreten können, werden sich auch gegenwärtig grösste und kleinste Werthe für W ergeben, deren Bestimmung auf analoge Weise, wie bei dem Tragmomente geschehen kann, zumal es einleuchtet, dass die Maximal- und Minimalwerthe für M und W in denselben Stellungen der Polygone vorhanden sein müssen.

1) Ist daher die Seitenzahl des Polygons eine **gerade**, so hat man, um *Max.* W zu erhalten, $h' = h'' = c = C\cos\frac{\alpha}{2}$, und, um *Min.* W zu erhalten, $h' = h'' = C$ zn setzen. Dieser Bemerkung gemäss erhält man

$$\textit{Min. } W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{72}\,(2+\cos\alpha)\,\frac{a^2}{m}\,K \\ \text{oder } \frac{1}{72}\,(2+\cos\alpha)\,\frac{r^2}{m}\,K \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216),$$

und

$$Max.\ W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{72}\left(\frac{2+\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{a^3}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{72}\left(\frac{2+\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{r^3}{m}K \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217),$$

also auch

$$Max.\ W : Min.\ W = 1 : \cos^2\frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (218).$$

Nach diesen Formeln ist die nachstehende Tabelle entworfen:

Anzahl der Polygon-Seiten n	Mechanisches Widerstandsmoment von prismatischen Trägern, welche regelmässige Polygone mit gerader Seitenzahl als Querschnitte besitzen, und aus einem festen elastischen Materiale bestehen.				
	Eigentlicher Werth von		Verhältniss	Wenn bei gleichem Körperraume das mech. Widerstandsmoment bezüglich des Kreisquerschnittes = 1 ist	
	Max. W	*Min.* W	*Max.* W : *Min.* W	*Max.* W	*Min.* W
4	entw. $0{\cdot}0554\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0554\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0278\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0278\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·5	1·33	0·67
6	entw. $0{\cdot}0463\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0463\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0347\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0347\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·75	1·11	0·83
8	entw. $0{\cdot}0441\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0441\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0376\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0376\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·854	1·06	0·90
10	entw. $0{\cdot}0431\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0431\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0390\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0390\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·905	1.03	0·94
12	entw. $0{\cdot}0427\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0427\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0398\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0398\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·933	1·02	0·95
∞ Kreis	entw. $0{\cdot}0417\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0417\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0417\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0417\frac{r^3}{m}K$	1 : 1	1	1

2. Bei regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl ist zur Erreichung des Minimalwerthes von W

für $r > a$, also für Gusseisen, $h' = C$,

für $r < a$, also für Holz, $h'' = C$

und für $r = a$, ... $h' = h'' = C$

zu setzen. Das letztere wird in der Regel für Schmiedeeisen gelten können. Sonach erhält man

$$\left.\begin{aligned} \text{für } r > a,\ \textit{Min. } W &= \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\,\frac{a}{m}\,K, \\ \text{für } r < a,\ \textit{Min. } W &= \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\,\frac{r^2}{m}\,K \\ \text{und für } r = a,\ \textit{Min. } W &= \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\,\frac{a^2}{m}\,K \\ \text{auch} &= \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\,\frac{r^2}{m}\,K \end{aligned}\right\} \quad (219).$$

3. Um auch *Max W* bei den regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl zu finden, hat man diejenigen Polygonstellungen zu wählen, auf welche im §. 123 ad 3 aufmerksam gemacht wurde. So erhält man z. B. bezüglich des gleichseitigen Dreieckes, mit Rücksicht auf die in den Gleichungen (208), (209) und (210) zusammengestellten Werthe von h' und h''

für Schmiedeeisen (wenn $r = a$ wäre) $\textit{Max. } W = 0{\cdot}0277\,\frac{a^2}{m}\,K$,

für Gusseisen (wenn $r = 3a$ wäre) $\textit{Max. } W = 0{\cdot}0832\,\frac{a^2}{m}\,K$ und

für Holz . . (wenn $r = \frac{3}{4}a$ wäre) $\textit{Max. } W = 0{\cdot}0520\,\frac{r^2}{m}\,K$.

Bei den übrigen regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl hat man eben so in Hinblick auf die weiteren Bemerkungen im §. 123 ad 3

$$\left.\begin{aligned} \text{für Schmiedeeisen } \textit{Max. } W &= \tfrac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{4}}, \\ \text{für Gusseisen . } \textit{Max. } W &= \tfrac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\ \text{und für Holz . . . } \textit{Max. } W &= \tfrac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (220).$$

Die Vergleichung der Relationen (219) und (220) ergibt endlich für Schmiedeeisen

$$Max.\ W : Min.\ W = 1 : cos^2 \frac{\alpha}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (221),$$

also für $n = 5$ . . 1 : 0·809,

„ „ $n = 9$ . . 1 : 0·940

u. s. w.,

für Gusseisen und Holz aber

$$Max\ W : Min.\ W = 1 : cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (222),$$

also für $n = 5$ . . 1 : 0·604,

„ „ $n = 9$ . . 1 : 0·883

u. s. w.

Man bemerkt nicht ohne Interesse, dass die Verhältnisse (218) und (221) verschiedene, die Verhältnisse (218) und (222) aber gleiche Gesetze befolgen.

§. 126.

Vergleichung der mechanischen Widerstandsmomente von prismatischen Trägern mit regelmässigen Polygonen als Querschnitte in den günstigsten und ungünstigsten Querschnittslagen. Zu einer solchen Vergleichung eignen sich die nach dem vorigen §. resultirenden Werthe für *Max. W* und *Min. W*. Ist die Seitenzahl des regelmässigen Polygones eine gerade, so gibt die Tabelle im vorigen § ad 1 bereits den nöthigen Aufschluss. In diesem Falle sind die Zahlenverhältnisse von der Materialgattung unabhängig. Ist aber die Seitenzahl des Polygons eine ungerade, so unterliegen die Zahlenverhältnisse je nach der Materialgattung einer grösseren oder geringeren Veränderung. In der nachstehenden Tabelle sind die Maximal- und Minimalwerthe von *W* für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w. bis 12 Seiten in Theilen des Widerstandsmomentes eines Cylinders von gleichem Körperraume ausgedrückt, wobei für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holzmaterialien $r = \frac{3}{4} a$ beispielsweise angenommen ist.

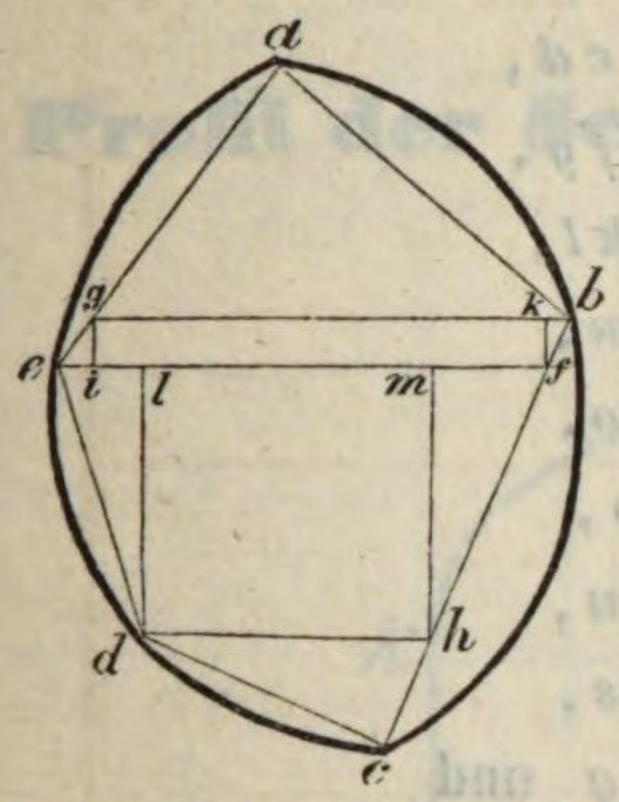
Anzahl der Polygonseiten.	Maximal- und Minimal-Werthe des mechanischen Widerstandsmomentes von prismatischen Trägern mit regelmässigen Polygonen als Querschnitte, wenn das mechanische Widerstandsmoment eines Cylinders von gleichem Körperraume = 1 ist.					
	für Schmiedeeisen		für Gusseisen		für Holz	
	Max. W	*Min. W*	*Max. W*	*Min. W*	*Max. W*	*Min. W*
3	0·67	0·50	2·00	0·50	1·25	0·50
4	1·33	0·67	1·33	0·67	1·33	0·67
5	0·85	0·77	1·27	0·77	1·27	0·77
6	1·11	0·83	1·11	0·83	1·11	0·83
8	1·06	0·90	1·06	0·90	1·06	0·90
9	0·95	0·93	1·04	0·93	1·04	0·93
10	1·03	0·94	1·03	0·94	1·03	0·94
12	1·02	0·95	1·02	0·95	1·02	0·95
∞ Kreis	1	1	1	1	1	1

§. 127.

Allgemeine Regel zur Bestimmung des Trägheitsmomentes für jeden beliebigen Querschnitt. Nach den bisherigen Erörterungen kann man für eine grosse Anzahl von Querschnitten die entsprechenden Werthe für das Trägheitsmoment bestimmen. Es erübrigt noch die ergänzenden Bemerkungen beizufügen, aus welchen eine allgemeine Regel hervorgeht, wie man in dieser Beziehung für jeden beliebigen Querschnitt zu verfahren hat. Zu diesem Behufe braucht man nur eine zweckmässige Eintheilung des Querschnittes in mehrere Theile vorzunehmen, so dass die Trägheitsmomente dieser Bestandtheile angegeben werden können. Die Art und Weise dieser Eintheilung ist aus dem Folgenden zu entnehmen: Man schneide von dem

gegebenen Querschnitte (Fig. 157) zuerst solche Segmente ab, bc, cd, de und ea ab, welche als parabolisch und symmetrisch gelten können. Sodann ziehe man durch sämmtliche Endpuncte dieser Segmente die zur neutralen Axe parallelen Geraden ef, bg und dh, endlich hierauf die Normalen gi, fk, dl und hm. Auf diese Weise bekommt man durchaus Rechtecke, Dreiecke und Segmente. Die beiden erstgenannten Figuren haben eine solche Lage, dass stets eine Seite mit der neutralen Axe parallel läuft. Nur die Segmente erscheinen in schiefen Stellungen, können aber in besonderen Fällen auch so liegen, dass entweder die Basis oder die Höhe derselben zu der neutralen Axe parallel ist. Nun sind die Trägheitsmomente der Rechtecke, Dreiecke und Segmente in den erwähnten Lagen leicht zu bestimmen, indem es nach den §§. 118 und 119 und insbesondere nach der Gleichung (191) keinem Anstande unterliegt, den Einfluss schiefer Stellungen von Segmenten gegen die neutrale Axe zu berücksichtigen. Das weitere Verfahren ergibt sich aus dem §. 114. Es versteht sich übrigens von selbst, dass in besonderen Fällen auch andere einfache Figuren als Theile des Querschnittes erscheinen können *).

Fig. 157.



Um die besprochene Methode durch ein specielles Beispiel zu versinnlichen, betrachte man den in der Fig. 158 (Seite 219) in natürlicher Grösse verzeichneten Querschnitt, welcher für die Schienen der Semmering-Eisenbahn in Anwendung gekommen ist. Es werde die Krafteinwirkung vertical und die neutrale Axe horizontal und parallel zu der Basis vw angenommen. Um das Trägheitsmoment T dieses

---

*) Dieses Verfahren ist analog mit dem, welches in der practischen Geometrie zur Berechnung des Flächenraumes einer Figur angewendet wird, und empfiehlt sich desshalb, weil die Berücksichtigung der schiefen Lage von Segmenten gegen die neutrale Axe auf eine einfache Art geschehen kann. Die Kenntniss der in den §§. 118 und 119 angegebenen Eigenschaften der symmetrischen Figuren gibt daher dem vorgeschlagenen Verfahren den eigentlichen practischen Werth, zumal man dabei keine weitläufigen Formeln und keinen besonderen mathematischen Calcul benöthigt.

Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe zu bestimmen, zerlege man die eine Hälfte desselben in folgende Theile:

1. In das Rechteck *abcd*,
2. „ „ *defg*,
3. „ „ *hikl*,
4. „ Dreieck *ilm*,
5. „ „ *eno*,
6. „ „ *ofp*,
7. „ Segment *abu*,
8. „ „ *nos*,
9. „ „ *mlq* und
10. in die Viertel-Ellipse *bhk*.

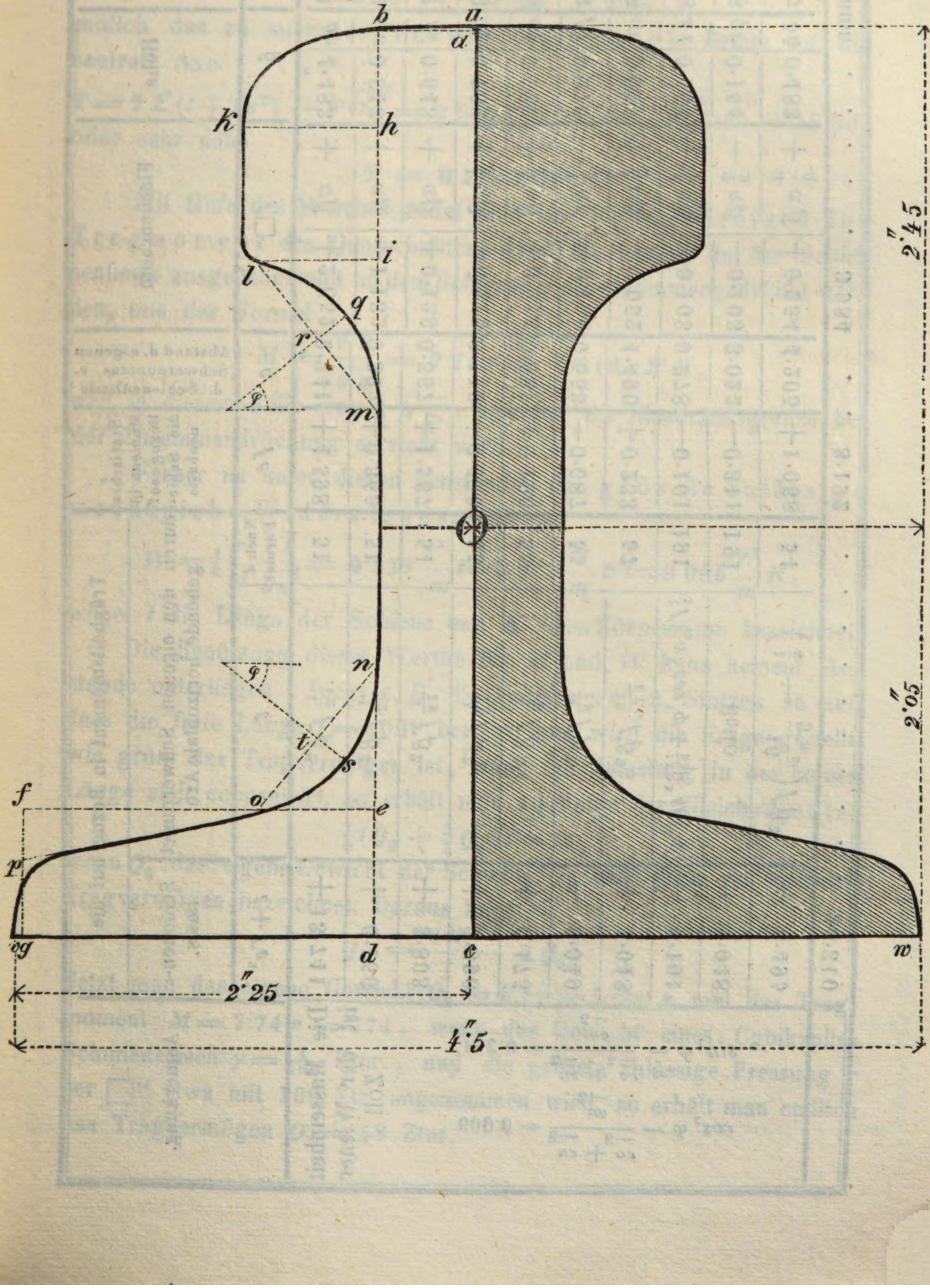
Dabei wird näherungsweise statt der krummlinigen Begränzung zwischen *o* und *v* die geradlinige *opg* substituirt, und die Abrundung nächst *l* vernachlässigt. Die Figuren, 6, 8 und 9 sind negativ zu nehmen.

Mit Rücksicht auf diese Eintheilung und mit Benützung der be-. treffenden Ausmassen wurde folgende Tabelle zu sammengestellt (S. 220)

Fig. 158.

Profil der Semmering-Eisenbahnschienen.

(Natürliche Grösse.)



Bezeichnung der Theilfigur	Grundlinie	Höhe	Flächenraum		Abstand d. eigenen Schwerpunctes v. d. Schienenbasis	Statisches Moment in Bezug auf die Schienenbasis	Trägheitsmoment in Bezug auf die			Anmerkung.
							durch den eigenen Schwerpunct gehende horizontale Axe		Schienenbasis.	
	α	β	$f\square''$		e	fe	Nach d. Formel	t	$t+fe^2$	
abcd	*cd*	0·458″	*ac*	4·483″	$+\ \alpha\beta$	+2·052	2·241″	+4·598	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+13·741	Die Masseinheit ist der Wiener Zoll
defg	*dg*	1·762	*de*	0·643	$+\ \alpha\beta$	+1·132	0·322	+0·365	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+ 0·156	
hikl	*hk*	0·667	*hi*	0·643	$+\ \alpha\beta$	+0·428	0·367	+1·567	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+ 5·803	
ilm	*il*	0·588	*im*	0·732	$+\frac{1}{2}\alpha\beta$	+0·215	3·113	+0·670	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	+ 2·090	
eno	*eo*	0·588	*en*	0·732	$+\frac{1}{2}\alpha\beta$	+0·215	0·887	+0 190	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	+ 0 175	
ofp	*of*	1·174	*fp*	0·270	$-\frac{1}{2}\alpha\beta$	−0·158	0·553	−0·087	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	− 0·049	
abu	*ab*	0·458	*au*	0·017	$+\frac{2}{3}\alpha\beta$	+0·052	4·490	+0·233	57	$\frac{12}{175}f\beta^2$	+ 1·048	
nos	*no*	0·938	*s t*	0·164	$-\frac{2}{3}\alpha\beta$	−0·103	0·978	−0·101	191	$\frac{1}{5}f[\frac{1}{4}\alpha^2 cos^2\varphi+\frac{12}{35}\beta^2 sin^2\varphi]$	− 0·101*	
mlq	*ml*	0·938	*qr*	0·164	$-\frac{2}{3}\alpha\beta$	−0·103	3·022	−0·311	191	detto	− 1·048*	
bhk	*hk*	0·667	*bh*	0·483	$+\frac{\pi}{4}\alpha\beta$	+0·254	4·205	+1·068	54	$\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)f\beta^2$	+ 4·495	
Summa						3·984		8·192		. . . . .	26·310	

* $sin^2\varphi = \frac{-2}{eo} = 0{\cdot}391$ $\quad \frac{-2}{eo+en}$ $\quad cos^2\varphi = \frac{-2}{en} = 0{\cdot}609$ $\quad \frac{-2}{eo+en}$

Sonach ist der Flächenraum $F = 2\,\Sigma f = 7{\cdot}97\,\square''$, die Entfernung des Schwerpunctes O von der Schienenbasis

$$\overline{Oc} = \frac{\Sigma fe}{\Sigma f} = \frac{8{\cdot}192}{3{\cdot}984} = 2{\cdot}05'',$$

und wenn H die ganze Schienenhöhe vorstellt, wegen $H = 4{\cdot}5''$

$$\overline{Ou} = H - \overline{Oc} = 2{\cdot}45'',$$

endlich das zu suchende Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe

$$T = 2\,\Sigma(t + fe^2) - F\,\overline{Oc}^2 = 2 \times 26{\cdot}310 - 7{\cdot}97 \times \overline{2{\cdot}05}^2 = 18{\cdot}96,$$

oder sehr nahe

$$T = 0{\cdot}118\,FH^2.$$

Mit Hilfe des Werthes findet man für Schmiedeeisen das Tragmoment des Querschnittes, wenn die Fasern an der Schienenbasis ausgedehnt und an dem Schienenkopfe zusammengedrückt werden, aus der Formel

$$M = \frac{r\,T}{\overline{Ou}} = 7{\cdot}74\,r = 0{\cdot}216\,rFH,$$

weil in diesem Falle wegen $a \gtreqless r$ offenbar die Elasticitätsgränze bei der Zusammendrückung erreicht wird.

Ferner ist unter diesen Umständen das grösste zulässige mechaniche Widerstandsmoment

$$W = \tfrac{1}{6}\,\frac{r^3}{m}\,\frac{Tl}{\overline{Ou}^2} = 0{\cdot}527\,\frac{r^3}{m}\,l = 0{\cdot}066\,\frac{r^2}{m}\,Fl = 0{\cdot}066\,\frac{r^2}{m}\,K,$$

wobei l die Längə der Schiene und K ihren Körperraum bezeichnet.

Die Benützung dieser Werthe für M nnd W kann keinem Anstande unterliegen. Liegt z. B. die Schiene auf 2 Stützen so auf, dass die freie Länge $l = 100''$ beträgt, und wird die Frage gestellt, wie gross das Tragvermögen ist, wenn die Belastung in der halben Länge sich concentrirt, so erhält man zu Folge der Gleichung (113)

$$\tfrac{1}{4}(Q_3 + \tfrac{1}{2}\,Q_4)\,l = M,$$

wenn Q_3 das eigene Gewicht der Schiene, Q_4 aber jenes zu suchende Tragvermögen bezeichnet. Daraus folgt

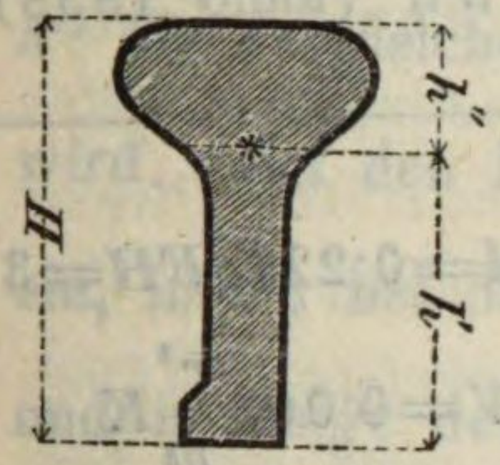
$$Q_4 = \frac{8\,M}{l} - 2\,Q_3.$$

Setzt man das eigene Gewicht $Q_3 = Fl\gamma = 2$ Ztnr., und das Tragmoment $M = 7{\cdot}74\,r = 774$, wenn das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeisen $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztnr., und die grösste zulässige Pressung r per $\square''$ etwa mit 100 Ztr. angenommen wird, so erhält man endlich das Tragvermögen $Q_4 = 58$ Ztnr.

§. 128.

Vergleichung des Widerstandes verschiedener Eisenbahnschienen. Nachstehende Zusammenstellung enthält für die Querschnittsformen von Schienen bei mehreren ausgeführten Eisenbahnen die entsprechenden Werthe des Trägheitsmomentes (T), des Tragmomentes (M) und des grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomentes (W). Dabei ist die neutrale Axe parallel zur Schienenbasis, die Ausdehnung in den unteren und die Zusammendrückung in den oberen Fasern angenommen, ferner sind die Werthe der obigen Momente auf Schmiedeeisen bezogen und für dieses die Elasticitätsgränzwerthe bezüglich der Spannungen und Pressungen mit a und r bezeichnet.

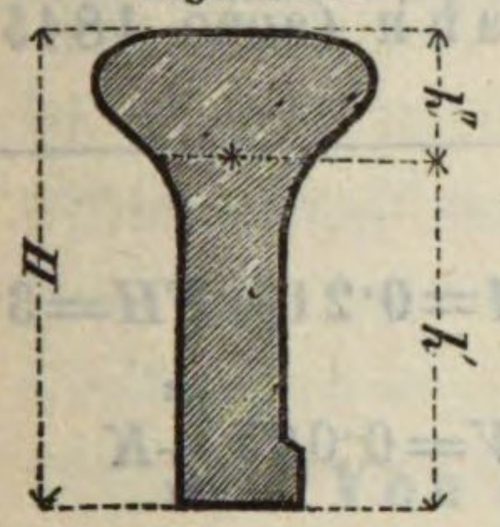
Fig. 159.



Kaiser-Ferdinands-Nordbahn (anno 1836).

$h = 2{\cdot}159''$ $h'' = 1{\cdot}403$ $H = 3{\cdot}562$ $F = 3{\cdot}57\,\square''$	$T = 0{\cdot}099\,FH^2$ $= 4{\cdot}48$	$M = 0\ 164\,aFH = 2{\cdot}08\,a$ $W = 0{\cdot}045\,\frac{a^2}{m}K$

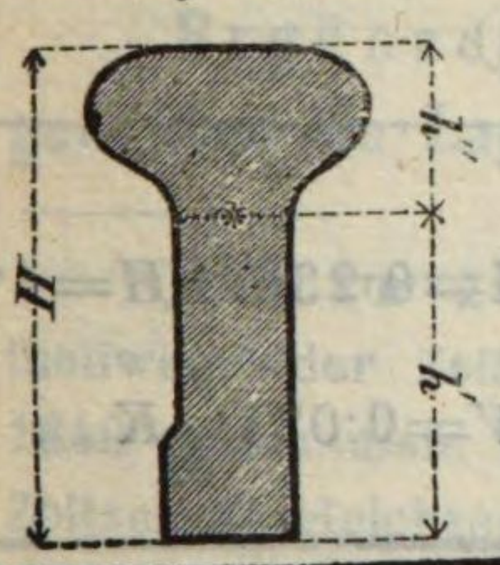
Fig. 160.



Mailand-Monza-Bahn (anno 1837).

$h' = 2{\cdot}463''$ $h'' = 1{\cdot}537$ $H = 4\ 000$ $F = 4{\cdot}39\,\square''$	$T = 0\ 092\,FH^2$ $= 6{\cdot}46$	$M = 0\ 150\,aFH = 2{\cdot}62\,a$ $W = 0{\cdot}040\,\frac{a^2}{m}K$

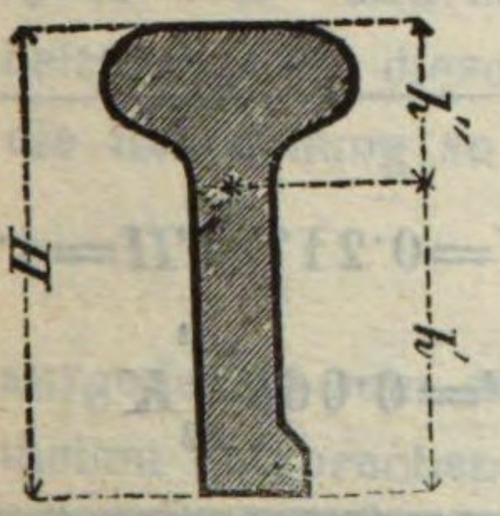
Fig. 161.



Lomb.-Venetian.-Bahn (anno 1839).

$h' = 2{\cdot}486''$ $h'' = 1{\cdot}764$ $H = 4{\cdot}250$ $F = 4{\cdot}71\,\square''$	$T = 0\ 097\,FH^2$ $= 8{\cdot}24$	$M = 0{\cdot}166\,aFH = 3{\cdot}32\,a$ $W = 0{\cdot}047\,\frac{a^2}{m}K$

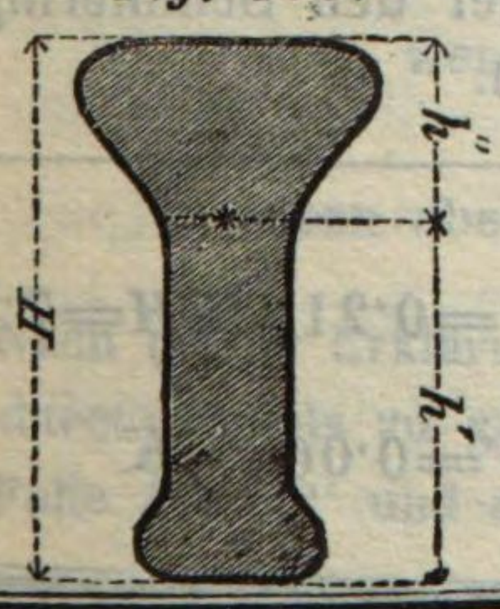
Fig. 162.



K. k österr. Staatsbahn (anno 1842).

$h' = 2{\cdot}250''$ $h'' = 1{\cdot}500$ $H = 3{\cdot}750$ $F = 3\ 87\,\square''$	$T = 0{\cdot}098\,FH^2$ $= 5{\cdot}32$	$M = 0{\cdot}164\,FH = 2{\cdot}37\,a$ $W = 0{\cdot}046\,\frac{a^2}{m}K$

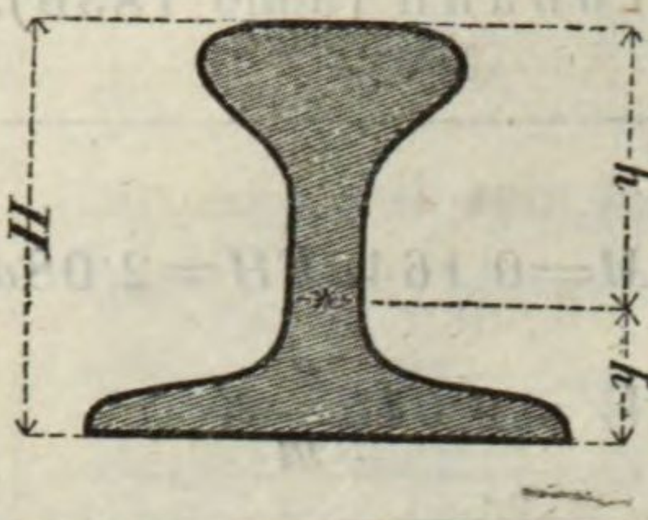
Fig. 163.



Monza-Como-Bahn (anno 1846).

$h' = 2{\cdot}670''$ $h'' = 1{\cdot}692$ $H = 4{\cdot}362$ $F = 4{\cdot}49\,\square''$	$T = 0{\cdot}102\,FH^2$ $= 8{\cdot}71$	$M = 0{\cdot}167\,aFH = 3{\cdot}27\,a$ $W = 0{\cdot}045\,\frac{a}{m}K$

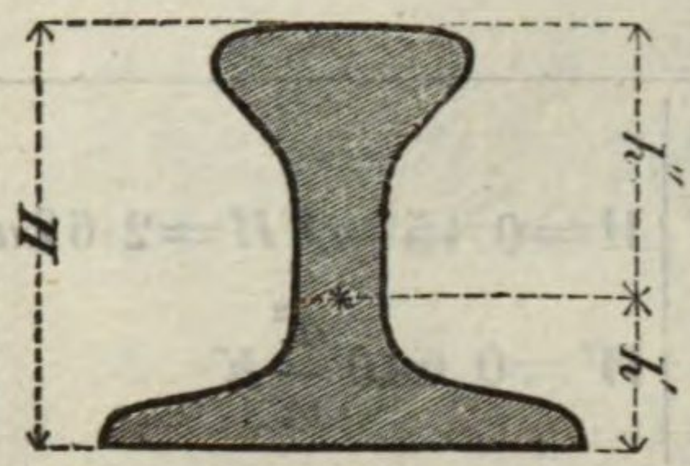
Fig. 164.



Wien-Gloggnitzer-Bahn (anno 1838).

$h' = 1{\cdot}495''$ $h'' = 1{\cdot}880$ $H = 3\ 375$ $F = 4{\cdot}76\square''$	$T = 0{\cdot}128FH^2$ $= 6{\cdot}93$	$M = 0{\cdot}229rFH = 3\ 69r$ $W = 0{\cdot}069\ \frac{r^2}{m}K$

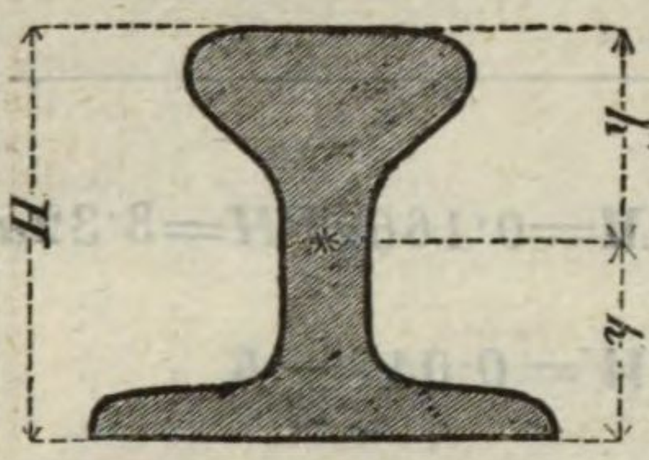
Fig. 165.



Ungarische Centralbahn (anno 1845).

$h' = 1{\cdot}535''$ $h'' = 1{\cdot}965$ $H = 3{\cdot}500$ $F = 4{\cdot}89\square''$	$T = 0{\cdot}123FH^2$ $= 7{\cdot}37$	$M = 0{\cdot}219rFH = 3{\cdot}75r$ $W = 0{\cdot}065\ \frac{r^2}{m}K$

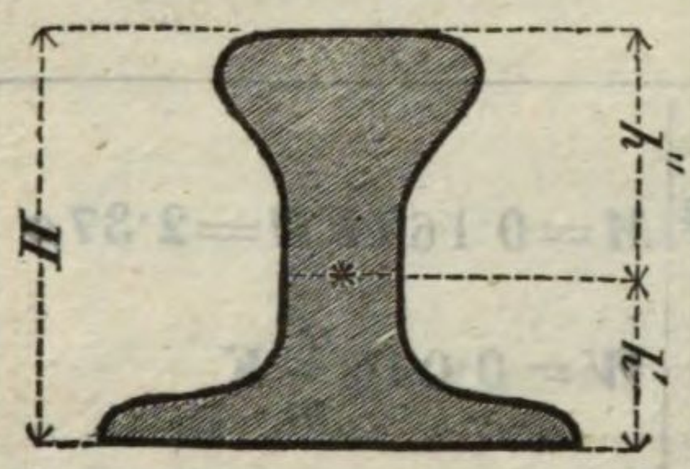
Fig. 166.



K. k. österr. Staatsbahn (Ausweichbahnen) (anno 1843).

$h' = 1{\cdot}596''$ $h'' = 1{\cdot}779$ $H = 3{\cdot}375$ $F = 5{\cdot}05\square''$	$T = 0{\cdot}125FH^2$ $= 7{\cdot}19$	$M = 0{\cdot}238rFH = 4{\cdot}04r$ $W = 0{\cdot}071\ \frac{r^2}{m}K$

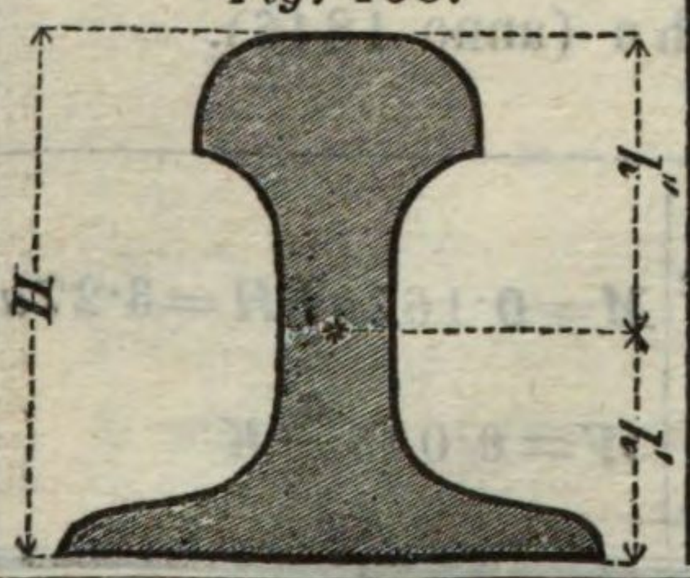
Fig. 167.



K. k. österr. Staatsbahn (anno 1847).

$h' = 1{\cdot}582''$ $h'' = 1{\cdot}918$ $H = 3{\cdot}500$ $F = 5{\cdot}56\square''$	$T = 0{\cdot}119FH^2$ $= 7{\cdot}95$	$M = 0{\cdot}217rFH = 4{\cdot}15r$ $W = 0{\cdot}065\ \frac{r^2}{m}K$

Fig. 168.



K. k. öst. Staatsbahn über den Semmering (anno 1852).

$h' = 2{\cdot}050''$ $h'' = 2{\cdot}450$ $H = 4{\cdot}500$ $F = 7{\cdot}97\square''$	$T = 0{\cdot}118FH^2$ $= 19{\cdot}0$	$M = 0{\cdot}216rFH = 7{\cdot}74r$ $W = 0{\cdot}066\ \frac{r^2}{m}K$

Bei den ersten fünf Querschnitten ist die Erreichung der Elasticitätsgränze in den gespanntesten Fasern anzunehmen, weil hierbei h'' im Vergleiche zu h' so klein ist, dass in der Regel $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$ sein wird. Bei den letzten fünf Querschnitten tritt aber das Umgekehrte ein, indem bei diesen wegen $h'' > h'$ und $a > r$ offenbar $\frac{r}{h''} < \frac{a}{h'}$ und in Folge dessen die Elasticitätsgränze zuerst in den gepressten Fasern erreicht wird. Die zusammengestellten Zahlenwerthe geben Anlass zu interessanten Vergleichungen*).

Zweites Kapitel.

Von dem gefährlichen Querschnitte.

§. 124.

Ergänzende Bemerkungen zum §. 75. Die Erörterungen über die Lage des gefährlichen Querschnittes im §. 75 beschrän-

*) Die zur Zusammenstellung obiger Tabelle nöthigen Angaben sind theilweise der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1849 entnommen. Es wird bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass die in jener Zeitschrift gleichzeitig gelieferte Berechnung des Tragvermögens principiell unrichtig ist. Es werden nämlich daselbst zuerst die beiden Querschnittstheile ober- und unterhalb der neutralen Axe separat behandelt, die Trägheitsmomente dieser Theile in Bezug auf die neutrale Axe bestimmt, und die Berechnung so durchgeführt, dass das Tragmoment durch die Formel

$$M = a\left(\frac{t'}{h} + \frac{t''}{h''}\right)$$

ausgedrückt sein würde, wenn t' und t'' die den erwähnten Querschnittstheilen entsprechenden Trägheitsmomente vorstellen. Es ist aber $T = t' + t''$ daher auch das wahre Tragmoment,

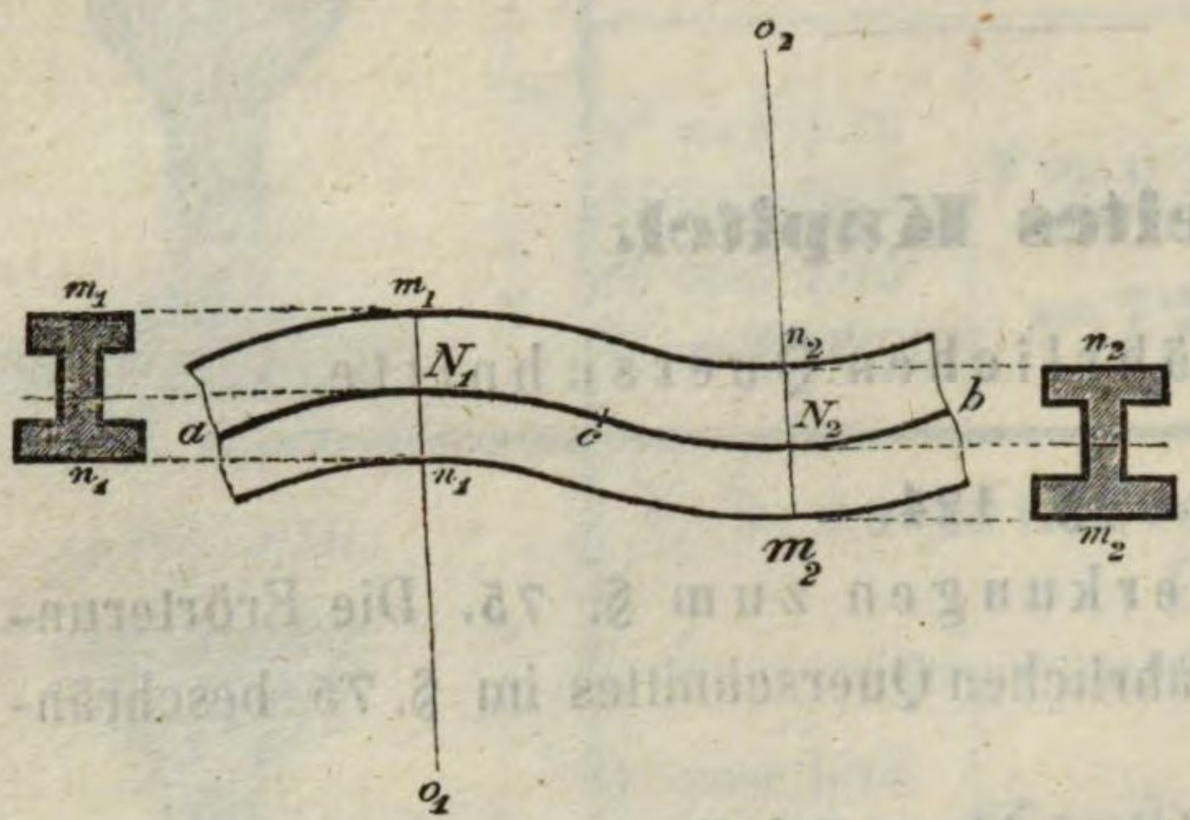
$$\text{wenn } \frac{a}{h'} < \frac{r}{h''} \text{ ist, .. } M = \frac{aT}{h} = \frac{a(t' + t'')}{h'},$$

$$\text{wenn aber } \frac{r}{h''} < \frac{a}{h'} \text{ ist, .. } M = \frac{rT}{h''} = \frac{r(t' + t')}{h''}.$$

Nach dieser Erklärung bemerkt man, dass die erwähnte Berechnungsweise durchgehends zu grosse Resultate geben müsse und nur in dem einzigen Falle $h' = h''$ und $a = r$ richtig wäre.

ken sich auf solche Fälle, wo die Biegungscurve keinen Wendepunct besitzt. Unter dieser Beschränkung hat man dort gesehen, dass der gefährliche Querschnitt an jener Stelle des Prismas anzunehmen ist, wo das statische Moment der einwirkenden Kräfte ($R\varkappa$) ein numerisches Maximum wird. Diese Regel genügt jedoch nicht mehr, wenn die erwähnte Beschränkung aufhört, und die Biegungscurve entweder einen oder mehrere Wendepuncte besitzt. Bekanntlich ist der Werth von $R\varkappa$ an solchen Wendepuncten $= 0$ und geht aus dem Positiven in das Negative über. Es sei sofort zur weiteren Untersuchung (Fig. 169) ein Träger von Kräften in Anspruch genommen, welche normal auf seine Längenaxe wirken, und es bestehe die Biegungscurve $\overset{\frown}{a\,b}$ aus den zwei entgegengesetzt gekrümmten Theilen $\overset{\frown}{a\,c}$ und $\overset{\frown}{b\,c}$, welche sich in dem Wendepuncte c vereinigen. In diesem Falle wird es in jedem der beiden Theile des Prismas eine schwächste Stelle geben. Es sind nämlich bezüglich des ersten Theiles $\overset{\frown}{a\,c}$ die statischen Kraftmomente $R\varkappa$ positiv, und die schwächste Stelle ist in jenem Querschnitte $m_1\,n_1$ vorhanden, für welchen das Kraftmoment den grössten numerischen Werth $R_1\varkappa_1$ annimmt. Hätte man es daher bloss mit diesem Theile des Prismas zu thun, so wäre offenbar $m_1\,n_1$ als der gefährliche Querschnitt selbst anzusehen. Bezüglich des andern Theiles $\overset{\frown}{b\,c}$ hingegen sind die statischen Kraftmomente negativ, und es ist gleichfalls eine schwächste Stelle, nämlich in jenem Querschnitte $m_2\,n_2$ vorhanden, wofür das Kraftmoment, abgesehen von dem negativen Zeichen, den grössten numerischen Werth $R_2\varkappa_2$ hat. Hätte man es daher nur mit dem Theile $\overset{\frown}{b\,c}$ des Prismas zu thun, so wäre $m_2\,n_2$ als der gefährliche Querschnitt anzusehen. Es leuchtet ein, dass in der That, wo beide Theile $\overset{\frown}{a\,c}$ und $\overset{\frown}{b\,c}$ gleichzeitig in Betracht gezogen werden müssen, der gefährliche Querschnitt entweder in $m_1\,n_1$

Fig. 169.



oder in $m_2 n_2$ oder auch an beiden Orten zugleich liegen kann, und es erübrigt nur mehr zu entscheiden, ob das Eine oder das Andere eintritt. Zu diesem Behufe heisse man das Tragmoment des Querschnittes $m_1 n_1$, in welcher Stellung die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, ... M_1, und eben so das Tragmoment des Querschnittes $m_2 n_2$, in welcher Stellung gerade umgekehrt die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, ... M_2, und beachte Folgendes:

1. Ist der gefährliche Querschnitt in $m_1 n_1$ allein vorhanden, so muss das Kraftmoment daselbst gleich dem Tragmomente, also $M_1 = R_1 \varkappa_1$ sein. Da diessfalls in dem Querschnitte $m_2 n_2$ die Elasticitätsgränze noch nicht erreicht wird, und daher der numerische Werth des Kraftmomentes $R_2 \varkappa_2$ das Tragmoment des Querschnittes M_2 noch nicht erschöpfen kann, so muss ausserdem $M_2 > R_2 \varkappa_2$ sein. Man erhält sonach die Bedingung

$$M_1 : M_2 < R_1 \varkappa_1 : R_2 \varkappa_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (223).$$

2. Ist der gefährliche Querschnitt in $m_2 n_2$ allein vorhanden, so bekommt man analog, wie ad 1,

$M_1 > R_1 \varkappa_1$ und $M_2 = R_2 \varkappa_2$, daher in diesem Falle die Bedingung

$$M_1 : M_2 > R_1 \varkappa_1 : R_2 \varkappa_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (224).$$

3. Ist endlich der gefährliche Querschnitt in $m_1 n_1$ und in $m_2 n_2$ zugleich vorhanden, d. h. wird die Elasticitätsgränze in diesen beiden Querschnitten gleichzeitig erreicht, so hat man offenbar

$M_1 = R_1 \varkappa_1$ und $M_2 = R_2 \varkappa_2$, daher in diesem Falle die Bedingungsgleichung

$$M_1 : M_2 = R_1 \varkappa_1 : R_2 \varkappa_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (225).$$

Um daher die Lage des gefährlichen Querschnittes aufzufinden, ist nur das Verhältniss $R_1 \varkappa_1 : R_2 \varkappa_2$ mit dem Verhältnisse $M_1 : M_2$ zu vergleichen. Hierbei ist es übrigens nicht nothwendig, die absoluten Werthe der betreffenden Verhältnissglieder zu kennen. So wird man z. B. das Verhältniss der beiden Tragmomente $M_1 : M_2$ nach dem §. 81 finden können, wenn man berücksichtigt, dass diese Tragmomente mit entgegengesetzten Querschnittslagen correspondiren. Das

Tragmoment M_2 entspricht nämlich auch dem Querschnitte in $m_1 n_1$, wenn man denselben in die umgekehrte Lage bringt.

Was das Verhältniss $R_1 z_1 : R_2 z_2$ betrifft, so kann der diesem gleiche Werth $\frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2}$ oder $\varrho_2 : \varrho_1$ substituirt werden, wenn man die Krümmungshalbmesser an den betreffenden Stellen, nämlich $N_1 o_1 = \varrho_1$ und $N_2 o_2 = \varrho_2$ zu kennen in der Lage ist, und sich erinnert, dass in Gemässheit der Gleichung (46) das statische Kraftmoment mit dem reciproken Werthe des dazu gehörigen Krümmungshalbmessers der Längenaxe zu- und abnimmt.

In der Figur 169 ist zwar nur von Einem Wendepuncte der Biegungscurve die Rede gewesen. Die Behandlung bleibt jedoch dieselbe, wenn auch mehrere Wendepuncte vorhanden sind. Es bezeichnet nämlich stets $R_1 z_1$ den grössten numerischen Werth von allen positiven, und $R_2 z_2$ den grössten numerischen Werth von allen negativen Kraftmomenten. In solchen Fällen kann der gefährliche Querschnitt auch an mehr als 2 Stellen der Längenaxe vorhanden sein.

§. 125.

Besondere Regeln für die Lage des gefährlichen Querschnittes.

1. Ist $a = r$, so ist nach dem §. 81 $M_1 = M_2$, daher von den beiden Werthen $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$ der grössere massgebend. In diesem Falle liegt der gefährliche Querschnitt an jener Stelle, wo das Kraftmoment überhaupt den grössten numerischen Werth annimmt. Diese Regel ist unabhängig von der Querschnittsform, und kann z. B. für Schmiedeeisen angewendet werden, wenn die Grössen a und r als gleich gelten können*).

2. Liegt der Schwerpunct des Querschnittes in der halben Höhe, oder ist $h' = h''$, so hat man nach dem §. 81 gleichfalls $M_1 = M_2$. Auch in diesem Falle ist der grössere von den beiden Werthen $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$ entscheidend. Diese Regel ist unabhängig von der Materialgattung.

---

*) Da Navier allgemein $a = r$ voraussetzt, so ist nach seiner Lehre diese besondere Regel als eine allgemeine bezeichnet.

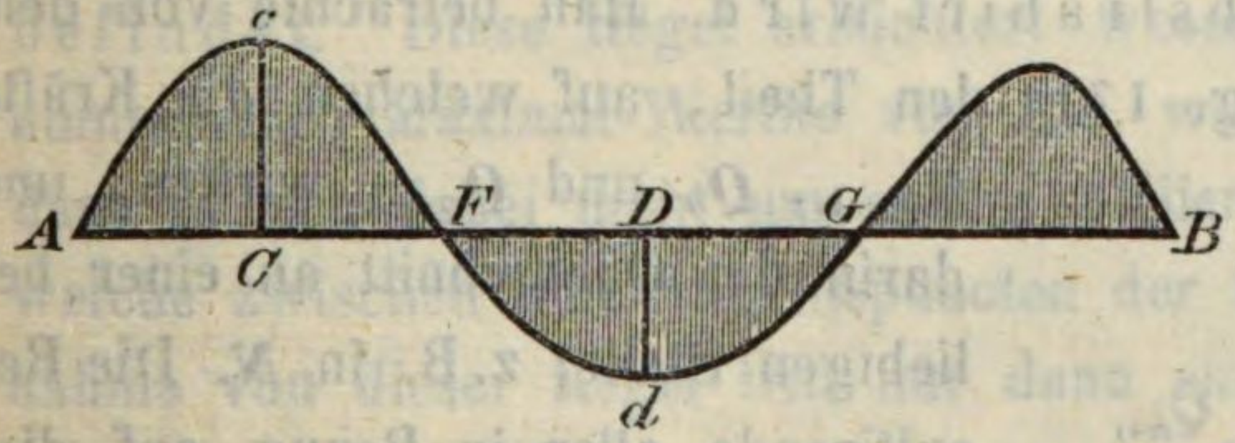
3. Ist $R_1 z_1 = R_2 z_2$ oder, was dasselbe bedeutet, $\varrho_1 = \varrho_2$, so gehört offenbar der kleinere Werth von den beiden Tragmomenten M_1 und M_2 zu dem gefährlichen Querschnitte.

4. Im Allgemeinen hängt die Lage des gefährlichen Querschnittes von der Querschnittsform, von der Art und Intensität der einwirkenden Kräfte und von der Materialgattung ab, aus welcher das Prisma besteht.

§. 126.

Graphische Darstellung zur Beurtheilung der Lage des gefährlichen Querschnittes. Die Werthe für die statischen Kraftmomente Rz sind mit der örtlichen Lage des betreffenden Querschnittes veränderlich. Betrachtet man diese Werthe als Ordinaten einer Curve, welche in den dazu gehörigen Puncten der Längenaxe normal auf diese letztere errichtet werden, und verzeichnet man diese Curve (Fig. 170), so erlangt man Kenntniss von der Form und Lage derselben ($AcdB$) in Bezug auf die Längenaxe AB. Da die reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser der Biegungscurve mit den satischen Kraftmomenten zu- und abnehmen, so leuchtet ein, dass die Ordinaten jener Curve $AcdB$ zugleich die gedachten reciproken Werthe repräsentiren können. Man bemerkt, dass die angeregte graphische Darstellung dieselbe ist, welche schon im ersten Hauptstücke für die dort betrachteten vier einfachsten Fälle in den §§. 60, 62, 64 und 66 mit Bezug auf die Figuren 55, 58, 63 und 68 besprochen wurde. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die positiven Ordinaten jener Curve nach abwärts und die negativen nach aufwärts aufzutragen, und an den Durchschnittspuncten der Curve mit der Längenaxe die Wendepuncte (F, G) der Biegungscurve vorhanden sind. Die beiden grössten Ordinaten unterhalb und oberhalb der Längenaxe, also beispielsweise Dd und Cc repräsentiren nunmehr die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente ($R_1 z_1$ und $R_2 z_2$).

Fig. 170.



Es muss daher in Gemässheit des §. 124 an einer

dieser Stellen der Längenaxe, wo jene Maximalwerthe vorhanden sind, also entweder in *D* oder in *C*, oder auch an beiden Stellen zugleich der gefährliche Querschnitt liegen.

Eine derartige graphische Darstellung führt nicht nur zur Kenntniss des Ortes oder der Orte, wo der gefährliche Querschnitt liegt, sondern dieselbe ist auch insoferne nützlich, als man dadurch von der Grösse der Ordinaten (als Repräsentanten der statischen Kraftmomente, so wie der reciproken Krümmungshalbmesser der Biegungscurve) einerseits auf die Anspruchsnahme des Trägers in den verschiedenen Querschnitten, anderseits auf die Gestalt der Biegungscurve schliessen kann.

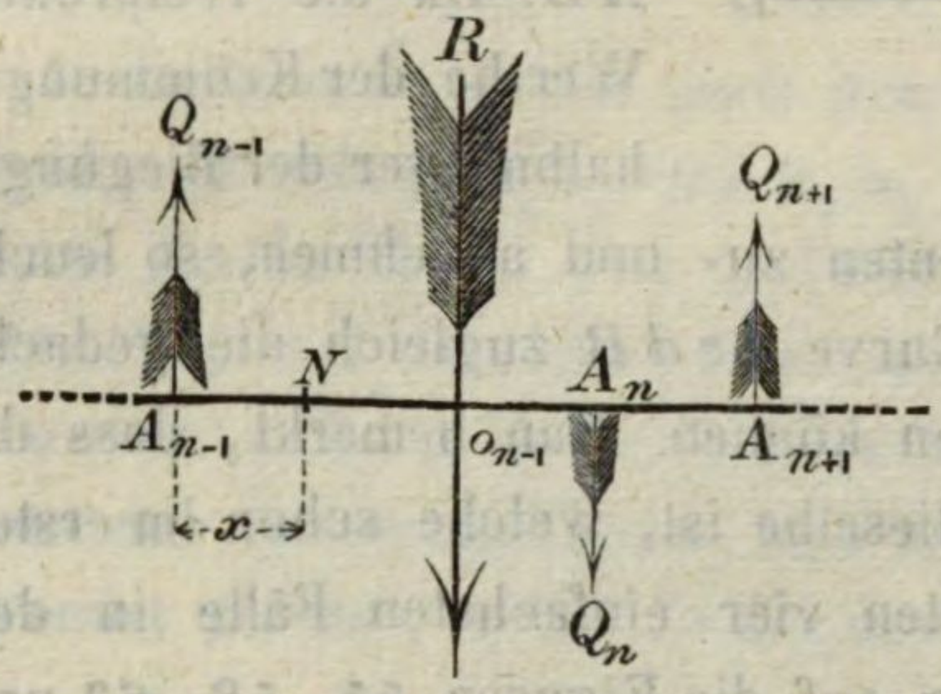
§. 127.

Lage des gefährlichen Querschnittes in dem Falle, wenn mehrere Kräfte normal auf die Längenaxe des Trägers wirken, und von dem eigenen Gewichte desselben abstrahirt wird. Man betrachte von dem prismatischen Träger (Fig. 171) den Theil, auf welchen die Kräfte Q_{n-1}, Q_n und Q_{n+1} wirken, und darin den Querschnitt an einer beliebigen Stelle, z. B. in *N*. Die Resultirende aller in Bezug auf diesen Querschnitt einwirkenden Kräfte ist nach der Gleichung (27)

$$R = \Sigma Q_N - \Sigma Q_{n-1},$$

wenn, wie dort, *N* die Anzahl der sämmtlichen Kräfte bezeichnet. Ferner ist der Hebelsarm dieser Resultirenden

Fig. 171.



$$z = \overline{N o_{n-1}} = \overline{A_{n-1} o_{n-1}} - x,$$

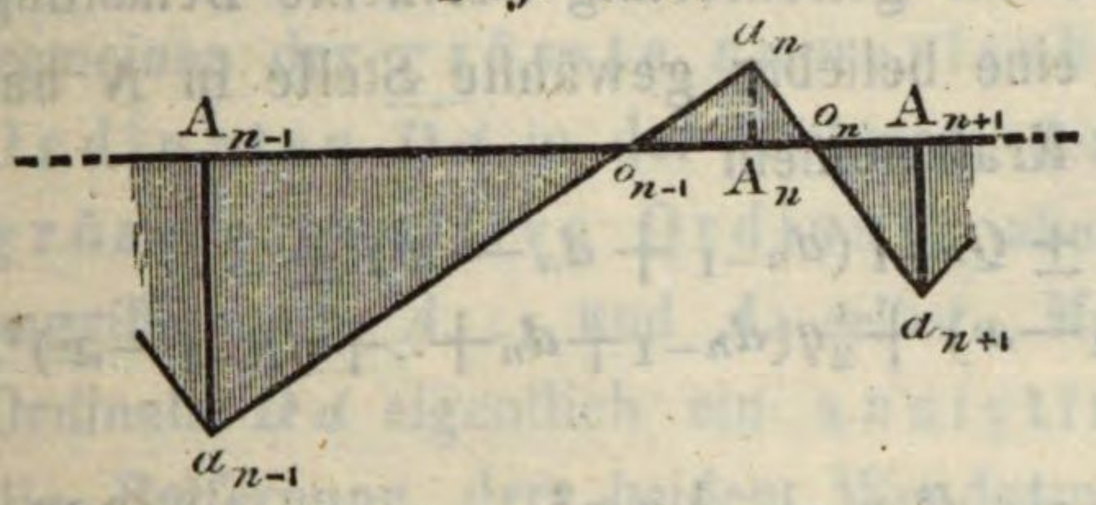
wenn $\overline{A_{n-1} N} = x$ gesetzt wird. Die Resultirende bleibt offenbar constant, so lange die Stelle *N* zwischen A_{n-1} und A_n fällt, während x variabel ist. Das statische Kraftmoment geht jetzt über in die Gleichung

$$Rz = R\left[\overline{A_{n-1} o_{n-1}} - x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226).$$

Nachdem diese Gleichung in Bezug auf x vom ersten Grade

ist, so repräsentirt die im vorigen §. erwähnte Curve, für welche x die Abscissen und die Werthe von Rz die Ordinaten sind, zwischen A_{n-1} und A_n eine gerade Linie. Was aber bezüglich der Strecke $A_{n-1}A_n$ gefunden wurde, gilt offenbar der Hauptsache nach bezüglich jeder andern Strecke zwischen zwei Kraftangriffspuncten. Hieraus folgt, dass die Begränzung aller Ordinaten, welche in den verschiedenen Strecken der Längenaxe als Repräsentanten der statischen Kraftmomente vorkommen, eine aus Geraden zusammengesetzte gebrochene Linie $a_{n+1}a_n a_{n-1}\ldots$ (Fig. 172) bildet, und der grösste numerische Werth für die positiven und für die negativen Ordinaten, also auch der gefährliche Querschnitt nur an einer solchen Stelle vorhanden sein kann, wo ein Kraftangriffspunct sich befindet. Diese Regel erleichtert wesentlich die Aufsuchung der numerischen Maximal-Werthe von Rz, weil man im Vorhinein weiss, dass es sich dabei nicht um solche Stellen der Längenaxe handelt, welche zwischen den Angriffspuncten der Kräfte liegen. Eine Ausnahme von dieser Regel tritt nur dann ein, wenn für den gefährlichen Querschnitt $R=o$ und $z=\infty$ wird. Auf diesen Fall wurde bereits im §. 49 ad 2 und im §. 52 ad 4 mit dem Beisatze aufmerksam gemacht, dass sodann in der ganzen Strecke, für welche $R=o$ ist, das Kraftmoment Rz constant, und die Biegungscurve ein Kreisbogen wird. In diesem Falle bleibt die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt, und derselbe kann an jeder Stelle der kreisförmigen Längenaxe angenommen werden, wenn von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird.

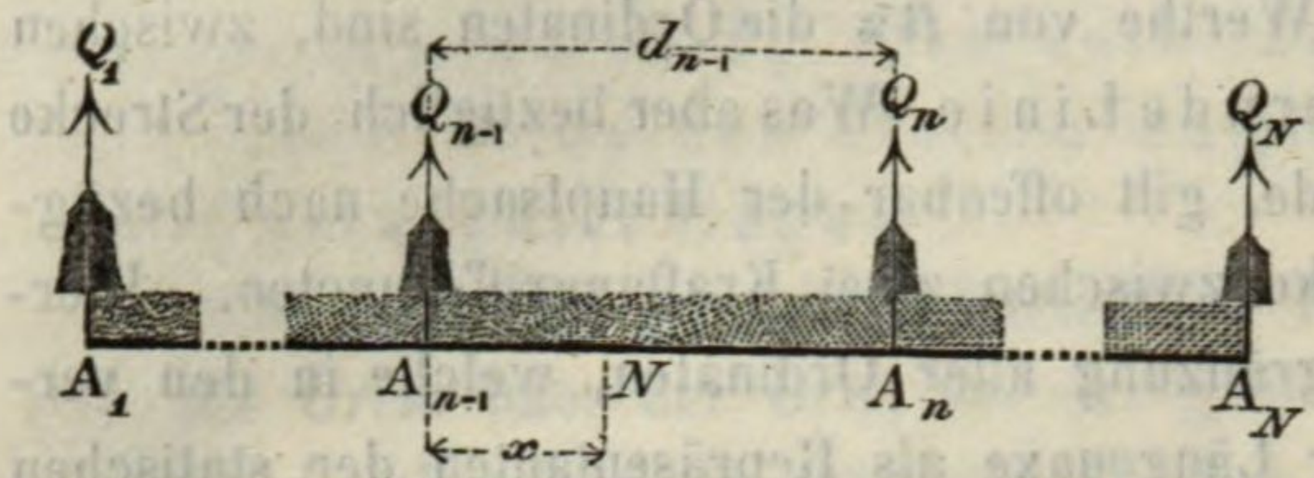
Fig. 172.



§. 128.

Lage des gefährlichen Querschnittes in dem Falle, wenn ausser einzelnen Kräften auch eine gleichförmig vertheilte Belastung der Länge nach vorhanden ist. Dieser Fall ist in der Fig. 173 anschaulich gemacht. Man

Fig. 173.



nehme analog, wie im vorigen §. N einzelne Kräfte an, bezeichne dieselben mit $\pm Q$, (je nachdem die Richtung nach ab- oder nach aufwärts gekehrt ist), und die Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Angriffspuncte mit d, beide Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern. Endlich sei die gleichförmig vertheilte Belastung per Längeneinheit $= q$. Für eine beliebig gewählte Stelle in N hat man sodann für das statische Kraftmoment

$$Rz = \pm Q_n(d_{n-1} - x) \pm Q_{n+1}(d_{n-1} + d_n - x) \pm \ldots .$$
$$\ldots . \pm Q_N(d_{n-1} + d_n + \ldots + d_{N-1} - x) + \tfrac{1}{2}q(d_{n-1} + d_n + \ldots + d_{N-1} - x)^2,$$

welcher Ausdruck die Form

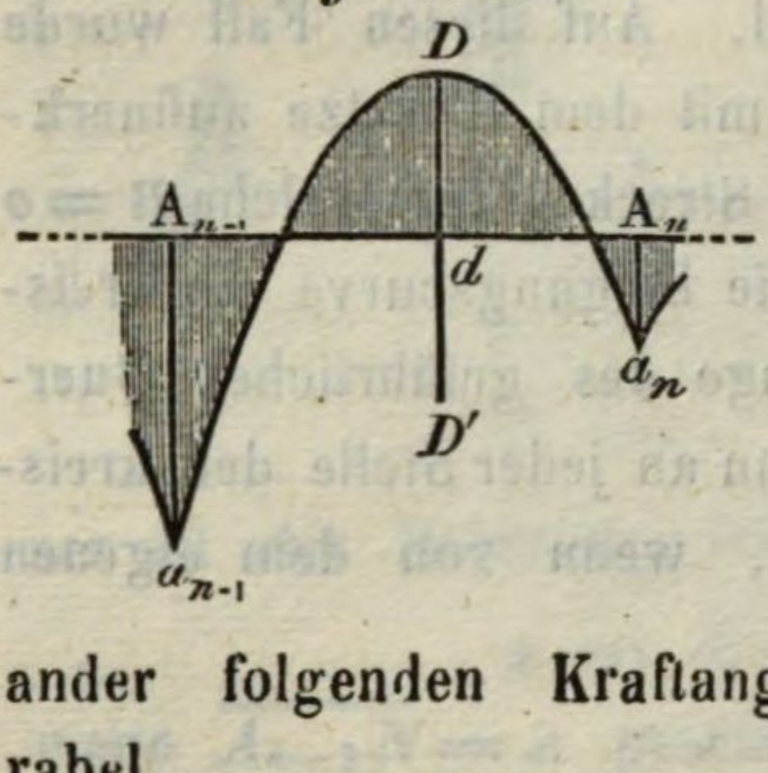
$$Rz = A + Bx + \tfrac{1}{2}qx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

annimmt, wenn man nach x ordnet, und die Coefficienten von x^0 und x^1 beziehungsweise mit A und B bezeichnet.

Die Gleichung (127) ist in Beziehung auf x vom zweiten Grade, und hinsichtlich derselben kann Folgendes bemerkt werden:

1. Die Gleichung gehört zu einer Parabel $a_{n-1} D a_n$ (Fig. 174), deren Axe DD' normal auf die Längenaxe des Prismas gerichtet ist. Da ferner $\frac{d^2(A + Bx + \frac{1}{2}qx^2)}{dx^2} = q$ wesentlich positiv wird, so liegt der Scheitel der Parabel D am höchsten, und ihre Aeste laufen nach abwärts.

Fig. 174.



2. Zwischen je 2 unmittelbar auf einander folgenden Kraftangriffspuncten existirt eine besondere Parabel.

3. Der Parameter einer jeden dieser Parabeln ist $\frac{2}{q}$, also bloss abhängig von der gleichförmig vertheilten Belastung per Längeneinheit, woraus folgt, dass die Form aller Parabeln eine congruente ist, zwischen welchen Kraftangriffspuncten sie auch betrachtet werden. Die Parabeln erscheinen daher nur gegenseitig parallel verschoben,

und von denselben wird bald ein grösseres bald ein kleineres Stück benöthigt.

4. Die Werthe von A und B sind so lange constant, als es sich um eine gewisse zwischen zwei Kraftangriffspuncten liegende Strecke handelt, sie sind aber mit den verschiedenen Strecken veränderlich. Da nun diese Grössen A und B den Ort des betreffenden Parabelscheitels bestimmen, so ist die Lage dieses Letzteren in den verschiedenen Strecken verschieden.

5. In jeder Strecke zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Kraftangriffspuncten, z. B. zwischen A_{n-1} und A_n, ist im Allgemeinen der grösste numerische Werth der negativen Ordinaten $\overline{Dd}$ in der Richtung der Parabelaxe vorhanden; die grösste positive Ordinate aber in einem der beiden Kraftangriffspuncte A_{n-1} und A_n selbst. Man bemerkt zugleich, dass die Ordinate $\overline{Dd}$ eigentlich ein analytisches Minimum ist, und die Entfernung der beiden Wendepuncte in d halbirt. Uebrigens müssen nicht in jeder Strecke zwischen zwei Kraftangriffspuncten positive und negative Ordinaten, so wie Wendepuncte vorkommen, sondern es kann diess je nach den obwaltenden Umständen verschieden sein. Siehe die Figuren 175, 176 und 177. Es kann nämlich geschehen, dass nur positive, oder nur negative Ordinaten vorhanden sind, oder dass die Parabelaxe nicht mehr in das zu benützende Stück fällt. In dem letzteren Falle (Fig. 177) ist die grösste negative Ordinate gleichfalls an einem der Kraftangriffspuncte vorhanden.

Fig. 175.

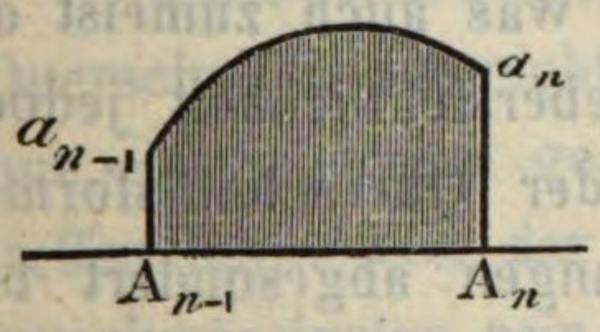


Fig. 176.

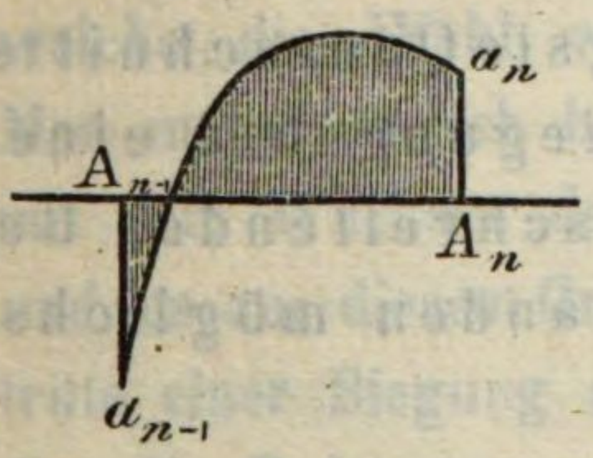
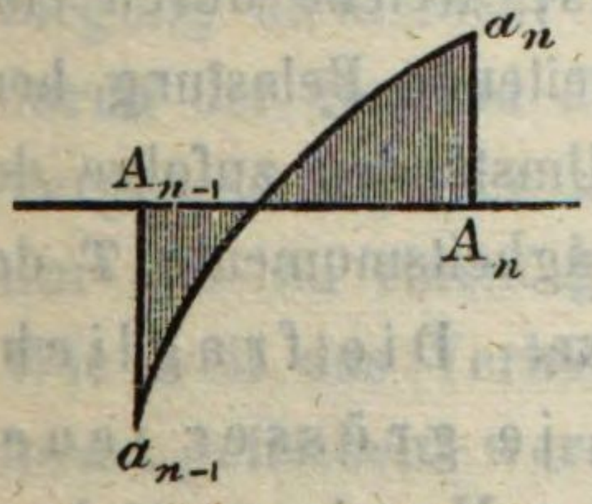


Fig. 177.



Der gefährliche Querschnitt fällt daher in eine solche Stelle, wo entweder eine von den Einzelkräften ihren Angriffspunct hat, oder, wo eine der Axen der fraglichen Parabeln die Längenaxe des Trägers durchschneidet.

Drittes Kapitel.

Ueber die zweckmässigsten Querschnittsformen.

§. 129.

Erklärung. Die Zweckmässigkeit der Form eines Querschnittes kann in verschiedenen Beziehungen verstanden werden, je nach der Absicht, die man zu erreichen anstrebt. So kann z. B. eine solche Querschnittsform unter sonst gleichen Umständen verlangt werden, dass die Biegung am kleinsten, oder, dass das Tragvermögen am grössten, oder aber, dass das mechanische Widerstandsmoment am grössten wird. In der Praxis nennnt man eine Querschnittsform zweckmässiger, als eine zweite, wenn die gleiche Absicht mit einem kleineren Materialaufwande, oder umgekehrt, wenn mit dem gleichen Materialaufwande der angestrebte Zweck in einem höheren Grade erreicht werden kann. In der Regel beabsichtigt man das grösste Tragvermögen, was auch zumeist die Hauptsache ist. Zur Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit jedoch wird im Nachstehenden die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen in jeder der oben erwähnten drei Beziehungen abgesondert betrachtet.

I. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn seine Biegung bei einer die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung unter sonst gleichen Umständen möglichst klein werden soll.

§. 130.

Hauptsatz. Die Biegung eines Trägers, welche durch eine gewisse die Sicherheitsgränzen nicht überschreitende Belastung hervorgebracht wird, steht unter sonst gleichen Umständen zufolge des §. 53 im umgekehrten Verhältnisse zu dem Trägheitsmomente T des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe. Die fragliche Biegung wird daher desto kleiner, je grösser jenes Trägheitsmoment ist, wesshalb das Maximum des-

selben angestrebt werden muss, wenn jene Biegung auf ein Minimum gebracht werden soll.

§. 131.

Folgerung. Um die Bedingungen zu erfahren, unter welchen das Trägheitsmoment T des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe den Umständen entsprechend möglichst gross wird, erinnere man sich, dass dasselbe nach dem §. 54 auf die Form cFH^2 gebracht werden kann, wenn F den Flächenraum des Querschnittes, H seine Höhe normal auf die neutrale Axe und c einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten bezeichnet. Der Werth vom cFH^2 wächst daher bei einem gegebenen Flächenraume F mit den Factoren H und c, wesshalb man zur möglichsten Verminderung der fraglichen Biegung des Trägers die Querschnittsform so zu wählen hat, dass die Werthe von H und c nach Zulässigkeit gross werden.

§. 132.

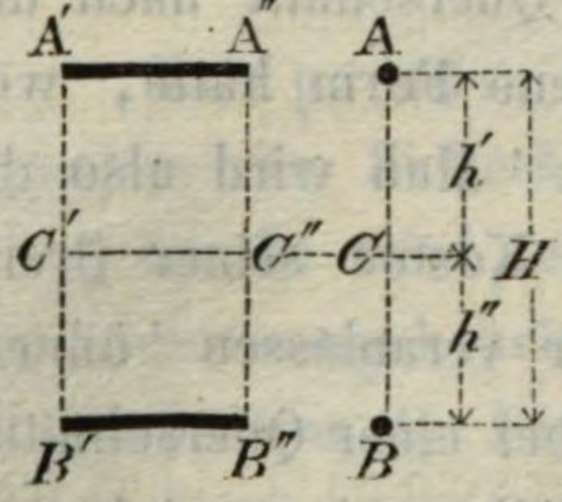
Zweckmässigste Höhe H. Die Wahl der Höhe eines Querschnittes ist nicht ganz beliebig. In der Regel ist für dieselbe nur ein Spielraum gestattet, innerhalb welchem man die Wahl zu treffen hat. Von der obigen Rücksicht allein geleitet, würde es am zweckmässigsten sein, von den zulässigen Höhen die grösste auszuwählen. Allein es machen sich auch andere Rücksichten geltend, welche die Wahl von zu grossen Höhendimensionen beschränken. Man muss nämlich beachten, dass bei einem gegebenen Flächenraume mit dem Wachsen der Höhendimension die Breitendimension abnimmt, und es aus diesem Grunde geschehen kann, dass der Träger beim Eintritte einer Biegung nach der Seite ausweicht. In diesem Falle würden die Bedingungen nicht mehr stattfinden, welche gleich Anfangs im §. 41 eingeführt worden sind, indem der Querschnitt nach der Biegung nicht mehr die vor derselben vorhandene Form hätte, wodurch der Bestand des Trägers gefährdet wäre. Man wird also die Vergrösserung der Höhe des Querschnittes auf Kosten seiner Breite nur bis zu einem gewissen Grade ohne Gefahr veranlassen können. Wie weit das Verhältniss der Breite zur Höhe bei einer Querschnittsform getrieben werden kann, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben. Es hängt diess von mancherlei Umständen, insbesondere aber

von der Querschnittsform und der Materialgattung ab. Vorzüglich kann man durch Rippen, Verstrebungen etc. beitragen, um jene Bedingungen selbst bei ziemlich grellen Verhältnissen der Breite zur Höhe des Querschnittes in genügender Weise zu erfüllen. Uebrigens wird eine solche Anordnung nur dann von einem Vortheile sein, wenn die Biegung des Trägers bloss in der Richtung der Höhe, als der grösseren Dimension des Querschnittes stattfindet. Wenn aber die Biegung nach mehreren, oder, wie bei einer rotirenden Welle nach allen Richtungen vorkommen kann, so wird man von der einseitigen Vergrösserung einer Dimension auf Kosten der anderen keinen Gebrauch machen dürfen, sondern vielmehr darauf zu achten haben, dass die Steifigkeit des Trägers nach allen in Betracht kommenden Richtungen eine angemessene werde. Bei rotirenden Wellen finden z. B. regelmässige Polygone als Querschnitte eine zweckmässige Anwendung, indem nach dem §. 120 ad 5 die Biegung solcher Wellen in jeder Stellung des rotirenden Querschnittes unverändert bleibt. Insbesondere ist nach der Tabelle im § 122 die Steifigkeit einer solchen Welle desto grösser, je weniger Seiten das Polygon hat.

§. 133.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der möglichsten Vergrösserung des Trägheitsmomentes *T*. Ist man über die Höhe des Querschnittes einig, so kann man das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf seine neutrale Axe desto mehr steigern, je weiter die Querschnittstheile von dieser Axe entfernt werden. Es leuchtet ein, dass das Maximum des Trägheitsmomentes erhalten würde, wenn man im Stande wäre, jedes Paar der Flächenelemente an den Enden der Höhe *A* und *B* (Fig. 178)

Fig. 178.



anzubringen, und auf diese Weise den Trägerquerschnitt in 2 gerade Linien $A'A''$ und $\overline{B'B''}$ zu drängen. Dieser Fall ist allerdings ein imaginärer, doch kann er dazu dienen, die Anhaltspuncte zu finden, an welche die Bedingungen zu knüpfen sind, die bei der Vertheilung des Flächenraumes in einem Trägerquerschnitte erfüllt werden sollen. In dieser Absicht bezeichne man die ganze Querschnittsfläche mit *F*, und stelle sich vor, dass

davon der Theil f' in $\overline{A'A''}$, der Theil f'' aber in $\overline{B'B''}$ concentrirt sei. Man ziehe ferner durch den Schwerpunct der beiden Querschnittstheile die neutrale Axe $\overline{C'C''}$, und nenne die Abstände derselben von den beiden Enden der Höhe h' und h'', so dass die ganze Querschnittshöhe $H = h' + h''$ ist. Es entsteht nunmehr die Frage, welches Verhältniss zwischen f' und f'' das zweckmässigste ist, wenn unter sonst gleichen Umständen die kleinste Biegung entstehen soll. Zur Beantwortung dieser Frage beachte man, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen

$$f'h' = f''h'', \; Fh' = f''H \text{ und } Fh'' = f'H$$

stattfinden, und das Trägheitsmoment T der beiden Querschnittstheile f' und f'' in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{C'C''}$ den Werth

$$T = f'h'^2 + f''h''^2 = \frac{Fh'^2h''}{H} + \frac{Fh'h''^2}{H} = Fh'h''\left(\frac{h'+h''}{H}\right)$$

oder

$$T = h'h''F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

annimmt, wenn die aus den obigen Gleichungen hervorgehenden Werthe $f' = \frac{Fh''}{H}$ und $f'' = \frac{Fh'}{H}$ berücksichtigt werden.

Der Gleichung (228) zufolge ist das Trägheitsmoment T mit h' und h'', also auch mit f' und f'' veränderlich, und zur Erreichung seines grössten Werthes ist das Product $h'h''$ auf ein Maximum zu bringen. Dieser Anforderung wird, weil $h'+h''=H$ eine constante Grösse ist, durch die Bedingung

$$h' = h'' = \tfrac{1}{2}H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229),$$

entsprochen, wornach die neutrale Axe durch die halbe Höhe zu gehen hat. Hiedurch erhält man

$$f' = f'' = \tfrac{1}{2}F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

und den Maximalwerth des Trägheitsmomentes

$$T = \tfrac{1}{4}FH^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231).$$

Aus diesen Resultaten folgt, dass die Biegung eines Trägers bei einer und derselben die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung desto kleiner wird,

1. je weiter die einzelnen Querschnittstheile von der neutralen Axe entfernt liegen, und

2. je näher zugleich die ganze Querschnittsfläche in zwei gleiche Theile getheilt wird.

Bezüglich des ersten Punctes sind jedoch die Gränzen nicht aus den Augen zu lassen, welche sich für das Vertheilen jeder einzelnen Querschnittsfläche f' und f'' vom practischen Standpuncte aus ergeben.

Die Gleichung (231) zeigt, dass für den analytisch grössten Werth des Trägheitsmomentes $T = c F H^2$ der Coefficient c zwar auf $\frac{1}{4}$ gesteigert, aber in der Anwendung stets kleiner sein wird, weil jener Maximalwerth von T nicht zu erreichen ist.

Im Nachfolgenden werden mehrere der vorzüglichsten Querschnitte betrachtet, welche in der untersuchten Beziehung als zweckmässig gelten können.

Anmerkuug. Die angegebene Vertheilung der Querschnittsfläche correspondirt nur mit der kleinsten Biegung, welche eine und dieselbe Belastung ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen unter sonst gleichen Umständen hervorbringen würde. Daraus ist keineswegs zu schliessen, dass bei dieser Vertheilung auch das grösste Tragvermögen erreicht werden kann; man wird vielmehr im §. 145 sehen, dass zur Erreichung dieser letzteren Absicht das Vertheilungsgesetz ein anderes ist.

§. 134.

Querschnittsform Fig. 179. Dieselbe gehört zu den vorzüglich zweckmässigen Querschnittsformen. Nach der Relation (166) ist das betreffende Trägheitsmoment

$$T = \frac{(1+n+n^2)}{12} F H^2,$$

wenn man $\frac{H'}{H} = n$ und den Flächenraum $F = B(H - H') = (1-n) BH$ setzt.

Fig. 179.

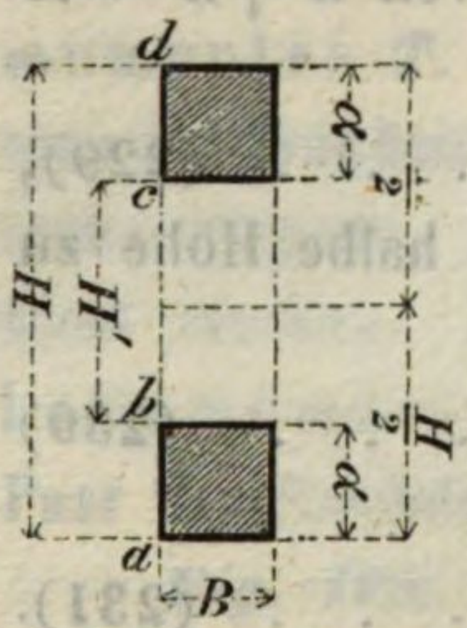
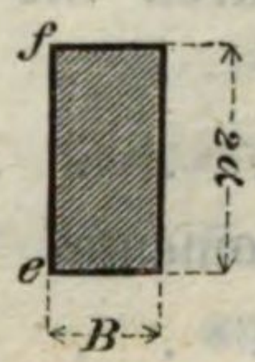


Fig. 180.



Da n immer kleiner als die Einheit ist, so kann der Coefficient von FH^2, nämlich $\frac{(1+n+n^2)}{12}$ die Zahl $\frac{1}{4}$ nie erreichen, was mit der Bemerkung im vorigen §. übereinstimmt.

Vergleicht man diesen Querschnitt mit einem vollen Rechtecke (Fig. 180), welches dieselbe Breite B und denselben Flächenraum F hat, so dass $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ef} = 2\alpha$ ist, und nennt man das Trägheitsmoment dieses Rechteckes t, so erhält man nach der Formel (51)

$$t = \tfrac{1}{12} F (2\alpha)^2 = \tfrac{1}{3} F \alpha^2,$$

also durch Vergleichung

$$t : T = \alpha^2 : \frac{(1+n+n^2)}{4} H.$$

Setzt man noch das Verhältniss $\frac{2\alpha}{H} = x$, und berücksichtigt zugleich, dass sodann $(H-H') = 2\alpha$, $H = \frac{2\alpha}{x}$, $H' = 2\alpha\left(\frac{1-x}{x}\right)$ und $n = 1-x$ wird, so geht die vorige Proportion in folgende über:

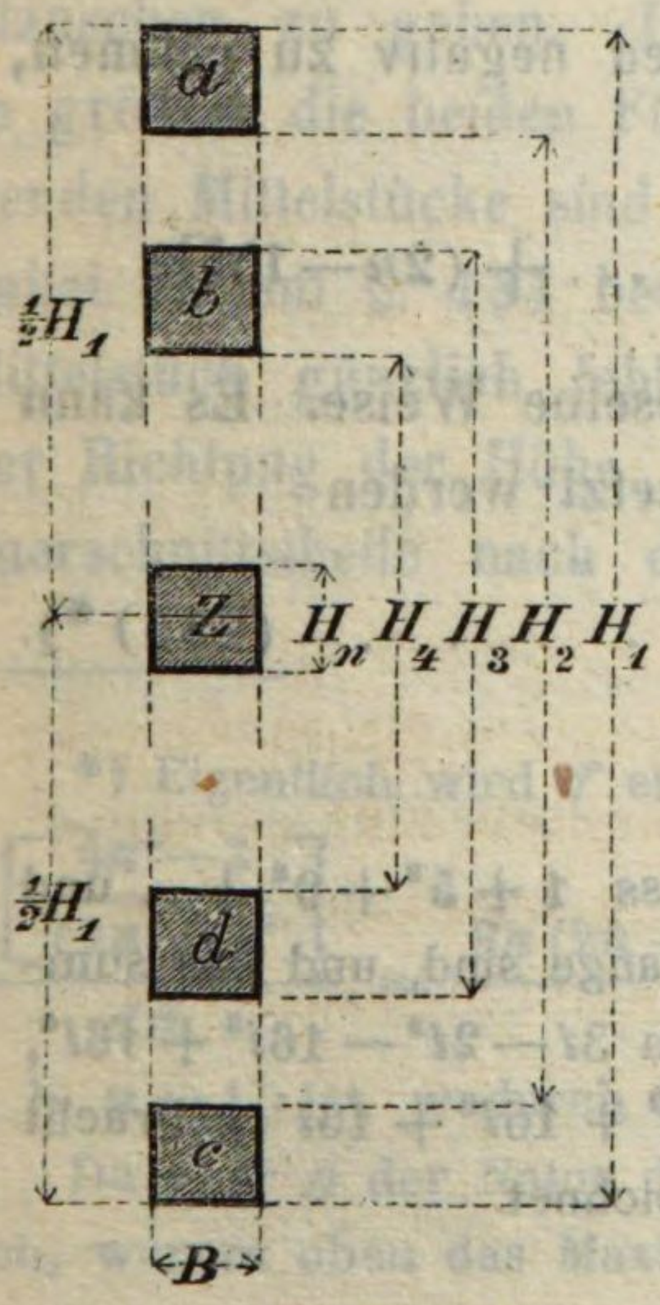
$$t : T = x^2 : (3 - 3x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232).$$

Insbesondere ist

für $x = 1$, $\alpha = 0{\cdot}50\,H$ und $t : T = 1 : 1$
„ $x = 0\,9$, $\alpha = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}370$
„ $x = 0\,8$, $\alpha = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}937$
„ $x = 0{\cdot}7$, $\alpha = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}837$
„ $x = 0{\cdot}6$, $\alpha = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 4{\cdot}333$
„ $x = 0{\cdot}5$ $\alpha = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 7$
„ $x = 0{\cdot}4$, $\alpha = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 12{\cdot}25$
„ $x = 0{\cdot}3$, $\alpha = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 24{\cdot}333.$

Das Verhältniss (232) gestaltet sich für die Querschnittsform (Fig. 179) desto günstiger, d. h. die Steifigkeit des Trägers wird desto bedeutender, je kleiner x, also je grösser der leere Raum zwischen den vollen Querschnittstheilen im Vergleiche zu diesen selbst ist. Die Vergrösserung des leeren Raumes hat indessen in jedem besonderen Falle eine practische Gränze, welche an die Bedingungen im §. 41 gebunden, und der Bemerkung im §. 132 gemäss je nach den Umständen verschieden ist.

Fig. 181.



§. 135.

Querschnittsform Fig. 181.

Diese Querschnittsform ist ebenfalls zweckmässig. Man nehme an, dass dieselbe n volle Flächentheile a, b, c, d, ... z und $(n-1)$ leere Zwischenräume enthalte, ferner die ganze Querschnittsform in Bezug auf die neutrale Axe symmetrisch gebildet sei, dass also letztere die Höhe H_1 halbire. Hiernach und mit Rücksicht auf die cotirten Dimensionen erhält man den Flächenraum

$$F = B(H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \ldots \pm H_n) \ldots (233),$$

und das Trägheitsmoment

$$T = \tfrac{1}{12} B(H_1^3 - H_2^3 + H_3^3 - H_4^3 + \ldots \pm H_n^3) \ldots (234),$$

in welchen n gliederigen Reihen das letzte Glied positiv oder negativ wird, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Diese allgemeinen Ausdrücke sind leicht zu gebrauchen. Sie lassen sich in besonderen Fällen noch einfacher darstellen. Haben z. B. alle vollen Rechtecke $a, b, c, d, \ldots z$ und eben so alle leeren Zwischenräume die gleiche Höhe α, so erhält man insbesondere

$$H_n = \alpha,\ H_{n-1} = 3\alpha,\ H_{n-2} = 5\alpha, \ldots H_2 = (2n-3)\alpha$$

und $H_1 = (2n-1)\alpha$, und durch Substitution dieser Werthe

$$T = \tfrac{1}{12} B\alpha^3 [(2n-1)^3 - (2n-3)^3 + \ldots \pm 1],$$

also auch wegen

$$F = nB\alpha,\ \alpha = \frac{H_1}{2n-1},\ B = \frac{F}{n\alpha} \text{ und}$$

$$B\alpha^3 = \frac{F\alpha^2}{n} = \frac{FH_1^2}{n(2n-1)^2},$$

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[(2n-1)^3 - (2n-3)^3 + \ldots \pm 1]FH_1^2.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so muss das letzte Glied in der Klammer positiv genommen werden, und es wird

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[+1 - 3^3 + 5^3 - \ldots + (2n-1)^3];$$

ist aber n eine gerade Zahl, daher jenes Glied negativ zu nehmen, so wird

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[-1 + 3^3 - 5^3 + \ldots + (2n-1)^3].$$

In beiden Fällen reducirt sich T auf dieselbe Weise. Es kann nämlich allgemein für jeden Werth von n gesetzt werden

$$T = \frac{(4n^2-3)}{12(2n-1)^2} FH_1^2 \ldots \ldots \ldots \ldots (235)\ *).$$

---

*) Bei dieser Reduction ist zu beachten, dass $1 + 5^3 + 9^3 + \ldots$ und $3^3 + 7^3 + 11^3 + \ldots$ arithmetische Reihen vom 3. Range sind, und das summatorische Glied für die erste Reihe auf die Form $3i - 2i^2 - 16i^3 + 16i^4$, für die zweite Reihe aber auf die Form $-3i - 2i^2 + 16i^3 + 16i^4$ gebracht werden kann, wenn i die jeweilige Gliederzahl bezeichnet.

Dieser Formel gemäss wird z. B.

für $n=1$, $T=0{\cdot}083\,FH_1^2$	für $n=6$, $T=0{\cdot}097\,FH_1^2$
„ $n=2$, $T=0{\cdot}120\,FH_1^2$	„ $n=7$, $T=0{\cdot}095\,FH_1^2$
„ $n=3$, $T=0{\cdot}110\,FH_1^2$	„ $n=8$, $T=0{\cdot}094\,FH_1^2$
„ $n=4$, $T=0{\cdot}104\,FH_1^2$	„ $n=9$, $T=0{\cdot}093\,FH_1^2$
„ $n=5$, $T=0{\cdot}100\,FH_1^2$	„ $n=10$, $T=0{\cdot}092\,FH_1^2$.

Der grösste Werth von T entsteht für $n=2$ *), nämlich in dem Falle, der im vorhergehenden §. behandelt wurde, welcher sosomit die zweckmässigste Anordnung bei der hier untersuchten Querschnittsform angibt. Mit der Zunahme von n vermindert sich das Trägheitsmoment und nähert sich dem Werthe $\frac{1}{12}FH_1^2$, welcher mit $n=\infty$ correspondirt.

§. 136.

Iförmiger Querschnitt. Auf diese Querschnittsform wurde schon mittelst der Figuren 99, 100, 103 und 124 aufmerksam gemacht, und die betreffenden Formeln für das Trägheitsmoment T sind aus der Zusammenstellung im §. 116 zu entnehmen. Wenn man bloss der Biegung des mit einem solchen Querschnitte versehenen Trägers bei einer gewissen die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung die Aufmerksamkeit zuwendet, so erscheint es mit Rücksicht auf den §. 133 vortheilhaft, der **I** Form gleiche Flanschen zu geben. Diese Form wird desto zweckmässiger sein, je grösser die beiden Flanschen im Vergleiche zu dem sie verbindenden Mittelstücke sind, oder mit anderen Worten, je näher man dabei der im §. 134 betrachteten Form (Fig. 179) kommt, wo das Mittelstück gänzlich fehlt, vorausgesetzt, dass die Biegung nur in der Richtung der Höhe betrachtet wird, und ein Ausweichen der Querschnittstheile nach der Seite nicht zu besorgen ist. Hieraus

---

*) Eigentlich wird T ein analytisches Maximum, wenn

$$\frac{d\left[\frac{4n^2-3}{(2n-1)^2}\right]}{dn}=\frac{8n(2n-1)^2-4(4n^2-3)(2n-1)}{(2n-1)^4}=\frac{4(3-2n)}{(2n-1)^3}=0,$$

d. h. $n=1\frac{1}{2}$ ist, wodurch $T=\frac{1}{8}FH_1^2=0{\cdot}125\,FH_1^2$ würde.

Da aber n der Natur der Sache nach eine ganze Zahl ist, so erklärt es sich, warum oben das Maximum für $n=2$ gefunden wurde.

folgt, dass der Coefficient von FH^2 in dem Ausdrucke für das Trägheitsmoment der Zahl $\frac{1}{4}$ zuweilen nahe kommen kann. Auch leuchtet ein, dass, wenn man einen gegebenen Flächeninhalt in zwei oder mehrere I Formen (Fig. 182) von der Breite B und der Höhe H zertheilt, mit diesen Theilen zusammen eine grössere Steifigkeit erreicht werden kann, als wenn man denselben Flächenraum in eine einzige I Form (Fig. 183) von derselben Breite und Höhe bringt, wenn nur im ersten Falle auf die Vermehrung des Coefficienten im Ausdrucke für das Trägheitsmoment nach Zulässigkeit hingewirkt wird. Den zertheilten Querschnitt (Fig. 182) kann auch der zusammenhängende Querschnitt (Fig. 184) ersetzen,

Fig. 182.

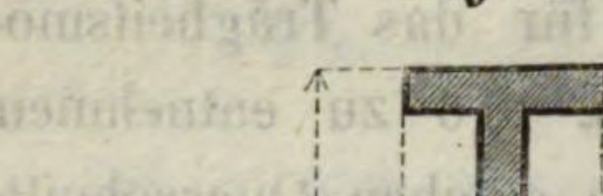


Fig. 183.

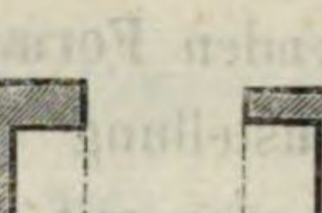


Fig. 184.

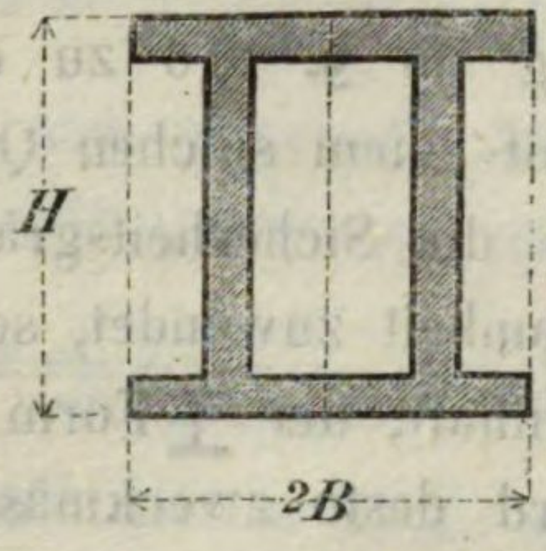
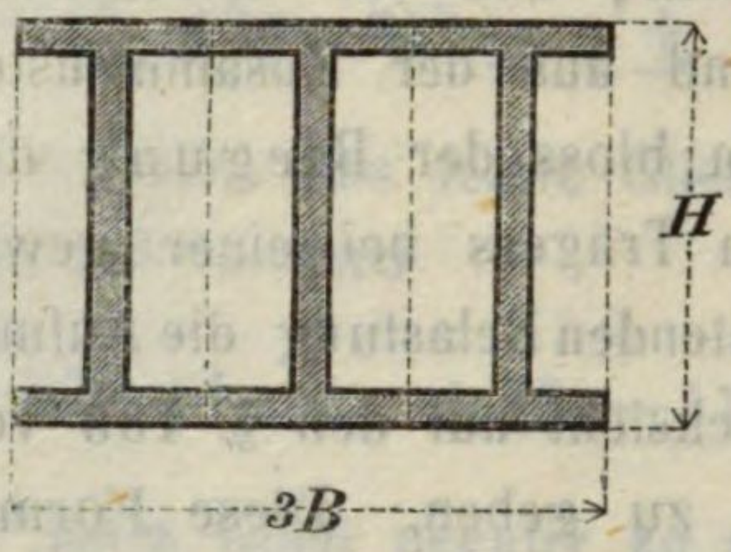


Fig. 185.



welcher, wie man sieht, zwei verticale Verbindungswände hat. Durch die Fortsetzung dieser Betrachtungsweise gelangt man auf die zellenförmigen Querschnitte; denn man erkennt, das die Anordnung von mehreren solchen Verticalwänden (Fig. 185) noch zweckmässiger ist, wenn nur diese Wände nicht zu stark gemacht werden, auch gegen die Vervielfältigung der Breite B kein Hinderniss im Wege steht, und überhaupt der Querschnitt in seiner Form erhalten werden kann.

§. 137.

T förmiger Querschnitt. Auf diesen Querschnitt hat man bereits mittelst der Figuren 101 und 125 aufmerksam gemacht. Derselbe ist gleichfalls unter gewissen Bedingungen zweckmässig. Un-

tersucht man nämlich die dazu gehörige Formel (187) für das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$T = \frac{4(1-mn^3)(1-mn) - 3(1-mn^2)^2}{12(1-mn)^2} FH^2,$$

so überzeugt man sich, dass der mit FH^2 zu multiplicirende Coefficient, wenn auch nicht immer, so doch bei gewissen Formverhältnissen grösser als $\frac{1}{12}$, also ein solcher Querschnitt vortheilhafter als ein Rechteck werden kann. Es entsteht desshalb die Frage, welche Verhältnisse bei ⊤ förmigen Querschnitten zur möglichsten Verminderung der Biegung des Trägers unter sonst gleichen Umständen am zweckmässigsten sind.

Um diese Frage zu beantworten, nehme man an, dass für die ⊤ Form die Fläche F, die grösste Höhe H und die grösste Breite B gegeben seien. In diesem Falle hat man B, H und F als constant, hingegen die Verhältnisszahlen m und n als variabel anzusehen und sofort zu untersuchen, für welche Werthe dieser letzteren das Trägheitsmoment T ein Maximum wird. Zu diesem Behufe beachte man, dass wegen $F = (1-mn)BH$ zunächst $mn = 1 - \frac{F}{BH}$, also eine constante Grösse wird. Bezeichnet man diese mit γ, d. i. $mn = \gamma$, so reducirt sich der Ausdruck für das Trägheitsmoment auf

$$T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) \quad 3(1-\gamma n)^2}{12(1-\gamma)^2} FH^2.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$d\left[4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2\right] = 2\gamma\left[3-(4-\gamma)n\right] = 0,$$

welcher Bedingung $n = \frac{3}{(4-\gamma)}$ entspricht. Hiernach erhält man

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{3}{(4-\gamma)} = \frac{3}{\left(3+\frac{F}{BH}\right)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{und } m &= \frac{\gamma(4-\gamma)}{3} = \tfrac{1}{3}\left(1-\frac{F}{BH}\right)\left(3+\frac{F}{BH}\right) \quad . \end{aligned}\right\} (236),$$

endlich für den Maximal-Werth des Trägheitsmomentes selbst

$$T = \frac{1}{3(4-\gamma)} FH^2 = \frac{1}{3\left(3+\frac{F}{BH}\right)} FH^2 \quad . \quad . \quad . \quad (237).$$

Um die Anwendung dieser Resultate durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man an, dass der Flächenraum $F = 8\square''$ in eine ⊤ Form,

deren grösste Höhe $H = 6''$ und deren grösste Breite $B = 4''$ beträgt, unter der Bedingung zu bringen wäre, dass der Träger bei einer gegebenen, die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung die kleinste Biegung erleiden soll.

Für diesen Fall hat man

$B = 4''$	$\frac{F}{BH}$	$=$	$\frac{1}{3}$
$H = 6''$	γ	$=$	$\frac{2}{3}$
$BH = 24\,\square''$	n	$=$	$0{\cdot}9$
$F = 8\,\square''$	m	$=$	$\frac{20}{27}$

und $T = \frac{1}{10} F H^2 = 28{\cdot}8$,

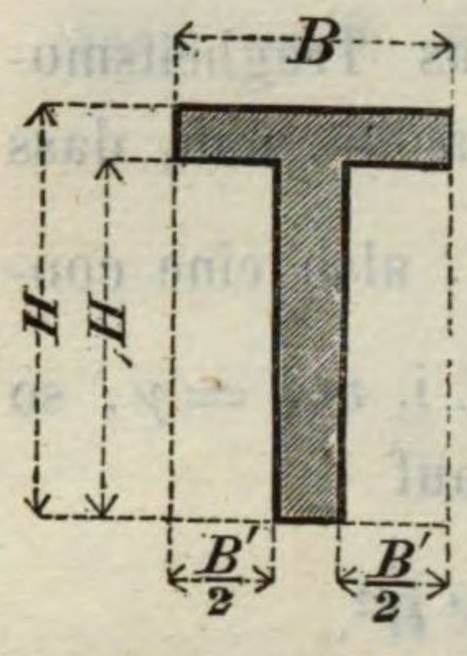
und es ist in dem betreffenden Querschnitte (Fig. 186)

$$B' = m B = 2\tfrac{26}{27}'', \quad H' = n H = 5{\cdot}4'',$$

daher die Dicke der horizontalen Wand . . . $(H - H') = 0{\cdot}6''$,

und jene der verticalen Wand . . . . . $(B - B') = 1\tfrac{1}{27}''$.

Fig. 186.



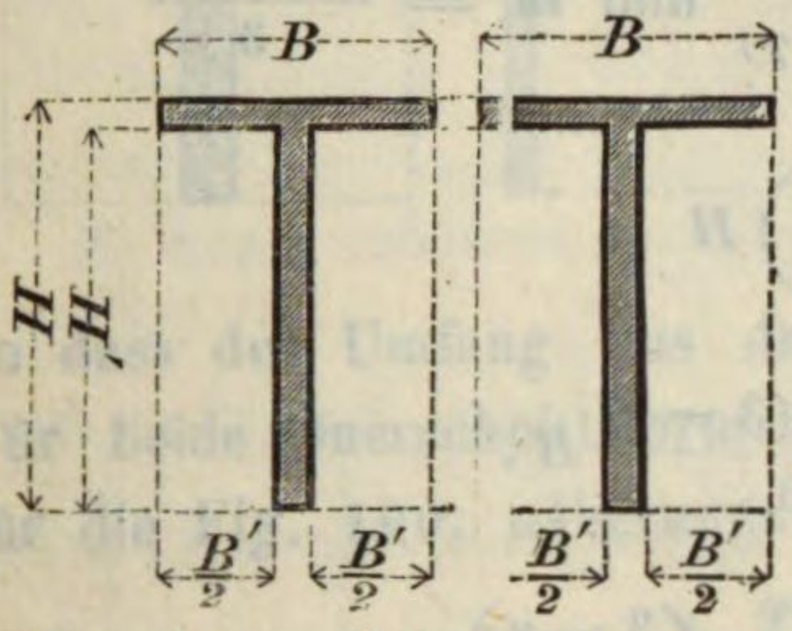
Diese Verhältnisse sind so lange, als B, H und F die angenommenen Werthe beibehalten, die günstigsten in Bezug auf die Steifigkeit des Trägers nach der Höhenrichtung.

Aus der Bildung der Formel (237) für T bemerkt man, dass der Coefficient von FH^2, nämlich $\frac{1}{3\left(3 + \frac{F}{BH}\right)}$, desto grösser wird, je kleiner die Fläche F im Vergleiche zu dem umgeschriebenen Rechtecke BH ist, dass aber dieser Coefficient den Werth $\frac{1}{9}$ niemals erreichen kann, weil sonst der unmögliche Fall $F = o$ in Betracht käme. Indessen kann bei kleinen Wanddicken der fragliche Coefficient näherungsweise mit $\frac{1}{9}$ angenommen werden. Diese Bemerkung zeigt übereinstimmend mit den Betrachtungen im §. 133, dass einem Träger mit dem $\mathbf{I}$förmigen Querschnitte eine grössere Steifigkeit verliehen werden kann, als mit dem $\top$förmigen, indem der Gränzwerth des Coefficienten von FH^2 bei dem Trägheitsmomente der $\top$Form nur $\frac{1}{9}$ ist, während derselbe bei der $\mathbf{I}$Form $\frac{1}{4}$ beträgt.

Aehnlich wie bei der $\mathbf{I}$Form, wird auch die Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes F in mehrere gleiche $\top$Formen vortheilhafter sein, als wenn derselbe in eine einzige solche Form gebracht würde, wenn nur auf die günstigsten Formverhältnisse nach den Re-

lationen (236) Bedacht genommen wird. So z. B. kann man mit den beiden Querschnitten (Fig. 187) zusammen eine grössere Steifigkeit erreichen, als mit dem Querschnitte (Fig. 186), obgleich der verwendete Flächeninhalt in beiden Fällen derselbe ist. Die beiden Querschnitte (Fig. 187) enthalten nämlich jeder $4\square''$, und die Formverhältnisse sind nach den Gleichungen (236) bestimmt, welche $n = \frac{18}{19}$, $m = \frac{95}{108}$, $H' = 5\frac{13}{19}''$, $B' = 3\frac{14}{27}''$, $(B - B') = \frac{13}{27}''$ und $(H - H') = \frac{6}{19}''$ ergeben. Wirklich findet man in diesem Falle für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes den Werth $\frac{1}{3(3+\frac{4}{24})} = \frac{2}{19}$, welcher den früheren von $\frac{1}{10}$ für die Fig. 186 übersteigt.

Fig. 187.



Solche Querschnitte, wie in der Fig. 187, können auch zusammenhängend, wie in der Fig. 188, construirt werden, und man

Fig. 188.

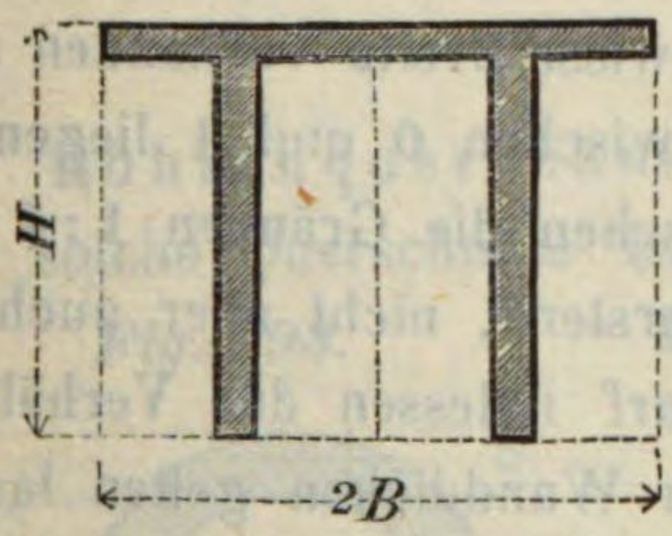
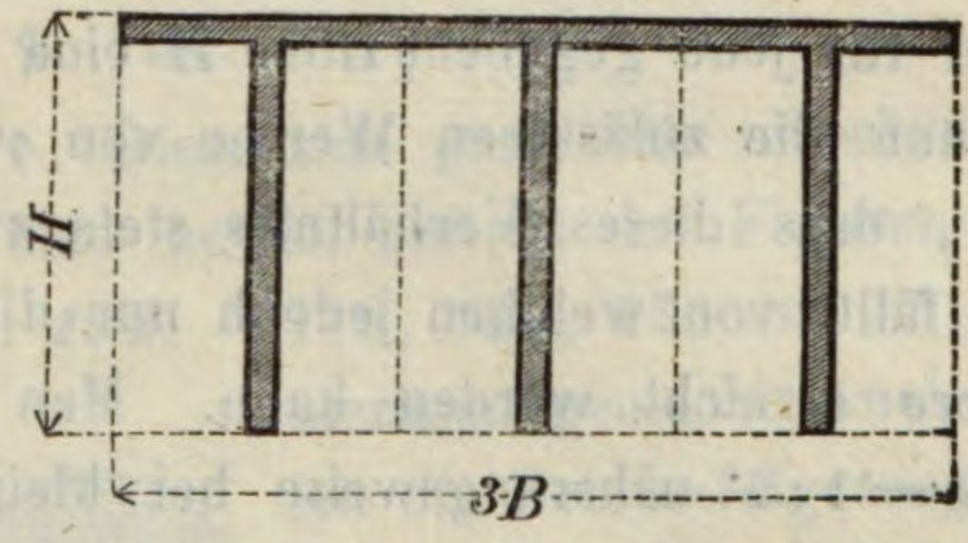


Fig. 189.



kann durch eine weitere Vertheilung des gegebenen Flächenraumes wieder zu dem im vorigen §. bemerkten Resultate gelangen, dass die Anwendung von mehreren verticalen Wänden (Fig. 189) vortheilhaft erscheint, wenn bei der gegebenen Höhe H die Vervielfältigung der zu einer Wand gehörigen Breite B zulässig ist, und die Wanddicken im Einklange mit den Relationen (236) bestimmt werden. Dabei wird der gegebene Flächenraum F in so viele gleiche $\top$ Formen getheilt, als verticale Wände vorhanden sind, deren Dicke mit der Anzahl derselben abnimmt.

Bei der Benützung der Formeln (236) erhält man im Allgemeinen ungleiche Werthe für $(H - H')$ und $(B - B')$, also auch un-

gleiche Dicken für die horizontalen und verticalen Wände. Denn es ist wegen

$$H' = nH,\ B' = mB,\ n = \frac{3}{(4-\gamma)} \text{ und } m = \frac{\gamma(4-\gamma)}{3}$$

zunächst

$$(H - H') = H(1 - n) = \left(\frac{1-\gamma}{4-\gamma}\right) H$$

und

$$(B - B') = B(1 - m) = \frac{(1-\gamma)(3-\gamma)}{3} B,$$

folglich

$$(H - H') : (B - B') = \frac{H}{(4-\gamma)} : \left(\frac{3-\gamma}{3}\right) B,$$

und hiernach

$$\frac{(H-H')}{H} : \frac{(B-B')}{B} = 3 : (3-\gamma)(4-\gamma) \quad . \quad . \quad (238).$$

Verlangt man jedoch, dass die Wanddicken $(H - H')$ und $(B - B')$ einander gleich werden, so muss zwischen B und H die Relation

$$B : H = 3 : (3-\gamma)(4-\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad (239),$$

daher für jede gegebene Höhe H eine gewisse Breite vorhanden sein. Da nun die zulässigen Werthe von γ zwischen 0 und 1 liegen, so folgt, dass dieses Verhältniss stets zwischen die Gränzen 1 : 4 und 1 : 2 fällt, von welchen jedoch nur die erstere, nicht aber auch die letztere erreicht werden kann. Man darf indessen das Verhältniss $B : H = 1 : 2$ näherungsweise bei kleinen Wanddicken gelten lassen. Will man z. B. (Fig. 190) eine ⊤ Form von einer gegebenen Höhe $\overline{CD}$ aus dünnen Wänden von gleicher Stärke so construiren, dass die Biegung des Trägers im Vergleiche zu dem Materialaufwande am kleinsten wird, so erreicht man diese Absicht hinreichend genau, wenn man dem obigen Verhältnisse zufolge $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ macht. Verbindet man zwei solche Querschnitte, und rückt die verticalen Wände einmal aneinander, das andere Mal aber auseinander, so erhält man zwei in demselben Sinne zweckmässige Querschnitte (Fig. 191 und 192). Bei dem ersten (Fig. 191), wo die beiden verticalen Wände an einander zu befestigen sind, bekommt man eine ⊤ Form, bei welcher

Fig. 190.

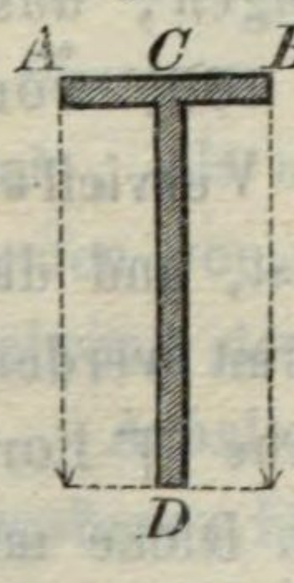


Fig. 191.

Fig. 192.

das horizontale Stück eben so lang, jedoch nur halb so dick ist, wie das verticale Doppelstück. Ein solcher Querschnitt entsteht z. B. durch die Verbindung zweier Winkeleisen. Bei dem 2. Querschnitte (Fig. 192) sind drei gleiche Wände vorhanden, so dass der Umfang aus drei Seiten eines Quadrates gebildet ist. Für beide Querschnittsformen ist das Trägheitsmoment, eben so wie für die Fig. 190, näherungsweise

$$T = \tfrac{1}{9} F H^2,$$

wenn F den Flächenraum des Querschnittes und H seine Höhe bezeichnet.

Bei allen in diesem §. besprochenen Anordnungen dürfen jedoch die Dicken der Wände im Vergleiche zu den anderen Dimensionen des Querschnittes nicht zu klein werden; denn man muss zugleich erwägen, ob der gewählte Querschnitt sich auch in seiner Form erhalten lasse.

§. 138.

Röhrenquerschnitte. Diese sind gleichfalls zweckmässig. Auf solche Querschnitte hat man bereits mittelst der Figuren 102, 119, 120, 130 und 131 aufmerksam gemacht. Auch führten die Schlussfolgerungen in dem §. 136 auf ähnliche Formen (Fig. 184, 185).

Fig. 193.

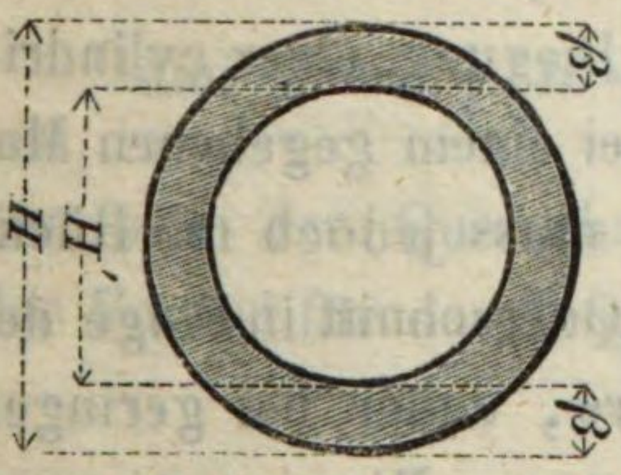
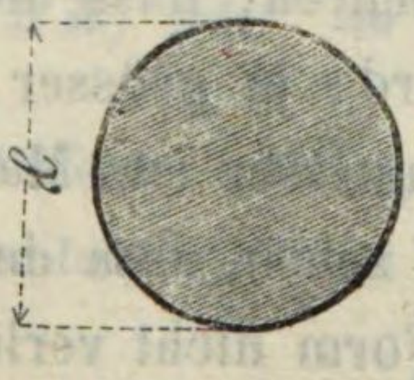


Fig. 194.



Für cylindrische Röhren insbesondere wird nach der Gleichung (181) das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnittes (Fig. 193).

$$T = \tfrac{1}{16}(1 + n^2) F H^2,$$

wenn $n = \frac{H'}{H}$ und der Flächenraum

$$F = (H^2 - H'^2)\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(1 - n^2) H^2 \text{ ist.}$$

Vergleicht man diesen Querschnitt mit einem vollen Kreise von gleichem Flächenraume (Fig. 194), und nennt man das Trägheitsmoment desselben t, so wie seinen Durchmesser γ, so ist $F = \frac{\pi}{4}\gamma^2$, daher $\gamma^2 = (1-n^2)H^2$ und nach der Formel (53)

$$t = \tfrac{1}{16}F\gamma^2 = \tfrac{1}{16}(1-n^2)FH^2.$$

Demgemäss erhält man für das Verhältniss zwischen t und T

$$t : T = (1-n^2) : (1+n^2).$$

Um noch die Dicke der Röhrenwand einzuführen, bezeichne man dieselbe mit β, und setze das Verhältniss $\frac{2\beta}{H} = x$. Hiernach wird $H = \frac{2\beta}{x}$, $H' = 2\beta\left(\frac{1-x}{x}\right)$ und $n = (1-x)$, und es geht die vorige Proportion in folgende über:

$$t : T = (2x - x^2) : (2 - 2x + x^2) \quad . \quad (240).$$

Insbesondere wird

für $x = 1$, $\beta = 0{\cdot}50\,H$ und $t:T = 1:1$,
„ $x = 0\,9$, $\beta = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1:1{\cdot}020$,
„ $x = 0\,8$, $\beta = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1:1{\cdot}084$,
„ $x = 0{\cdot}7$, $\beta = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1:1{\cdot}198$,
„ $x = 0{\cdot}6$, $\beta = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1:1{\cdot}381$,
„ $x = 0\,5$, $\beta = 0\,25\,H$ „ „ $= 1:1{\cdot}667$,
„ $x = 0{\cdot}4$, $\beta = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1:2{\cdot}125$,
„ $x = 0{\cdot}3$, $\beta = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1:2{\cdot}921$,
„ $x = 0{\cdot}2$, $\beta = 0{\cdot}10\,H$ „ „ $= 1:4{\cdot}556$.

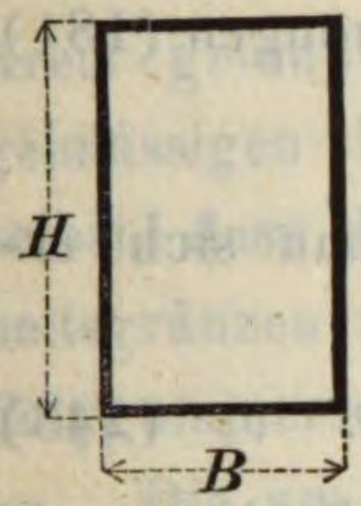
Diese Verhältnisszahlen lehren, dass die Biegung einer cylindrischen Röhre desto kleiner wird, je grösser bei einem gegebenen Materialquantum der Röhrendurchmesser ist. Man muss jedoch mit Rücksicht auf den §. 41 stets darauf sehen, dass der Querschnitt in Folge der Biegung seine ursprüngliche Form nicht verliere, daher bei geringen Wanddicken die Anwendung von Verstärkungen, Rippen, u. s. w. nöthig, jedenfalls aber die Verkleinerung der Wanddicke mit der gleichzeitigen Vergrösserung des Röhrendurchmessers nur bis zu einem gewissen Grade zulässig sein wird.

§. 139.

Genäherter Werth des Trägheitsmomentes für Blechröhrenquerschnitte. Die Steifigkeit der Blechröhren

kann nach den allgemeinen Formeln für Röhren beurtheilt werden. Da aber die Blechstärken im Vergleiche zu den anderen Querschnittsdimensionen in der Regel nur klein sind, so wird in den meisten Fällen die Anwendung genäherter Formeln gestattet sein. Man hat bereits bei der Betrachtung der I und $\top$ Formen solche Fälle kennen gelernt, wo geringe Wanddicken eine genäherte Berechnungsweise zuliessen.

Fig. 195.



Diess vorausgeschickt, betrachte man zunächst eine Blechröhe mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 195), und erinnere sich, dass mit Rücksicht auf die genauen Formeln nach den Bezeichnungen in der Figur 102

die Fläche . . . . . $F = (BH - B'H')$

und das Trägheitsmoment . $T = \frac{1}{12}(BH^3 - B'H'^3)$

wird. Ist nun die Wanddicke β gegen die übrigen Querschnittsdimensionen klein, so kann man sich erlauben, bei der Benützung der Werthe

$$B' = (B - 2\beta) = B\left(1 - 2\frac{\beta}{B}\right)$$

und

$$H' = (H - 2\beta) = H\left(1 - 2\frac{\beta}{H}\right)$$

nur die ersten Potenzen von $\frac{\beta}{B}$ und $\frac{\beta}{H}$ zu berücksichtigen, und sofort zu setzen

$$\left.\begin{aligned} F &= 2\,(B + H)\,\beta \\ \text{und } T &= \tfrac{1}{6}(H + 3B)\,\beta H^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) F H^2 \end{aligned}\right\} \quad (241).$$

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient von FH^2 in der Formel für das Trägheitsmoment ist

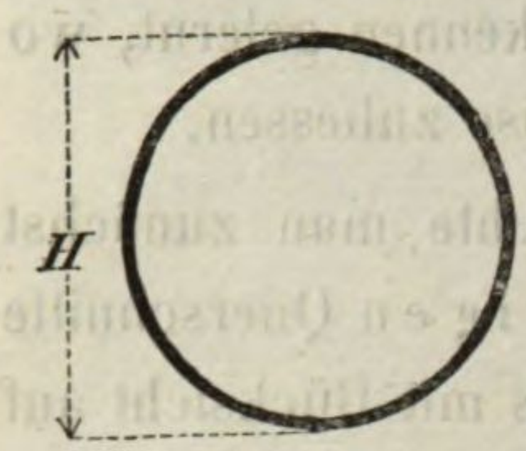
$$\tfrac{1}{12}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) = \tfrac{1}{12}\left\{\frac{1 + \frac{3B}{H}}{1 + \frac{B}{H}}\right\},$$

und variirt mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die beiden Gränzen, zwischen welchen die Werthe jenes Coefficienten fallen, ergeben sich, die eine für $B = o$ und die andere für $H = o$, und sind daher durch die Zahlenwerthe $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{4}$ ausgedrückt.

Für $B = H$ geht das Rechteck in ein Quadrat über, und es wird $F = 4 H \beta$, ferner

$$T = \tfrac{1}{6} F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242).$$

Fig. 196.



In diesem Falle ist der fragliche Coefficient $(\frac{1}{6})$ das arithmetische Mittel zwischen jenen Gränzwerthen, und doppelt so gross, wie bei einem vollen Quadrate $(\frac{1}{12})$.

Für eine cylindrische Blechröhre (Fig. 196) erhält man nach den genauen Gleichungen (181)

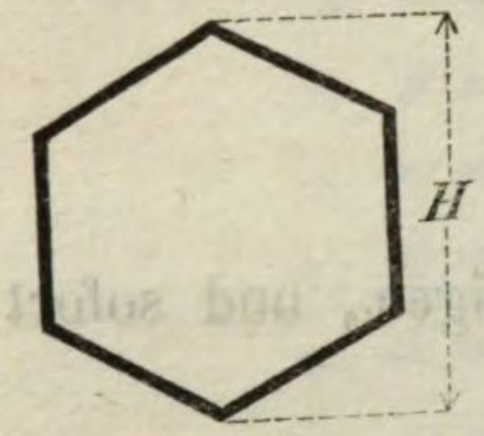
$$T = \tfrac{1}{16} (1 + n^2) F H^2.$$

Ist wieder die Wanddicke β sehr klein, so kann man sich erlauben, $n = 1$, also

$$T = \tfrac{1}{8} F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

zu setzen. Auch hier erscheint der Coefficient von $F H^2$ $(\frac{1}{8})$ doppelt so gross, wie bei einem vollen Kreisquerschnitte $(\frac{1}{16})$.

Fig. 197.



Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein regelmässiges Polygon (Fig. 197), und nennt man den von seinem äusseren Umfange eingeschlossenen Flächenraum f_1, den inneren leeren Raum f_2, ferner die eigentliche Fläche des Blechquerschnittes $F = (f_1 - f_2)$, so hat man unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen im § 121 zufolge der genauen Formeln (199) und (200) für das Trägheitsmoment des Blechquerschnittes

$$T = \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right) f_1^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right) f_2^2 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right)(f_1^2 - f_2^2).$$

Ist die Blechstärke klein genug, um statt

$$(f_1^2 - f_2^2) = (f_1 + f_2)(f_1 - f_2) = (f_1 + f_2) F$$

näherungsweise $2 f_1 F$ annehmen zu dürfen, so erhält man wegen $f_1 = \frac{1}{2} n \sin\alpha C^2$ zunächst

$$(f_1^2 - f_2^2) = 2 f_1 F = n \sin\alpha F C^2,$$

also auch

$$T = \tfrac{1}{6}(2 + \cos\alpha) F C^2.$$

Wird weiter berücksichtigt, dass

$$(2 + \cos\alpha) C^2 = (C^2 + 2 c^2)$$

ist, so bekommt man als den genäherten Werth des Trägheitsmomentes

$$T = \tfrac{1}{6} F (C^2 + 2 c^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (244).$$

Diese Relation verglichen mit jener (199) zeigt, dass der von der Querschnittsform abhängige Coefficient in der Formel des Trägheitsmomentes für jede beliebige Seitenzahl des Polygons doppelt so gross ist, wie bei einem vollen Polygon von derselben Seitenzahl. Hiernach erscheint die analoge für das Quadrat und den Kreis gefundene Eigenschaft nur als der Ausfluss einer auf alle regelmässigen Polygone anwendbaren Regel. Es versteht sich von selbst, dass die Biegung von derartigen Röhren bei einer die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung in allen Stellungen des Polygonquerschnittes unverändert bleibt.

Die am Schlusse des vorigen §. bemerkten Vorsichten bezüglich der Anwendung von Verstärkungen, Rippen u. s. w., sind bei Blechröhren im erhöhten Grade zu beobachten *).

§. 140.

Vergleichung der Steifigkeit von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren. Zur Vergleichung der Steifigkeit von Blechröhren mit rechteckigen und kreisrunden Querschnitten behalte man die Benennungen im vorigen §. bei, und bezeichne nur die correspodirenden Grössen mit den Zeigern 1 und 2.

Hiernach ist

für den rechteckigen Querschnitt nach den Formeln (241)

$$F_1 = 2 (B_1 + H_1) \beta_1 \text{ und } T_1 = \tfrac{1}{6} (H_1 + 3 B_1) \beta_1 H_1^2,$$

für den kreisrunden aber mit Rücksicht auf die Formel (243)

$$F_2 = \pi H_2 \beta_2 \text{ und } T_2 = \tfrac{1}{8} F_2 \beta_2^2 = \frac{\pi}{8} \beta_2 H_2^3,$$

also auch

$$T_1 : T_2 = 4 (H_1 + 3 B_1) \beta_1 H_1^2 : 3 \pi \beta_2 H_2^3 \quad . \quad . \quad (245).$$

---

*) Um die angenäherten Werthe für die Trägheitsmomente von Blechquerschnitten zu finden, ist die Kenntniss der bezüglichen genauen Formeln nicht nothwendig. Man kann auch unabhängig von diesen die Bestimmung jener Werthe vornehmen, indem man dabei den Querschnitt aus Linien zusammengesetzt sich vorstellt.

1. Nimmt man für beide Querschnitte gleiche Wanddicken, gleiche Höhen und gleiche Blechmengen an, nämlich $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$ und $F_1 = F_2$, so wird $B_1 = \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) H_1 = 0{\cdot}5708\, H_1$ und

$$\left.\begin{aligned} T_1 : T_2 &= 4\,(H_1 + 3\,B_1) : 3\,\pi H_2 \\ &= 2\,(3\,\pi - 4) : 3\,\pi \\ &= 1{\cdot}151 : 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (246).$$

Die vierkantige Röhre ist daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Röhrenhöhe und gleicher Blechmenge steifer, als die cylindrische.

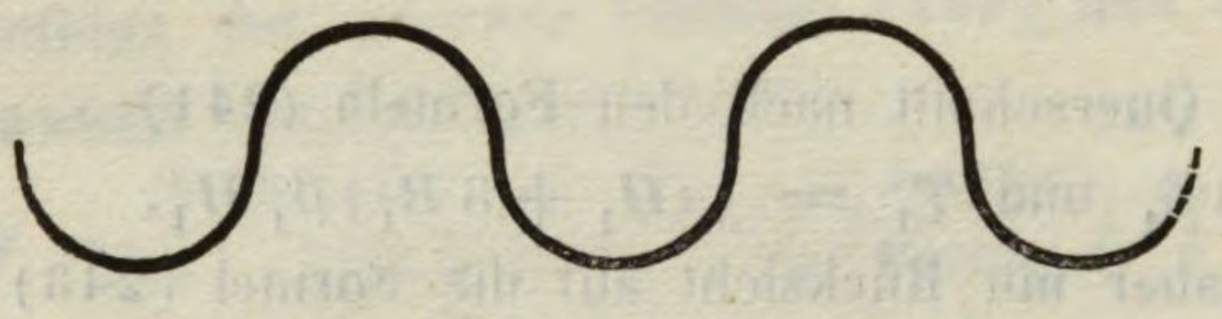
2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$, und setzt man auch in diesem Falle $\beta_1 = \beta_2$ und $F_1 = F_2$, also $4\,H_1 = \pi H_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (245) auf

$$\left.\begin{aligned} T_1 : T_2 &= 16\,H_1^3 : 3\,\pi H_2^3 \ldots \\ &= \pi^2 : 12 \ldots \\ &= 0{\cdot}822 : 1 \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (247).$$

Bei gleicher Wanddicke und gleicher Blechmenge ist daher die cylindrische Röhre steifer, als jene mit dem quadratischen Querschnitte.

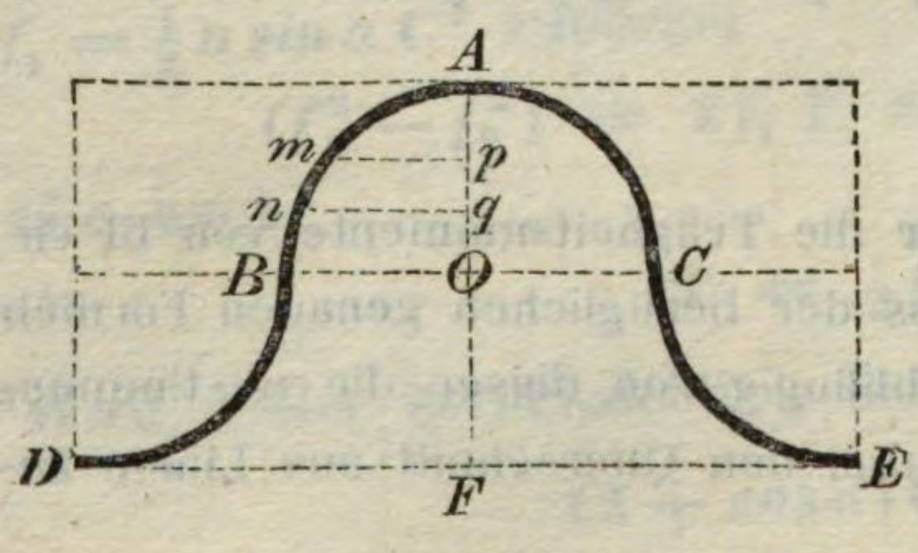
§. 141.

Fig. 198.



Cannelirtes Blech (Fig. 198). Derartiges Blech kann eine bedeutende Steifigkeit entwickeln. Der Querschnitt desselben besteht aus einer Reihe — in der Regel congruenter — Cannelirungen. Eine solche Cannelirung kann im Querschnitte (Fig. 199) als eine krumme Linie *D B A C E* angesehen werden, wenn — wie gewöhnlich — die Blechstärke β im Vergleiche zu den übrigen Dimensionen nur klein ist. Der Schwerpunct *O*, durch welchen die neutrale Axe zu ziehen ist, liegt in der halben Höhe.

Fig. 199.



Behufs der Untersuchung lege man durch A ein Coordinaten-System, bei welchem die Abscissen von A gegen O, und die Ordinaten normal darauf angenommen werden. Man nenne für ein beliebiges Curvenelement $\overset{\frown}{mn}$ die Länge desselben $\overset{\frown}{mn} = d\sigma$,

die Abscisse . . . . . $\overline{Ap} = x$,

die Ordinate . . . . . $\overline{mp} = y$,

die Abscissenzunahme . . . . . $\overline{pq} = dx$,

die Ordinatenzunahme . . . . . $nq - mp = dy$,

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe $\overline{BC}$ . . . . . dt,

ferner für den Curventheil $\overset{\frown}{AB}$

die Länge . . . . . $\overset{\frown}{AB} = \lambda$,

die Abscisse . . . . . $\overline{AO} = c$,

die Ordinate . . . . . $\overline{BO} = b$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{BC}$ . . . . . t.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man

$$d\sigma = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},\quad \lambda = \int_o^b d\sigma,\quad dt = \beta\, d\sigma\,(c - x)^2$$

und $t = \int_o^b dt$, wobei nach y zu integriren ist.

Wird die Form der Cannelirung parabolisch angenommen, daher die Curvengleichung $x = \frac{c}{b^2}y^2$ zu Grunde gelegt, so findet man wegen $\frac{dx}{dy} = \frac{2cy}{b^2}$, wenn zugleich das Verhältniss

$$\frac{2c}{b} = 2\,\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = n \text{ gesetzt wird,}$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2}b\left[\sqrt{1+n^2} + \frac{1}{n}\,log.\,nat.\,(n+\sqrt{1+n^2})\right]. \quad (248)^*)$$

*) Es ist nämlich allgemein

$$\sigma = \int dy\sqrt{1 + \frac{4c^2y^2}{b^4}} = \int dy\sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}y\sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}} + \frac{b}{2n}\,log.\,nat.\left[\frac{ny}{b} + \sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}}\right],$$

daher zwischen den Gränzen o und b

$$\lambda = \frac{b}{2}\left[\sqrt{1+n^2} + \frac{1}{n}\,log\;nat.\,(n+\sqrt{1+n^2})\right].$$

und $t=\frac{\beta b^2}{8}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda-(1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right]$ (249)*).
Werden diese Werthe viermal genommen, so bekommt man die Länge einer ganzen Cannelirung $DBACE=L$, und ihr Trägheitsmoment T. Demnach ist $L=4\lambda$ und $T=4t$. Auch wird der

---

*) Man hat allgemein

$$t=\beta\int d\sigma(c-x)^2=\beta\int dy\sqrt{\left(1+\frac{4c^2y^2}{b^4}\right)}\left(c-\frac{cy^2}{b^2}\right)^2=$$

$$=\frac{\beta c^2}{b^4}\int dy\sqrt{\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)}(b^2-y^2)^2.$$

Nun ist aber

$$\int dy\sqrt{\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)}(b^2-y^2)^2=$$

$$=b^4\int dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}-2b^2\int y^2dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}+\int y^4dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}},$$

$\int dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}=\sigma$, wie in der vorhergehenden Anmerkung,

$$\int y^2dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{b^2}{4n^2}\left[y\left(1+\frac{ny^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\int dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}\right]=$$

$$=\frac{b^2}{4n^2}\left[y\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\sigma\right],$$

endlich

$$\int y^4dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{b^2y}{2n^2}\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2-\frac{b^2}{4n^2}\right)+\frac{b^4}{8n^4}\int dy\sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{b^2y}{2n^2}\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2-\frac{b^2}{4n^2}\right)+\frac{b^4}{8n^4}\sigma,$$

also nach gehöriger Reduction

$$t=\tfrac{1}{8}\beta\left[b^2\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\sigma+y\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2-b^2-\frac{b^2}{4n^2}\right)\right],$$

und zwischen den Gränzen o und b

$$t=\frac{\beta b^2}{8}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda-(1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right].$$

Flächenraum F des Querschnittes Einer Cannelirung $F = L\beta$. So z. B. findet man für das Verhältniss $n = \frac{4}{3}$ *),

$$\lambda = \tfrac{1}{2} b \left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{3}{4} log.\ nat.\ 3\right) = 1{\cdot}245\, b \text{ und}$$

$$b = 0{\cdot}2638\, b^3 \beta, \text{ also auch}$$

$$L = 4\lambda = 4{\cdot}980\, b,\ F = L\beta = 4{\cdot}980\, b\beta \text{ und}$$

$$T = 1{\cdot}0552\, b^3 \beta.$$

Setzt man noch die ganze Höhe $\overline{AF} = 2c = H$, und beachtet, dass wegen $F = 4{\cdot}980\, b\beta$ und $H = 2c = nb = \frac{4}{3} b$, zunächst $\beta = \frac{F}{4{\cdot}980\, b}$ und $b = \frac{3}{4} H$, ferner $b^3 \beta = \frac{F}{4{\cdot}980} \cdot \frac{9}{16} H^2 = 0\ 1129\, F H^2$ wird, so erhält man statt des obigen Werthes für T auch

$$T = 0{\cdot}1191\, F H^2.$$

An den Coefficienten in dieser Formel (0 1191) lässt sich nunmehr die Berurtheilung über die mit dem cannelirten Blechquerschnitte zu erreichende Steifigkeit im Vergleiche zu dem Materialaufwande leicht anknüpfen. Man darf nämlich nur diesen Querschnitt mit einem Rechtecke von einerlei Höhe und Flächenraum vergleichen, und sich vergegenwärtigen, dass für das Rechteck jener Coefficient bloss den Werth von $\frac{1}{12} = 0{\cdot}0833$ annimmt, woraus ersichtlich wird, dass die Steifigkeit der Cannelirung nach der Höhenrichtung des Querschnittes bedeutend grösser ist. Zugleich gewährt dieselbe den besonderen Vortheil, dass sie leichter in der Form erhalten werden kann.

II. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein Tragvermögen unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll.

§ 142.

Hauptsatz. Das Tragvermögen eines Trägers steht unter sonst gleichen Umständen im geraden Verhältnisse zu dem Tragmomente M des Querschnittes, welches aus der Relation (95)

---

*) In der k. k. landesbefugten Fabrik von Winiwarter und Gersheim zu Gumpoldskirchen in Nieder-Oesterreich werden cannelirte Bleche erzeugt, welchen das Verhältniss $n = \frac{4}{3}$ entspricht Bei jenen Blechen ist nämlich $\overline{AO} = c = \frac{1}{2}''$ und $\overline{BO} = b = \frac{3}{4}''$, also in der That

$$n = \frac{2c}{b} = \frac{1''}{(\frac{3}{4})''} = \frac{4}{3}.$$

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{aT}{k} \\ \text{oder } \frac{rT}{k''} \end{cases}$$

derart zu bestimmen ist, dass man von den beiden Alternativ-Werthen den kleineren wählt.

Eine Querschnittsform erscheint daher bezüglich des Tragvermögens desto zweckmässiger, je grösser bei einer gegebenen Höhe der kleinere von jenen Alternativ-Werthen ist.

§. 143.

Folgerung. Um die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform in dem obigen Sinne kennen zu lernen, bemerke man, dass nach dem §. 77 das Tragmoment stets auf die Form

$$M = \begin{cases} \text{entweder } C \,.\, aFH \\ \text{oder } C' \,.\, rFH \end{cases}$$

gebracht werden kann, wobei die Coefficienten C und C' nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Der massgebende Werth für das Tragmoment wird daher bei einem gegebenen Flächenraum F und bei einer gegebenen Materialgattung desto grösser, je grösser die Höhe H und der betreffende Coefficient sind. Ueberdiess hat man nach dem zweiten Kapitel dieses Abschnittes in Erwägung zu ziehen, ob die Biegungscurve nur nach einer Seite gekrümmt ist, oder ob dieselbe auch Wendepuncte besitzt, weil von diesem Umstande die Lage des gefährlichen Querschnittes, von dieser Lage aber das Tragmoment abhängt.

§. 144.

Zweckmässigste Höhe H. Hinsichtlich der Wahl der Höhe für einen Querschnitt behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens gilt der Hauptsache nach dasselbe, was bereits im § 132 angeführt wurde. Auch hat man in dem Falle, wenn die Anspruchsnahme des Trägers nach mehreren Richtungen eintreten kann, darauf Bedacht zu nehmen, dass das Tragvermögen nach allen solchen Richtungen entsprechend gross werde. In dieser Hinsicht können z. B. für rotirende Wellen regelmässige Polygone eine zweckmässige Anwendung finden.

§. 145.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens, wenn die Biegungscurve keinen Wendepunct hat.

Kehrt man zu den Betrachtungen im §. 133 zurück, so leuchtet ein, dass bei einer gegebenen Höhe des Querschnittes auch das Maximum des Tragmomentes auf die dort angegebene Weise erreicht würde, wenn man nämlich im Stande wäre, die Fläche des Querschnittes an den beiden Enden der Höhe in zwei gerade Linien $\overline{A'A''}$ und $\overline{B'B''}$ (Fig. 178) zu drängen. Nur kömmt hier neuerdings zu erörtern, welches Verhältniss zwischen den Flächentheilen f' und f'' als das zweckmässigste anzusehen ist. Es wurde bereits im §. 133 gesagt, dass dieser Fall ein imaginärer sei, dass aber die demselben entsprechenden Resultate als Anhaltspuncte benützt werden können, um die Bedingungen zu erfahren, welche man bei der zweckmässigsten Vertheilung des Flächenraumes in einem Querschnitte zu erfüllen hat. Hiernach ist zu untersuchen, für welche Werthe von f' und f'' das Tragmoment des Querschnittes ein Maximum wird. Zu diesem Behufe beachte man, dass nach der Gleichung (228) das Trägheitsmoment $T = h' h'' F$, also das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{a\,T}{h'} = aFh'' \\ \text{oder } \dfrac{r\,T}{h''} = rFh' \end{cases}$$

zu setzen, von diesen beiden Werthen aber stets der kleinere zu wählen ist. Da nun $h' + h'' = H$ eine constante Grösse ist, daher von den beiden Werthen aFh'' und rFh' der eine zunimmt, wenn der andere abnimmt, und umgekehrt, so begreift man, dass das grösste Tragmoment in dem Augenblicke erreicht wird, wenn diese beiden Werthe einander gleich werden, d. i. wenn die Relation

$$ah'' = rh' \text{ oder } \frac{a}{h'} = \frac{r}{h''} \text{ oder auch } h' : h'' = a : r$$

vorhanden ist. Dieser Bemerkung gemäss findet man einerseits wegen $h' + h'' = H$

$$h' = \left(\frac{a}{a+r}\right) H \text{ und } h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right) H \quad . \quad . \quad (250),$$

und andererseits wegen $f' : f'' = h'' : h' = r : a$ und $f' + f'' = F$

$$f' = \left(\frac{r}{a+r}\right) F \text{ und } f'' = \left(\frac{a}{a+r}\right) F \quad . \quad . \quad (251),$$

endlich das grösste Tragmoment selbst

$$M = a f' H = r f' H = r F h' = a F h'' = \left(\frac{a r}{a+r}\right) F H \quad (252).$$

Aus diesen Resultaten geht hervor, dass das Tragvermögen eines Trägers bei einem gegebenen Flächenraume seines Querschnittes und bei einer gegebenen Höhe desselben desto grösser wird:

1. Je weiter die einzelnen Querschnittstheile von der neutralen Axe entfernt liegen, und

2. je näher zugleich das Verhältniss zwischen den beiden Flächentheilen f' und f'' demjenigen kommt, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung r und der grössten zulässigen Spannung a stattfindet.

Der ersten Bedingung kann, wie schon im §. 133 gesagt wurde, nur bis zu einem gewissen Grade entsprochen werden. Die zweite Bedingung hängt offenbar mit der Materialgattung zusammen, führt aber immer auf die Gleichung $a f' = r f''$, wornach zur Erreichung des Maximal-Tragmomentes die grösste zulässige Spannung des Querschnittes f' in $\overline{A' A''}$ eben so gross, wie die grösste zulässige Pressung des Querschnittes f'' in $\overline{B' B''}$, also in beiden Flächentheilen $\overline{A' A''}$ und $\overline{B' B''}$ die Elasticitätsgränze gleichzeitig erreicht werden muss.

Bei der Anwendung, wo man sich vor Allem über die zu Grunde zu legenden Grössen a und r zu einigen hat, ist vorzugsweise zu berücksichtigen, dass die grösste zulässige Pressung pr. □″ (r) nicht immer nach dem Widerstande kurzer Stücke bemessen werden darf. Wenn nämlich die der Zusammendrückung ausgesetzte Fläche f'' in $\overline{B' B''}$ verhältnissmässig nur geringe Dimensionen hat, so muss man darauf sehen, dass diese Fläche auch in ihrer Form sich erhalte, und nicht etwa ein Verbiegen oder Ausweichen derselben nach der Seite zu besorgen sei. Aus diesem Grunde wird es in den meisten Fällen nothwendig sein, die Pressung r pr. □″ in jener Fläche $\overline{B' B''}$ nicht so weit zu treiben, als sie mit Rücksicht auf den eigentlichen Widerstand gegen das Zusammendrücken zulässig wäre, so dass z. B. für

Schmiedeeisen das Verhältniss $\frac{a}{r}$ je nach Umständen $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$ u. s. w. werden kann, obgleich dasselbe in der Regel der Einheit näher liegt, wenn man die Pressung nur auf ganz kurze Stücke bezieht. Die Feststellung des Werthes von r hängt somit auch von dem Grade der Steifigkeit des Querschnittstheiles $\overline{B'B''}$ ab, auf welche durch geeignete Massregeln möglichst hinzuwirken ist. Diess kann auf verschiedene Weise geschehen. Verstrebungen und Rippen werden jedenfalls nützliche Dienste leisten. Ausserdem aber stellt sich die Anwendung der Zellenform (Fig. 200) als sehr vortheilhaft dar; denn man hat im §. 136 gesehen, dass diese eine bedeutende Steifigkeit besitzt. In der Figur 200 ist der gespannte Querschnittstheil $\overline{A'A''}$ unten, der gepresste zellenförmige Theil aber oben angenommen, wie in dem Falle, wenn der Träger an den beiden Enden aufliegt. Beabsichtigt man auch dem gespannten Querschnittstheile $\overline{A'A''}$ eine erhöhte Steifigkeit zu geben, so kann man denselben gleichfalls zellenförmig construiren (Fig. 201).

Fig. 200.

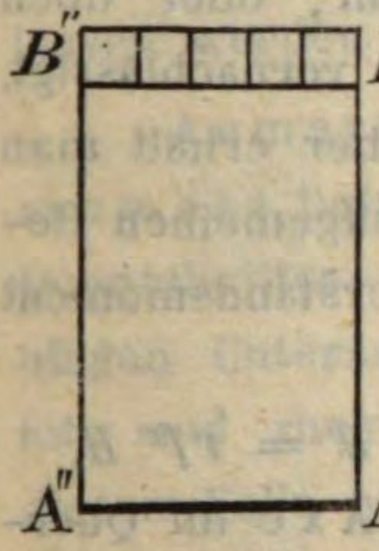
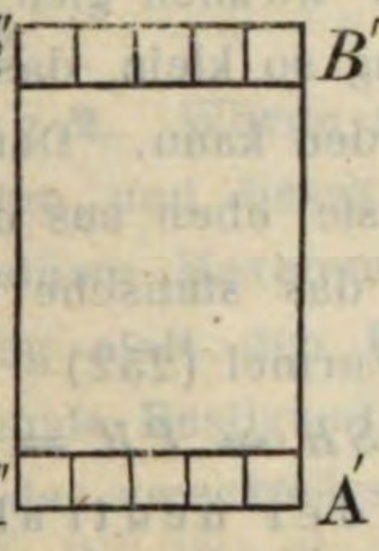


Fig. 201.



Diese Bemerkungen stimmen mit der Erfahrung vollkommen überein. Der Engländer Fairbairn hat in der That durch seine Versuche mit schmiedeeisernen Röhren die Zweckmässigkeit der in den Figuren 200 und 201 dargestellten Querschnittsformen, und zugleich nachgewiesen, dass die vortheilhafteste Vertheilung der Querschnittsfläche F in die beiden Theile f' und f'' nach dem Verhältnisse der pr. $\square''$ anzuhoffenden Widerstände gegen Zusammendrückung und gegen Ausdehnung geschehen muss, wenn das Maximum des Tragvermögens erreicht werden soll, also gerade so, wie diess die Formeln (251) lehren. Für das Verhältniss $\frac{f''}{f'}$ haben die Versuche Fairbairn's beiläufig $\frac{5}{4}$ ergeben, was gleichfalls mit den obigen Bemerkungen im Einklange steht. Man wird in der Folge bei der Berechnung der sogenannten Röhrenbrücken, wo Fairbairn die Querschnittsform (Fig. 201) in Anwendung gebracht hat, auf diese besondere Construction zurückkommen.

Anmerkung 1. Dass die oben gefundenen Resultate für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in dem Querschnitte zur Erreichung des grössten Tragvermögens richtig sind, folgt auch aus einer ganz einfachen Anschauung. Soll nämlich das Materiale im Querschnitte an beiden Enden der Höhe angebracht werden, und dabei die zweckmässigste Vertheilung stattfinden, so dürfen die Querschnittstheile f' und f'' nicht grösser sein, als es absolut nothwendig erscheint, woraus zu schliessen ist, dass in diesem Falle in beiden Theilen die Elasticitätsgränze gleichzeitig erreicht, dass also in dem Querschnittstheile f' die Totalspannung $S = af'$, in dem Querschnittstheile f'' aber die Totalpressung $P = rf''$ hervorgerufen wird. Diese Anspruchsnahmen kommen selbstverständlich nur in dem gefährlichen Querschnitte vor; für diesen ist aber der in der Gleichung (29) ad §. 43 bezeichnete Winkel φ entweder wirklich gleich Null, oder doch wegen der jedenfalls nur geringen Biegung so klein, dass er vernachlässigt, und in Folge dessen $S = P$ gesetzt werden kann. Dann aber erhält man $af' = rf''$, also dieselbe Relation, wie sie oben aus der allgemeinen Betrachtung gefunden wurde. Zugleich ist das statische Widerstandsmoment (Tragmoment) übereinstimmend mit der Formel (252)

$$M = Sh' + Ph'' = S(h' + h'') = SH = PH = af'H = rf'H.$$

Offenbar hat in diesem Falle die Lage der neutralen Axe im Querschnitte auf die Grösse des Tragmomentes keinen Einfluss, weil dasselbe nur von der Summe $h' + h''$ abhängt, diese aber stets der ganzen Querschnittshöhe H gleich ist.

Diese Darstellung, vereint mit den Resultaten der im Grossen angestellten Versuche Fairbairn's bestätigen die Richtigkeit der im §. 77 aufgestellten Berechnungsmethode für das Tragmoment eines Querschnittes mittelst Anwendung von Alternativwerthen; denn es leuchtet ein, dass nur auf diese Weise die Relationen (250), (251) und (252) gefunden werden konnten.

Die nicht allgemeine Giltigkeit der den Theorien Redtenbacher's und Navier's entsprechenden Formeln für das Tragvermögen zeigt sich hier auf eine unzweideutige Weise.

Nach Redtenbacher wäre nämlich das Tragmoment stets durch die Formel $M = \frac{aT}{h'}$ auszudrücken, wenn man, wie bisher, a die grösste Spannung des Materiales per □″, und h' den Abstand der gespanntesten Fasern von der neutralen Axe bezeichnen lässt. Wegen $T = Fh'h''$ würde daher das Tragmoment $M = aFh''$ am grössten für $h'' = H$ und $h' = o$, d. h. in dem Falle, wenn der ganze Querschnitt lediglich auf der gespannten Seite in $\overline{A'A''}$ concentrirt, sonach auf der anderen Seite keiner vorhanden wäre. Dieses Resultat widerspricht nicht nur den Versuchen, sondern schon der einfachen Anschauung, und erklärt sich dadurch, weil nach dieser Berechnung auf den grössten zulässigen Widerstand gegen Zusammendrückung

keine Rücksicht genommen wird. (Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 122 und 123.) Man bemerkt zugleich, dass das nach der Theorie Redtenbacher's entstehende Resultat $f' = F$ und $f'' = o$ aus den Formeln (251) für $r = \infty$ folgt, welche Bemerkung mit der auf Seite 132 im Einklange steht.

Betreffend die Theorie Navier's, so wäre nach dieser in der Formel für das Tragmoment auch nur die Spannung a einzuführen, hingegen stets durch den Abstand der entferntesten Fasern von der neutralen Axe zu dividiren, welches Verfahren zu Folge der Anmerkung auf Seite 125 mit der Bedingung $a = r$ correspondirt. In diesem Falle würde das grösste Tragvermögen immer für $f' = f'' = \frac{F}{2}$ zum Vorschein kommen, was zwar unter besonderen Umständen richtig sein, im Allgemeinen aber nicht zugelassen werden kann.

Anmerkung 2. Würde man statt dem Tragmomente das Bruchmoment betrachten, und dieses durch die zweckmässigste Vertheilung des Querschnittes zu einem Maximum machen wollen, so hätte man in der obigen Untersuchung statt den Elasticitätsgränzwerthen a und r die absolute und rückwirkende Eestigkeit A und R des Materiales einzuführen. In diesem Falle wäre das zweckmässigste Verhältniss zwischen f' und f'' nach dem Verhältnisse $R : A$ zu bestimmen, somit $Af' = Rf''$, d. i. die absolute Festigkeit des gezogenen Theiles in $A'A''$ gleich der rückwirkenden Festigkeit des gepressten Theiles in $B'B''$ zu setzen. Da es sich jedoch in der Praxis nicht um den Bruch, sondern vielmehr um die vollkommene Sicherheit des Trägers handelt, so darf man sich bei der Feststellung der Bedingung für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte nur zwischer den Elasticitätsgränzen bewegen, wesshalb man in der Anwendung jedenfalls das Verhältniss $\frac{a}{r}$, nicht aber jenes zwischen A und R, als massgebend zu betrachten hat.

Nachdem man die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung zur Erreichung des grössten Tragvermögens kennen gelernt hat, werden nunmehr die vorzüglichsten der in dieser Beziehung zweckmässigen Querschnitte betrachtet werden.

§. 146.

Querschnittsform Fig. 202. Diese Querschnittsform ist dieselbe, wie die im § 134 betrachtete, und es entspricht ihr das Trägheitsmoment $T = \frac{(1 + n + n^2)}{12} FH^2$. Das Tragmoment M dieser Figur ist daher wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H$

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}(1+n+n^2)\,a\,F\,H \\ \text{oder } \frac{1}{6}(1+n+n^2)\,r\,F\,H. \end{cases}$$

Fig. 202.

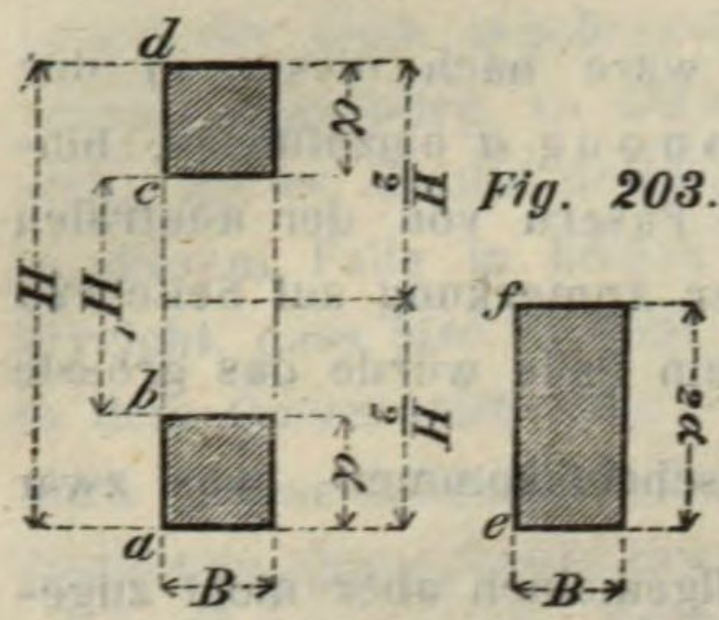


Fig. 203.

Für ein Rechteck von gleicher Höhe H und gleichem Inhalte F (Fig. 203) wäre das Tragmoment M' nach der Relation (96)

$$M' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\,a\,F\,(2\alpha) \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,r\,F\,(2\alpha). \end{cases}$$

Vergleicht man die Tragmomente der Figuren 202 und 203, und lässt man in beiden Fällen die Pressung r in gleicher Intension zu, so erhält man die Proportion

$$M' : M = 2\alpha : (1+n+n^2)\,H,$$

welche, wenn (wie im §. 134) $\frac{2\alpha}{H} = x$ und $n = (1-x)$ gesetzt wird, in folgende übergeht:

$$M' : M = x : (3-3x+3x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (253).$$

Insbesondere ist

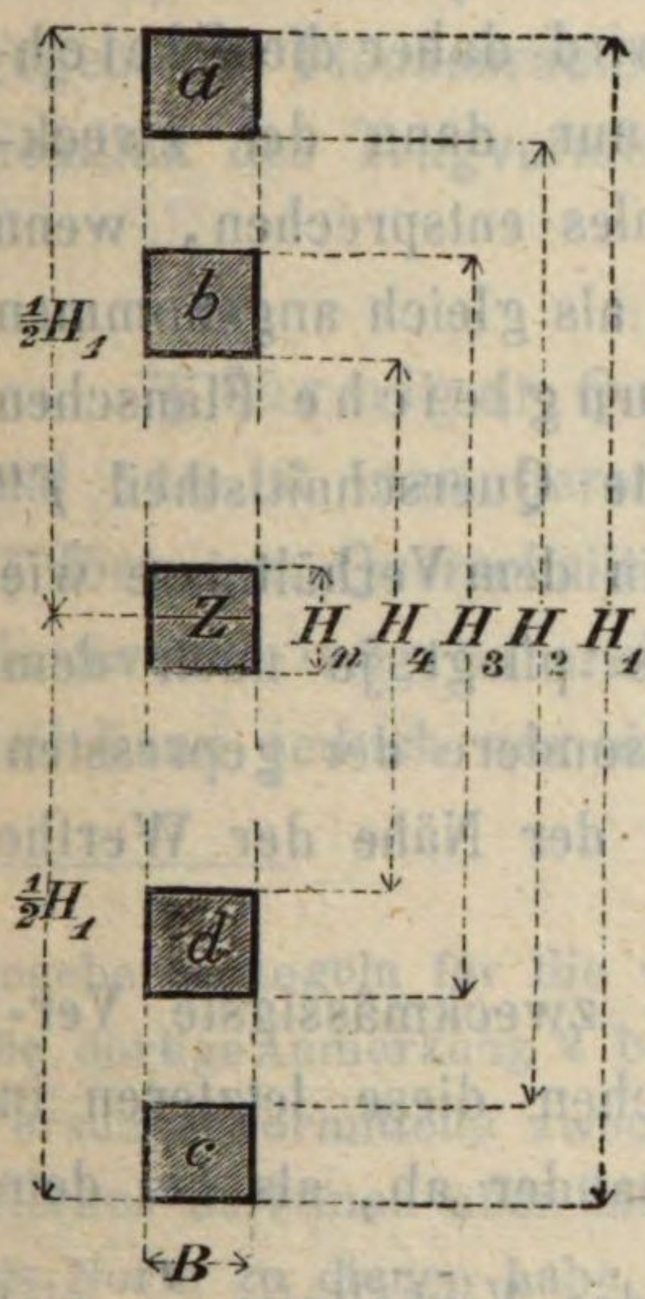
für $x = 1$, $\alpha = 0{\cdot}50\,H$ und $M' : M = 1 : 1$
„ $x = 0{\cdot}9$, $\alpha = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}233$
„ $x = 0{\cdot}8$, $\alpha = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}549$
„ $x = 0{\cdot}7$, $\alpha = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}986$
„ $x = 0{\cdot}6$, $\alpha = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}6$
„ $x = 0{\cdot}5$ $\alpha = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 3{\cdot}5$
„ $x = 0{\cdot}4$, $\alpha = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 4{\cdot}9$
„ $x = 0{\cdot}3$, $\alpha = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 7{\cdot}3$.

Das Verhältniss (253) gestaltet sich für die Querschnittsform 202 desto günstiger, d. h. das Tragvermögen wird desto bedeutender je kleiner x, also je grösser der leere Raum zwischen den vollen Flächentheilen im Vergleiche zu diesen selbst ist. Die Vergrösserung des leeren Raumes hat jedoch, wie schon im §. 134 bemerkt wurde, in jedem besonderen Falle eine practische Gränze, die an die Bedingungen im §. 41 gebunden ist.

Die Anordnung von gleich grossen Querschnittstheilen oben und unten, wie in der Figur 202, ist übrigens nicht immer die vortheilhafteste. Aus dem Inhalte des vorigen §. geht nämlich hervor, dass zur möglichsten Vermehrung des Tragvermögens das Grössenverhältniss zwischen dem gespannten und dem gepressten Querschnitts-

theile nach dem Verhältnisse der Elasticitätsgränzwerthe r und α angeordnet werden soll. Dadurch erhält man im Allgemeinen oben und unten ungleich grosse Querschnittstheile, und es ist sodann das Tragmoment mit Benützung der Formeln (188) nach Anleitung des §. 77 zu bestimmen.

Fig. 204.



§. 147.

Querschnittsform Fig. 204. Diese Querschnittsform ist mit der im §. 135 betrachteten identisch. Für dieselbe wird wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H_1$ das Tragmoment

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \ \dfrac{2aT}{H_1} \\ \text{oder} \ \dfrac{2rT}{H_1} \end{array} \right\} \quad . \quad (254),$$

wobei man das Trägheitsmoment T nach der Gleichung (234) zu berechnen hat.

Für den besonderen Fall, in welchem alle vollen und alle leeren Räume die gleiche Höhe α besitzen, wird nach der Gleichung (235)

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \ \dfrac{(4n^2-3)}{6(2n-1)^2} \, aFH_1 \\ \text{oder} \ \dfrac{(4n^2-3)}{6(2n-1)^2} \, rFH_1 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (255).$$

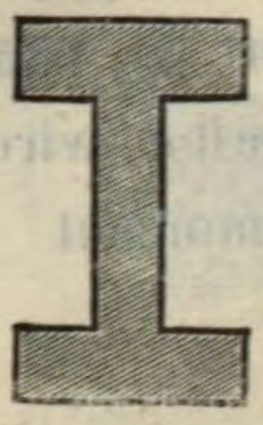
Setzt man in diese Relation $n = 2, 3, 4$, etc., so erhält man für den Coefficienten $\dfrac{(4n^2-3)}{6(2n-1)^2}$ die entsprechenden Werthe, welche das Doppelte von jenen betragen, die für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes im §. 135 gefunden wurden. Die dortige Schlussbemerkung gilt auch gegenwärtig.

§. 148.

I förmiger Querschnitt. Mit Rücksicht auf den §. 145 ist es zweckmässig, das die beiden Flanschen verbindende Mittelstück nach Zulässigkeit dünn zu machen ,und den Querschnitt f' der gespannten Flansche zu dem Querschnitte f'' der gepressten Flansche

in ein solches Verhältniss zu bringen, welches zwischen den Elasticitätsgränzwerthen r und a stattfindet. Von diesen Werthen wird die grösste zulässige Pressung r desto kleiner anzunehmen sein, je geringer die Flanschendicke im Vergleiche zur ganzen Querschnittshöhe ist, und je weniger durch künstliche Mittel (Verstrebungen, Rippen) der Formveränderung des Querschnittes entgegengewirkt wird.

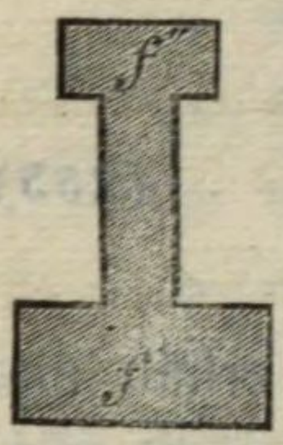
Fig. 205.



Bei dem Schmiedeeisen wird daher die Gleichheit der Flanschen (Fig. 205) nur dann der zweckmässigsten Vertheilung des Materiales entsprechen, wenn die Elasticitätsgränzwerthe a und r als gleich angenommen werden können. Sonst aber sind ungleiche Flanschen vortheilhafter, wobei der gepresste Querschnittstheil f'' im Vergleiche zu dem gespannten Theile f', in dem Verhältnisse wie $r:a$ zu vergrössern ist. Dieses Verhältniss pflegt je nach dem Grade der Steifigkeit des Querschnittes (insbesondere der gepressten Flansche) und je nach der Materialqualität in der Nähe der Werthe $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, zu liegen.

Bei dem Gusseisen weichen für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den beiden Flanschen diese letzteren in ihrer Grösse weit mehr von einander ab, als bei dem Schmiedeeisen, weil bei jenem das Verhältniss $\frac{r}{a}$ viel grösser ist. Dieses Verhältniss wird nämlich bei dem Gusseisen je nach der Materialqualität und je nach dem Grade der Steifigkeit der Querschnittsform in der Nähe der Zahlen 2, 3, 4 liegen, wesshalb die der Spannung ausgesetzte Flansche f' (Fig. 206) $\frac{r}{a}$ (beispielsweise 2, 3, 4) mal so gross zu machen ist, wie die gepresste Flansche f'' *).

Fig. 206.



*) Zahlreiche Versuche des Engländers Hodgkinson haben gezeigt, dass bei gusseisernen Trägern mit I förmigen Querschnitten zur Erreichung der grössten relativen Festigkeit (Bruchbelastung) das zweckmässigste Verhältniss zwischen den beiden Flanschen f' und f'' ungefähr jenes sei, welches zwischen der rückwirkenden Festigkeit R und der absoluten Festigkeit A des Gusseisens existirt. Dieses Resultat, obgleich sich dasselbe auf den Bruch bezieht, bestätigt doch neuerdings die Richtigkeit der im §. 145

Die Bestimmung des Tragvermögens für ⊥ förmige Träger mit ungleichen Flanschen unterliegt nach der im §. 77 gegebenen Regel keinem Anstande, weil das Trägheitsmoment eines derartigen Querschnittes mit Hilfe der betreffenden Gleichung (186) berechnet werden kann.

Die Betrachtungen in diesem §. sind geeignet, auf ähnliche Weise, wie im §. 136, die Zweckmässigkeit des Zertheilens eines gegebenen Flächenraumes in mehrere gleiche ⊥ Formen auch rücksichtlich des Tragvermögens nachzuweisen.

§. 149.

⊤ förmiger Querschnitt. Mit Beziehung auf die §§. 137 und 145 ist man berechtigt, unter gewissen Umständen auch den ⊤ förmigen Querschnitt behufs des zu erreichenden Tragmomentes als zweckmässig zu erklären. Ueber den Grad dieser Zweckmässigkeit kann jedoch nur eine nähere Untersuchung Aufschluss geben. So

---

gegebenen Regeln für die vortheilhafteste Querschnittsvertheilung, wenn man die dortige Anmerkung 2 berücksichtigt. Das von Hodgkinson aus seinen Versuchen ermittelte zweckmässigste Verhältniss zwischen f' und f'' war 6 : 1. Hieraus darf man aber nicht schliessen, dass in der Praxis dieses Resultat als Norm zu dienen habe, und zwar aus folgenden Gründen:

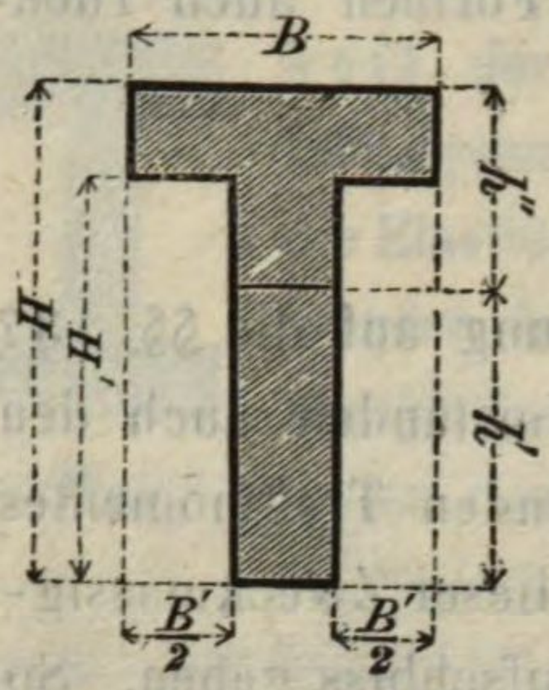
1. Ist das Verhältniss $\frac{R}{A}$ nicht immer $= 6$, indem dasselbe nach der Qualität des Gusseisens variirt;

2) ist jenes Verhältniss selbst bei einer gewissen Qualität des Gusseisens noch mit der näheren Gestalt und Grösse des ⊥ förmigen Querschnittes insoferne veränderlich, als der Werth für R nicht immer nach der Festigkeit kurzer Stücke bemessen werden darf, sondern nach der geringeren oder grösseren Steifigkeit der Flanschen mehr oder weniger herabzumindern ist, um kein Verbiegen derselben besorgen zu dürfen;

3. endlich ist, wie schon in der Anmerkung 2 ad §. 145 angeführt wurde, für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens nicht das Verhältniss zwischen den Festigkeiten A und R, sondern jenes zwischen den betreffenden Elasticitätsgränzwerthen a und r massgebend, daher in der Praxis dieses, und nicht das von $A : R$, als Anhaltspunct zu dienen hat, nachdem dieselbe das grösste sichere Tragvermögen, nicht aber die grösste Bruchfestigkeit beabsichtigt.

viel ist übrigens vorauszusehen, dass die Formverhältnisse der Materialgattung anzupassen sein werden. Indem nämlich das Tragmoment des Querschnittes im Allgemeinen mittelst Alternativwerthen auszudrücken ist, kann es geschehen, dass zur Erreichung des grössten Tragmomentes bald der eine, bald der andere jener Alternativwerthe zu einem Maximum gemacht werden muss, je nachdem einer von beiden nach Verschiedenheit der Materialgattung das Tragmoment vorstellt. Diese zwei Fälle sind daher abgesondert zu betrachten.

Fig. 207.



1. Ist bei dem zu verwendenden Materiale $r \gtreqless a$ (wie z. B. bei dem Schmiedeeisen), so wird diejenige Stellung des Querschnittes (Fig. 207) die vortheilhaftere sein, wo die Fasern an der schmalen Seite der ⊤ Form ausgedehnt, und jene an der breiten Seite zusammengedrückt werden. Sodann wird das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{aT}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{aT}{h''}. \end{cases}$$

Ist ferner, wie in der Regel für Schmiedeeisen, $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, also der erste Alternativwerth der kleinere, so hat man das Tragmoment

$$M = \frac{aT}{h'}, \text{ oder}$$

$$M = \frac{4(1-mn)(1-mn^3) - 3(1-mn^2)^2}{6(1-mn)(1-mn^2)} aFH \quad . \quad (256),$$

zu setzen, wenn man die Relationen (187) für h' und T berücksichtigt, und die dort mit m und n bezeichneten Verhältnisszahlen beibehält.

Es entsteht nunmehr die Frage, für welche Werthe von m und n das grösste Tragmoment des Querschnittes erreicht werden kann, wenn seine grösste Breite B, seine grösste Höhe H und sein Flächenraum F gegeben ist. Zur Beantwortung dieser Frage hat man, wie im §. 137, die Grössen B, H und F als constant, m und n aber als variabel zu betrachten. Setzt man auch hier, wie in jenem §.,

$m n = \gamma = 1 - \frac{F}{B H}$, so wird zunächst das Tragmoment

$$M = \frac{4(1-\gamma)\ (1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2}{6(1\quad \gamma)\ (1-\gamma n)} a F H$$

und dasselbe ein Maximum für

$$\frac{dM}{dn} = \frac{\gamma a F H}{6(1-\gamma)\ (1-\gamma n)^2}\left[(7-4\gamma) - 2(4-\gamma)n + \gamma(4-\gamma)n^2\right] = 0,$$

daher für

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{2(1-\gamma)}{\sqrt{4-\gamma}}\right] \\ \text{und } m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma}{(7-4\gamma)}\left[4 - \gamma + 2(1-\gamma)\sqrt{4-\gamma}\right] \end{aligned}\right\} \quad (257),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2 M}{dn^2}$ negativ ausfällt.

Mit Hilfe dieses besonderen Werthes von n erhält man das gesuchte Maximal-Tragmoment

$$M = \tfrac{2}{3}\left(\frac{2-\sqrt{4-\gamma}}{\gamma}\right) a F H \quad (258).$$

Auch ist $H' = n H$ und $B' = m B$, ferner die Dicke des horizontalen Stückes

$$\left.\begin{aligned} (H-H') &= (1-n) H = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) H \\ \text{und jene des verticalen} \\ (B-B') &= (1-m) B = \left(\frac{1-\gamma}{7-4\gamma}\right)(7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma})\, B, \end{aligned}\right\} \quad (259),$$

so wie das Verhältniss beider Dicken

$$(H-H') : (B-B') = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) H : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right) B.$$

Endlich hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Gleichungen

$$h' = \frac{1}{\sqrt{4-\gamma}} H \text{ und } h'' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4-\gamma}}\right) H \quad (260).$$

Wird nach diesen Werthen die ⊤ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen H, B und F das grösste Tragvermögen, wenn unter diesen Umständen das Tragmoment M in der That durch den Ausdruck $\frac{a T}{h'}$ vorgestellt wird.

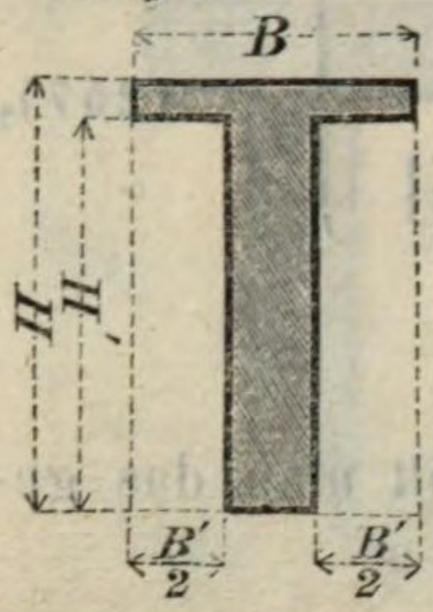
Sei z. B., wie im §. 137, $B = 4''$, $H = 6''$, $F = 8\ \square''$, $mn = 1 - \frac{F}{BH} = \gamma = \frac{2}{3}$, so findet man aus den obigen Formeln

$n = 0{\cdot}9524$	$H' = 5''{\cdot}714$	$(H-H') = 0''{\cdot}286$	$h' = 0{\cdot}548\,H$
$m = 0{\cdot}7000$	$B' = 2''{\cdot}8$	$(B-B') = 1''{\cdot}2$	$h'' = 0{\cdot}452\,H$

und

$$M = 0{\cdot}1743\,a\,F\,H.$$

Fig. 208.



Diese beispielsweisen Formverhältnisse, welche in der Fig. 208 anschaulich gemacht sind, erscheinen als die zweckmässigsten für einen schmiedeeisernen Träger, wenn hierbei $\frac{aT}{h'}$ nicht grösser, als $\frac{rT}{h''}$, daher

$$\frac{a}{0{\cdot}548} \lesseqgtr \frac{r}{0{\cdot}452}$$ wird, was in der Regel der Fall ist.

Da γ zwischen den Gränzen 0 und 1 variiren kann, so ergeben sich für die vortheilhaftesten Formverhältnisse gewisse Gränzen. Es wird nämlich

für $\gamma = 0$ . . . $(H-H') : (B-B') = \frac{1}{8} H : B$

und $h' : h'' = 1 : 1$,

für $\gamma = 1$ aber $(H-H') : (B-B') = H : 2(1+\sqrt{3})\,B$

$= H : 5{\cdot}4641\,B$,

und $h' : h'' = 1 : (\sqrt{3}-1)$

$= 1 : 0{\cdot}7321$.

Die Formeln (259) zeigen, dass bei der zweckmässigsten Anordnung einer ⊤ Form die Dicke der horizontalen und jene der verticalen Wand im Allgemeinen ungleich ausfällt. Verlangt man jedoch, dass diese Dicken gleich werden sollen, so ist das Verhältniss zwischen der Breite B und der Höhe H nicht mehr willkürlich. Man hat sodann wegen $(B-B') = (H-H')$ allgemein

$$B : H = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right),$$

und dieses Verhältniss variirt je nach den verschiedenen Werthen von γ zwischen den Gränzen

$$1 : 8 \text{ und } 1 : 2\,(1+\sqrt{3}) = 1 : 5{\cdot}4641.$$

So z. B. wäre für $\gamma = \frac{2}{3}$ $B : H = 0{\cdot}048 : 0{\cdot}3 = 1 : 6{\cdot}25$.

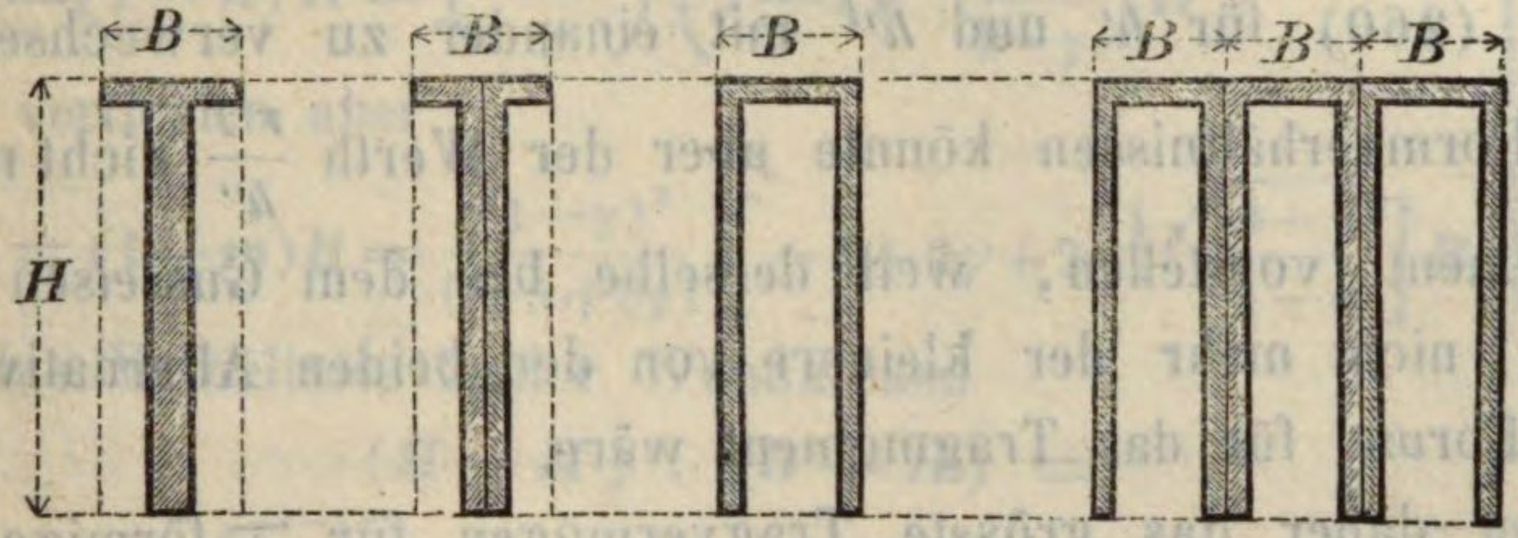
Verlangt man hingegen, dass die Dicke der horizontalen Wand nur halb so gross, als jene der verticalen sein soll, so ist wegen

$(B - B') = 2\,(H - H')$ allgemein zu setzen

$$B : H = \frac{2}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right).$$

So z. B. wäre für $\gamma = \frac{2}{3}$ dieses Verhältniss $B : H = 1 : 3{\cdot}125$ (Fig. 209).

Fig. 209. *Fig. 210.* *Fig. 211.* *Fig. 212.*



Durch die Theilung der verticalen Wand in zwei gleiche Theile wird man auch auf die Querschnittsformen Fig. 210 und 211 geführt, wenn man sich in der letzten Figur die beiden verticalen Theile auseinander geschoben vorstellt. Diese Querschnittsformen sind darum bemerkenswerth, weil die betreffenden Träger aus gleich dicken Eisenstücken construirt werden können. Auch die Aneinanderreihung mehrerer solcher Querschnitte (Fig. 212) kann mit Vortheil geschehen. Werden die Wände sehr dünn, so geht das obige Verhältniss zwischen B und H über in $1 : (1 + \sqrt{3}) = 1 : 2{\cdot}7321$.

2. Ist das Materiale des $\top$ förmigen Trägers Gusseisen, so ist diejenige Querschnittslage die vortheilhaftere, wo die Ausdehnung an der breiten Seite der $\top$ Form und die Zusammendrückung an der schmalen Seite stattfindet. Sodann ist das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{a\,T}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{r\,T}{h''}, \end{cases}$$

und dabei mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in den Relationen (187)

$$h' = \frac{(1 - 2mn + mn^2)}{2\,(1-mn)}\,H, \quad h'' = \frac{(1-mn^2)}{2\,(1-mn)}\,H,$$

$$\text{und } T = \frac{4\,(1-mn)\,(1-mn^3) - 3\,(1-mn^2)^2}{12\,(1-mn)^2}\,F\,H^2.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass in diesem Falle der erste Alternativwerth $\frac{a\,T}{h'}$ zu einem Maximum zu machen ist,

wenn man die Frage zu beantworten hat, welche Formverhältnisse als die zweckmässigsten zur Erreichung des grössten Tragvermögens anzusehen sind. Denn das Maximum des zweiten Alternativwerthes $\frac{r\,T}{h''}$ würde wieder auf die Formverhältnisse führen, welche vorhin für Schmiedeeisen gefunden wurden; nur wären die Werthe (260) für h' und h'' mit einander zu verwechseln. Bei diesen Formverhältnissen könnte aber der Werth $\frac{r\,T}{h''}$ nicht mehr das Tragmoment vorstellen, weil derselbe bei dem Gusseisen (wegen $r \gtreqless 2\,a$) nicht mehr der kleinere von den beiden Alternativwerthen in der Formel für das Tragmoment wäre.

Um daher das grösste Tragvermögen für ⊤ förmige Träger aus Gusseisen zu erhalten, drücke man dieses Moment durch die Formel

$$M = \frac{a\,T}{h'}$$

aus, uud treffe eine solche Wahl in den Verhältnissen der ⊤ Form, dass jener Ausdruck ein Maximum wird. Dem gemäss hat man

$$M = \frac{4\,(1-mn)\,(1-mn^3)-3\,(1-mn^2)^2}{6\,(1-mn)\;(1-2\,mn+mn^2)}\,a\,F\,H \quad . \quad (261),$$

und, wenn man wie früher $\gamma = mn = 1-\frac{F}{B\,H}$ setzt, auch

$$M = \frac{4\,(1-\gamma)\,(1-\gamma\,n^2)-3\,(1-\gamma\,n)^2}{6\,(1-\gamma)\;(1-2\,\gamma+\gamma\,n)}\,a\,F\,H$$

$$= \frac{(1-4\,\gamma+6\,\gamma\,n-4\,\gamma\,n^2+\gamma^2\,n^2)}{6\,(1-\gamma)\;(1-2\,\gamma+\gamma\,n)}\,a\,F\,H.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{d\,M}{d\,n} = \frac{\gamma\,a\,F\,H}{6\,(1-\gamma)}\left[\frac{(5-8\gamma)-2\,(1-2\gamma)\,(4-\gamma)\,n-\gamma\,(4-\gamma)\,n^2}{(1-2\,\gamma+\gamma\,n)^2}\right] = 0,$$

also für

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{\gamma}\left[-1+2\gamma+2\,(1-\gamma)\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right] \text{ und} \\ m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma\,(4-\gamma)}{(-5+8\gamma)}\left[-1+2\gamma-2\,(1-\gamma)\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right] \end{aligned}\right\} (262),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2\,M}{d\,n^2}$ negativ wird.

Mittelst des gefundenen Werthes für n erhält man nun das Maximal-Tragmoment

$$M = \frac{2}{3\gamma}\,(2-\gamma-\sqrt{(1-\gamma)\,(4-\gamma)})\,a\,F\,H \quad . \quad (263).$$

Zugleich ist die Dicke der horizontalen Wand

$$(H-H') = (1-n)\,H = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right)H$$

jene der verticalen aber

$$(B-B') = (1-m)B = \frac{(1-\gamma)^2}{(-5+8\gamma)}\left[-5+2\gamma+2\gamma\sqrt{\frac{4-\gamma}{1-\gamma}}\right]B \Bigg\} \quad (264)$$

endlich das Verhältniss beider Wanddicken

$$(H-H') : (B-B') =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[1--2\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right]H : \left(\frac{1-\gamma}{-5+8\gamma}\right)\left[-5+2\gamma+2\gamma\sqrt{\frac{4-\gamma}{1-\gamma}}\right]B.$$

Noch hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Werthe

$$h' = \sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\,H \text{ und } h'' = \left(1-\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right)H. \quad (265).$$

Wird hiernach die ⊤ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen B, H und F das grösste Tragvermögen. Dabei muss aber gleichzeitig $\frac{a}{h'} \gtreqless \frac{r}{h''}$, d. i. $\frac{h''}{h'} \gtreqless \frac{r}{a}$ sein, also auch wegen der Gleichungen (265)

$$\gamma \gtreqless \frac{(r-a)\,(r+3a)}{r\,(r+2a)} = \left(\frac{r^2+2ar-3a^2}{r^2+2ar}\right) = 1 - \frac{3a^2}{r\,(r+3a)}$$

und

$$F \gtreqless \frac{3a^2}{r\,(r+2a)}\,BH.$$

Der Gebrauch der vorigen Gleichungen zur Ausmittlung der zweckmässigsten Formverhältnisse des ⊤ förmigen Querschnittes für gusseiserne Träger erscheint somit an die Bedingung geknüpft, dass der Flächenraum der ⊤ Form nicht kleiner als $\frac{3a^2}{r\,(r+2a)}\,BH$ sein darf,

Der Gegenfall erfordert eine besondere Untersuchung. Man wird desshalb zwischen folgenden drei Fällen unterscheiden:

$$A)\ F > \frac{3a^2}{r\,(r+2a)}\,BH,$$

$$B)\ F = \frac{3a^2}{r\,(r+2a)}\,BH$$

$$\text{und } C)\ F < \frac{3a^2}{r\,(r+2a)}\,BH.$$

Der Werth von $\frac{3a^2}{r(r+2a)} = \frac{3}{\frac{r}{a}\left(\frac{r}{a}+2\right)}$, welcher diese Fälle gruppirt, variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{r}{a}$. So z. B. wird für

$$\frac{r}{a} = 2 \text{ jener Werth } = \tfrac{3}{8},$$
$$\frac{r}{a} = 3 \text{ „ „ } = \tfrac{1}{5},$$
$$\frac{r}{a} = 4 \text{ „ „ } = \tfrac{1}{40}.$$

Bei der Wahl des Verhältnisses $\frac{r}{a}$ ist übrigens in Erwägung zu ziehen, dass dasselbe nicht nur von der Qualität des Gusseisens, sondern auch von dem Grade der Steifigkeit des ganzen Querschnittes, vorzüglich der verticalen Wand abhängt. Aus diesem Grunde wird das erwähnte Verhältniss nicht selten, namentlich bei dünnen Wänden, weit kleiner sein, als jenes, welches mit Rücksicht auf den eigentlichen Widerstand gegen Zusammendrückung zugelassen werden könnte. So z. B. kann es geschehen, dass man sich bestimmt findet, in die obigen Formeln für das Verhältniss $\frac{r}{a}$ nur den Werth 2 einzuführen, obgleich dasselbe, wenn die Pressung bloss auf ganz kurze Stücke bezogen wird, vielleicht bis 4 gesteigert werden dürfte.

A) Ist $F > \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so dienen die Formeln (262), (263), (264) und (265) zur Basis für die Ausmittlung der vortheilhaftesten Verhältnisse der $\top$ Form.

Ex. Es sei $\frac{r}{a} = 2$, der Flächenraum $F = \frac{1}{2} BH$, daher in der That grösser, als $\frac{3a^2}{r(r+2a)} BH = \frac{3}{8} BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{2}$

$n = 0{\cdot}7560$	$h' = 0{\cdot}3780\,H$	$H' = 0{\cdot}7560\,H$	$(H - H') = 0{\cdot}2440\,H$
$m = 0{\cdot}6614$	$h'' = 0{\cdot}6620\,H$	$B' = 0{\cdot}6614\,B$	$(B - B') = 0{\cdot}3386\,B$,

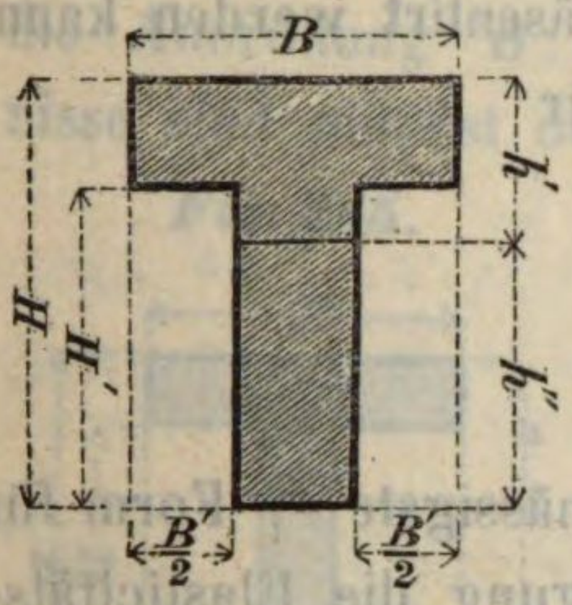
$$(H - H') : (B - B') = H : 1{\cdot}388\,B \text{ und}$$
$$M = \tfrac{2}{3}(3 - \sqrt{7})\,aFH = 0{\cdot}2362\,aFH.$$

Soll $(H-H')=(B-B')$, d. i. die Dicke der horizontalen Wand eben so gross, wie jene der verticalen werden, so muss überdiess

$$B : H = 1 : 1{\cdot}388$$

sein. In der Figur 213 sind diese speciellen Formverhältnisse anschaulich gemacht.

Fig. 213.



Im vorliegenden Falle ist offenbar $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, es wird somit für die zweckmässigste Materialvertheilung in der ⊤ Form des Trägers bei der Biegung die Elasticitätsgränze nur in den gespanntesten Querschnittstheilen erreicht.

B) Ist $F = \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so lassen sich die vorigen Gleichungen noch immer anwenden.

Ex. Es sei wieder $\frac{r}{a} = 2$ und der Flächenraum

$$F = \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH = \tfrac{3}{8} BH.$$

In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{5}{8}$

$$m = 0{\cdot}8 \;\Big|\; h' = \tfrac{1}{3}H \;\Big|\; H' = 0{\cdot}8\,H \;\Big|\; (H-H') = 0{\cdot}2\,H$$
$$m = \tfrac{25}{32} \;\Big|\; h'' = \tfrac{2}{3}H \;\Big|\; B' = \tfrac{25}{32}\,H \;\Big|\; (B-B') = \tfrac{7}{32}\,H,$$

$$(H-H') : (B-B') = 32H : 35B \text{ und}$$

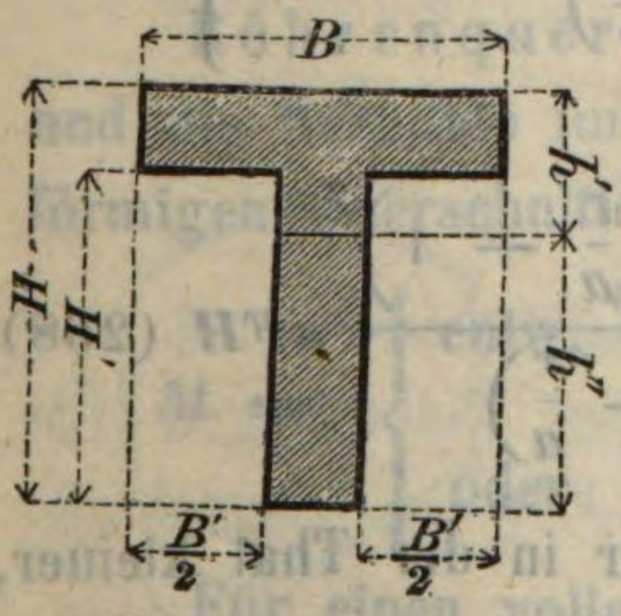
$$M = \tfrac{4}{15} aFH = 0{\cdot}2667\,aFH.$$

Für gleiche Wanddicken muss ausserdem

$$B : H = 32 : 35 = 1 : 1{\cdot}094$$

sein. Diese besonderen Formverhältnisse sind in der Fig. 214 dargestellt.

Fig. 214.



Hier werden offenbar wegen $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h'}$ bei der Biegung des Trägers die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen gleichzeitig erreicht.

C) Ist endlich $F < \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so lassen sich, wie bereits bemerkt wurde, die bisherigen Formeln nicht mehr anwenden. Der Werth von $\frac{aT}{h'}$ kann

zwar noch immer zu einem Maximum gemacht werden, allein es würde hiernach h' so klein und $\frac{a\,T}{h'}$ so gross ausfallen, dass man genöthigt wäre, zu dem Werthe $\frac{r\,T}{h''}$, als dem kleineren, zurückzukehren. In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{a\,T}{h'}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass das Tragmoment noch durch diese Formel repräsentirt werden kann. Offenbar geschieht dieser Bedingung Genüge für

$$\frac{a\,T}{h'} = \frac{r\,T}{h''},$$

d. h. für $h' = \frac{a}{(a+r)}H$ und $h'' = \frac{r}{(a+r)}H$.

In einem solchen Falle ist also die zweckmässigste ⊤ Form für gusseiserne Träger diejenige, wo bei der Biegung die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen gleichzeitig erreicht werden. Die vortheilhaftesten Verhältnisszahlen m und n kann man finden, wenn eine der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h' &= \frac{(1-2\gamma+\gamma n)}{2(1-\gamma)}H = \frac{a}{(a+r)}H \quad . \quad . \\ \text{und } h'' &= \frac{(1-\gamma n)}{2(1-\gamma)}H = \frac{r}{(a+r)}H \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad (266)$$

nach n aufgelöset wird. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\left(2\gamma-1+\frac{a}{r}\right)}{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma}, \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \text{somit} \\ m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(2\gamma-1+\frac{a}{r}\right)} \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad (267)$$

und hiernach das Maximal-Tragmoment

$$M = \frac{\gamma r^2-(r-a)^2}{3(a+r)\gamma}FH = \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{a}-1\right)^2}{3\left(1+\frac{r}{a}\right)}aFH \quad (268).$$

Ex. Es sei $\frac{r}{a}=2$, ferner $F=\frac{1}{3}BH$, daher in der That kleiner, als $\frac{3a^2}{r(r+2a)}\cdot BH = \frac{3}{8}BH$. In diesem Falle hat man wegen

$$\gamma = 1 - \frac{F}{BH} = \frac{2}{3},$$

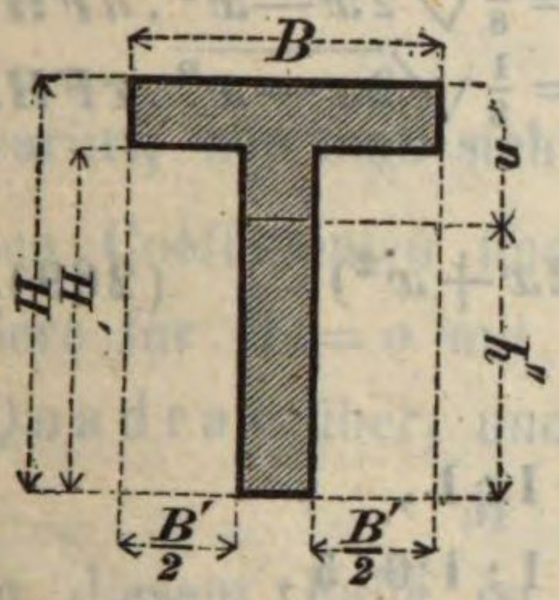
$$n = \tfrac{5}{6} \mid h' = \tfrac{1}{3}H \mid H' = \tfrac{5}{6}H \mid (H - H') = \tfrac{1}{6}H$$
$$m = \tfrac{4}{5} \mid h'' = \tfrac{2}{3}H \mid B' = \tfrac{4}{5}H \mid (B - B') = \tfrac{1}{5}B,$$

$(H - H') : (B - B') = 5H : 6B$ und

$M = \frac{5}{18} a F H = 0{\cdot}2778\, a F H.$

Für gleiche Wanddicken wäre ausserdem wegen $(B - B') = (H - H')$ die Anordnung $B : H = 5 : 6$ nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind mittelst der Figur 215 anschaulich gemacht.

Fig. 215.



In den gewählten Beispielen (Fig. 213, 214 und 215) hat man für das Tragmoment M die beziehungsweisen Werthe $0{\cdot}2362\, a FH$, $0{\cdot}2667\, a F H$ und $0{\cdot}2778\, a F H$ gefunden. Einem Rechtecke von einerlei Höhe und Flächenraum würde nach der Relation (96), weil für Gusseisen $a < r$ ist, nur das Tragmoment $\frac{1}{6} a F H = 0{\cdot}1667\, a F H$ entsprechen. Der Vergleich zwischen diesem und jenen obigen Werthen lässt die verhältnissmässig grosse Stärke gusseiserner Träger mit ⊤ förmigen Querschnitten erkennen, obgleich dieselbe gegen diejenige zurückbleibt, welche durch die Anwendung der ⊥ Form mit ungleichen Flanschen erreicht werden kann.

Aus diesen Resultaten kann man wieder auf ähnliche Weise, wie zuvor für Schmiedeeisen, auch für Gusseisen die Zweckmässigkeit des Zertheilens eines gegebenen Flächenraumes in mehrere gleiche ⊤ Formen nachweisen.

§. 150.

Röhrenquerschnitte. Mit Bezug auf die Bezeichnungen und die Resultate im §. 138 kann man das Tragmoment eines ringförmigen Querschnittes (Fig. 216) durch die Formel ausdrücken

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \frac{a T}{h'} = \frac{1}{8}(1 + n^2)\, a F H = \frac{1}{8}(2 - 2x + x^2)\, a F H \\ \text{oder } \frac{r T}{h''} = \frac{1}{8}(1 + n^2)\, r F H = \frac{1}{8}(2 - 2x + x^2)\, r F H. \end{cases}$$

Für einen vollen Kreis (Fig. 217), welcher den gleichen Flächenraum wie die Ringform hat, ist der Durchmesser

Fig. 216.

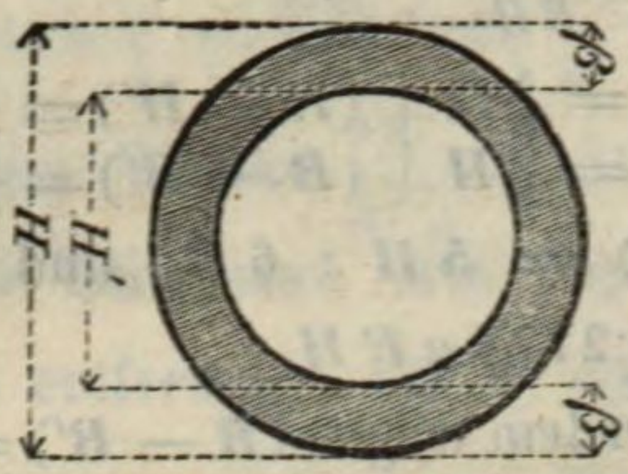
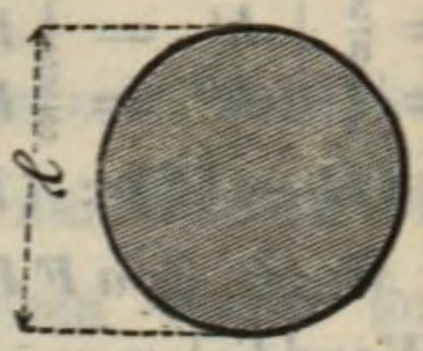


Fig. 217.



$$\gamma = H\sqrt{1-n^2} = H\sqrt{2x-x^2}$$

und das Tragmoment

$$M' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{8} a F \gamma = \frac{1}{8}\sqrt{1-n^2} \,.\, a F H = \frac{1}{8}\sqrt{2x-x^2} \,.\, a F H \\ \text{oder } \frac{1}{8} r F \gamma = \frac{1}{8}\sqrt{1-n^2} \,.\, r F H = \frac{1}{8}\sqrt{2x-x^2} \,.\, r F H. \end{cases}$$

Demnach findet man durch Vergleichung

$$M' : M = \sqrt{1-n^2} : (1+n^2) = \sqrt{2x-x^2} : (2-2x+x^2) \quad . \quad (269).$$

Insbesondere wird

für $x = 1$, $\beta = 0{\cdot}50\,H$ u. $M' : M = 1 : 1$,
„ $x = 0{\cdot}9$, $\beta = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}015$,
„ $x = 0{\cdot}8$, $\beta = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}062$,
„ $x = 0{\cdot}7$, $\beta = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}143$,
„ $x = 0{\cdot}6$, $\beta = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}266$,
„ $x = 0{\cdot}5$, $\beta = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}443$,
„ $x = 0{\cdot}4$, $\beta = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}700$,
„ $x = 0{\cdot}3$, $\beta = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}087$,
„ $x = 0{\cdot}2$, $\beta = 0{\cdot}10\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}733$.

Der Relation (269) zu Folge wird eine cylindrische Röhre desto stärker, je grösser bei einem gegebenen Materialquantum der Röhrendurchmesser ist. Die Vergrösserung dieses Durchmessers auf Kosten der Röhrenwanddicke hat übrigens eine practische Gränze, wie man diess bereits im §. 138 bemerkt hat.

§. 151.

Blechröhrenquerschnitte. Mit Rücksicht auf den § 139 und unter Beibehaltung der dort eingeführten Näherungen hat man zuerst für eine Blechröhre mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 218) wegen $T = \frac{1}{12}\frac{(H+3B)}{(H+B)} F H^2$ und $h' = h'' = \frac{1}{2}H$ für das Tragmoment

Fig. 218.

$$M = \tfrac{1}{6}\,\frac{(H+3B)}{(H+B)}\,r\,F\,H \quad . \quad . \quad . \quad (270),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtrless a$, also von den betreffenden Alternativwerthen für das Tragmoment wegen $h' = h'' = \frac{1}{2}H$ jener mit dem Factor r zu nehmen ist.

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient

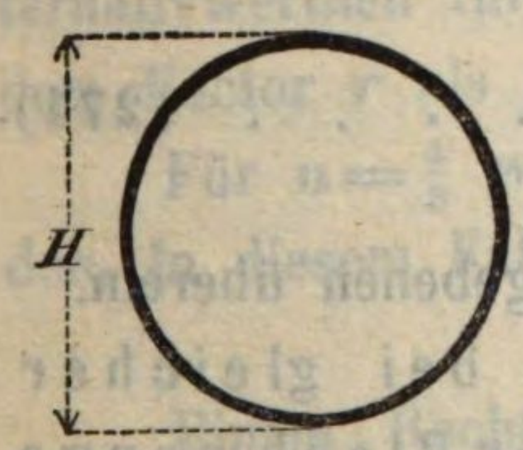
$$\tfrac{1}{6}\,\frac{(H+3B)}{(H+B)} = \tfrac{1}{6}\,\frac{\left(1+3\,\frac{B}{H}\right)}{\left(1+\frac{B}{H}\right)}$$

variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die Gränzen für diesen Coefficienten findet man, die eine für $B = o$ mit $\frac{1}{6}$, und die andere für $H = o$ mit $\frac{1}{2}$. Ist $B = H$, so geht das Rechteck in ein Quadrat über, und es wird

$$M = \tfrac{1}{3}\,r\,F\,H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (271).$$

In diesem Falle ist der fragliche Coefficient $(\frac{1}{3})$ das arithmetische Mittel zwischen jenen Gränzwerthen, und doppelt so gross, wie bei einem vollen Quadrate $(\frac{1}{6})$.

Fig. 219.



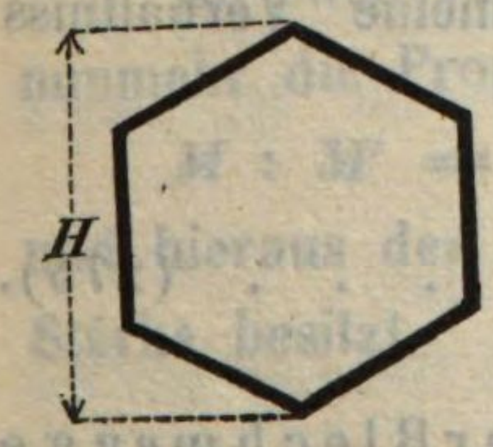
Für eine cylindrische Blechröhre (Fig. 219) hat man mit Rücksicht auf die Formel (243) $T = \frac{1}{8}\,F\,H^2$, man findet daher, weil $h' = h'' = \frac{1}{2}H$ ist, das Tragmoment

$$M = \tfrac{1}{4}\,r\,F\,H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (272).$$

Auch hier ist der Coefficient $(\frac{1}{4})$ doppelt so gross, wie für den vollen Kreisquerschnitt $(\frac{1}{8})$.

Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein regelmässiges Polygon (Fig. 220), so hat man das Tragmoment mit Benützung der Formel (244) auf analoge Weise, wie für die vollen Polygone (§. 123) aufzusuchen. Wie dort, so wird auch hier das Tragmoment mit den verschiedenen Polygonstellungen variiren, und für dasselbe stets ein Maximal- und ein Minimal-Werth vorhanden sein.

Fig. 220.



§. 152.

Vergleichung des Tragvermögens von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren. Zur Durchführung einer solchen Vergleichung behalte man die im §. 140 gewählte Bezeichnungsweise bei, und benütze die betreffenden Formeln aus dem vorigen §.

Hiernach findet man für den rechteckigen Querschnitt

die Fläche . . . . . $F_1 = 2(H_1 + B_1)\beta_1$,

und das Tragmoment . . . . . $M_1 = \frac{1}{3}(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1$,

ferner für den kreisrunden Querschnitt

die Fläche . . . . . $F_2 = \pi H_2 \beta_2$

und das Tragmoment . . . . . $M_2 = \frac{\pi}{4}\beta_2 H_2^2$,

also durch Vergleichung

$$M_1 : M_2 = 4(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1 : 3\pi\beta_2 H_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (273).$$

1. Nimmt man für beide Querschnitte gleiche Wanddicken, gleiche Höhen und gleiche Blechmengen an, d. i. $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$ und $F_1 = F_2$, so wird zunächst, wie im §. 140

$$B_1 = \frac{(\pi - 2)}{2} H_1 = 0{\cdot}5708\, H_1$$

und hiernach

$$\left.\begin{aligned} M_1 : M_2 &= 4(H_1 + 3B_1) : 3\pi H_2 \\ &= 2(3\pi - 4) : 3 \\ &= 1{\cdot}151 : 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (274).$$

Dieses Verhältniss stimmt mit dem sub (246) Angegebenen überein.

Die vierkantige Röhre ist daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Höhe und gleicher Blechmenge stärker, als die cylindrische.

2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$, und setzt man auch in diesem Falle $\beta_1 = \beta_2$ und $F_1 = F_2$, also $4H_1 = \pi H_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (273) auf

$$\left.\begin{aligned} M_1 : M_2 &= 16 H_1^2 : 3\pi H_2^2 \\ &= \pi : 3 \\ &= 1{\cdot}047 : 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (275).$$

Bei gleicher Wanddicke und gleicher Blechmenge ist also die vierkantige Röhre auch dann stärker, als

die cylindrische, wenn jene einen quadratischen Querschnitt hat.

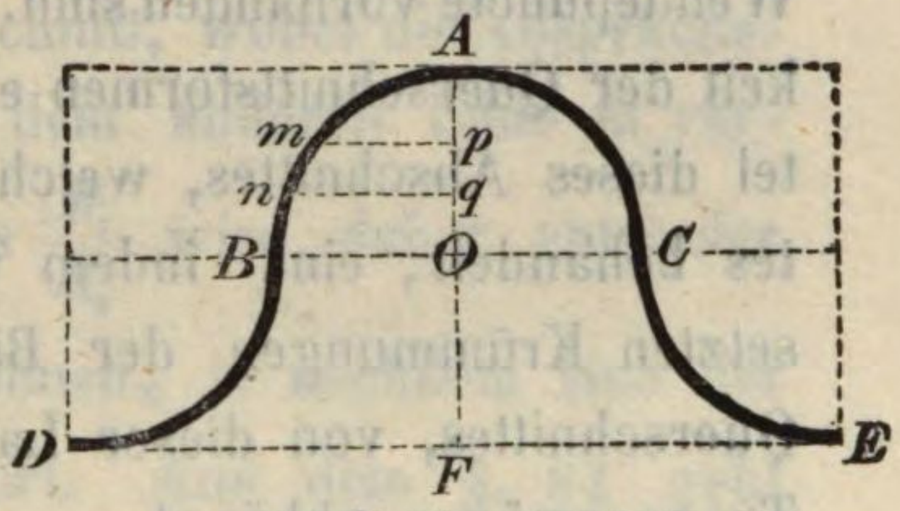
Dieses Resultat ist insoferne bemerkenswerth, als zu Folge der Relation (247) die Steifigkeit der verglichenen Röhren in umgekehrter Weise zu beurtheilen ist.

§. 153.

Cannelirtes Blech (Fig. 221). Mit Bezug auf die im §. 141 eingeführten Bezeichnungen wird das Tragmoment M einer Cannelirung (Fig. 222)

Fig. 221.

Fig. 222



$$M = \frac{r\,T}{h''} = \frac{4r\,t}{c} = \frac{r\beta b^2}{2c}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right]$$

$$= \frac{rb\beta}{n}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right] . \quad (276),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \lessgtr a$, also von den beiden Alternativwerthen für das Tragmoment wegen $h' = h'' = c$ jener mit dem Factor r als der kleinere anzunehmen ist.

Für $n = \frac{4}{3}$ wurde z. B. im §. 141 $T = 0{\cdot}1191\,FH^2$ gefunden. In diesem Falle ist daher das Tragmoment

$$M = 0{\cdot}2382\,rFH.$$

Einem Rechtecke von einerlei Höhe und Querschnittsgrösse würde nur das Tragmoment

$$M' = \tfrac{1}{6}rFH = 0{\cdot}1667\,rFH$$

entsprechen.

Aus der Vergleichung der Werthe für M und M' ergibt sich nunmehr die Proportion

$$M : M' = 0{\cdot}2382\,rFH : 0{\cdot}1667\,rFH = 1{\cdot}4292 : 1$$

und hieraus der Schluss, dass das cannelirte Blech eine bedeutende Stärke besitzt.

§. 154.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens, wenn die Biegungscurve Wendepuncte hat. In dem §. 145 hat man die Bedingungen für die zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Höhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens kennen gelernt, wenn die Biegungscurve keinen Wendepunct hat. Es erübriget daher noch den Fall zu untersuchen, wenn in der Biegungscurve Wendepuncte vorhanden sind. Dass dieser Umstand auf die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen einen Einfluss hat, leuchtet aus dem 2. Kapitel dieses Abschnittes, welcher die Lage des gefährlichen Querschnittes behandelt, ein, indem von der Art und Weise der entgegengesetzten Krümmungen der Biegungscurve die Lage des gefährlichen Querschnittes, von dieser Lage aber das Tragmoment, also auch das Tragvermögen abhängt.

Um die Bedingungen für die zweckmässigste Materialvertheilung in einem Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens zu erfahren, wenn die Biegungscurve Wendepuncte enthält, nehme man die allgemeine Untersuchung in den §§. 133 und 145 wieder auf, bezeichne aber die Höhenabschnitte h' und h'' in der Figur 178 gegenwärtig mit α und β, so dass das Trägheitsmoment des Querschnittes nach der Formel (228) durch

$$T = \alpha \beta F$$

ausgedrückt ist.

In jenen citirten §§. hat man sich vorgestellt, dass bei der Biegung die Querschnittstheile in $\overline{A' A''}$ (Fig. 178) ausgedehnt, jene in $\overline{B' B''}$ aber zusammengedrückt werden.

Wäre nun der gefährliche Querschnitt in der That an einer Stelle vorhanden, wo eine solche Anspruchsnahme stattfindet (wie z. B. in N_1 Fig. 169), so hätte man das Tragmoment M_1 durch die Formel auszudrücken

$$M_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{a T}{\alpha} = a \beta F \\ \text{oder } \dfrac{r T}{\beta} = r \alpha F \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (277).$$

Wäre hingegen der gefährliche Querschnitt in einem entgegengesetzt gekrümmten Theile des Trägers vorhanden, wo also die Anspruchsnahme im Querschnitte in verkehrter Weise stattfindet (wie z. B. in N_2 Fig. 169), so würde das Tragmoment aus der Formel

$$M_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{a\,T}{\beta} = a\,\alpha\,F \\ \text{oder } \frac{r\,T}{\alpha} = r\,\beta\,F \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278)$$

zu bestimmen sein.

Das Verhältniss zwischen M_1 und M_2 kann mit Rücksicht auf den §. 81 dargestellt werden; denn diese beiden Tragmomente beziehen sich auf einen und denselben Querschnitt, wobei die Anspruchsnahme in dem einen Falle gegen jene in dem anderen Falle in verkehrter Weise stattfindet. Das Verhältniss $\frac{M_1}{M_2}$ wird daher entweder den Werth von $\frac{\beta}{\alpha}$, oder den von $\frac{a}{r}$ annehmen, je nachdem sich der erste oder zweite mehr der Einheit nähert. Aus dem §. 81 geht übrigens hervor, dass diese Verhältnisswerthe unter gewissen Umständen sich auch verkehren, nämlich in $\frac{\alpha}{\beta}$ und beziehungsweise $\frac{r}{a}$ übergehen.

Hiernach unterscheide man, ob das Verhältniss zwischen M_1 und M_2 nach dem Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$ oder nach jenem von $\frac{a}{r}$ zu bemessen kommt. Zugleich bezeichne man, wie im §. 124, die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente mit $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$.

1. Verhält sich $M_1 : M_2$ wie $\beta : \alpha$, so ist die zweckmässigste Vertheilung der gegebenen Fläche (Fig. 178) behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens diejenige, bei welcher der gefährliche Querschnitt in den beiden entgegengesetzten Krümmungen des Trägers zugleich (wie z. B. in N_1 und N_2 Fig. 169) zu liegen kommt.

Dieser Bedingung entsprechen zu Folge der Gleichung (225) die Relationen

$$\left. \begin{array}{l} \beta : \alpha = R_1 z_1 : R_2 z_2 \\ \text{und } f' : f'' = R_1 z_1 : R_2 z_2 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (279),$$

wornach sowohl die Höhe $H = \alpha + \beta$, als auch die Fläche $F = f' + f''$ derart zertheilt wird, dass sich die einzelnen Theile zu einander immer wie die bezüglichen Maximal-Kraftmomente verhalten.

Hiervon ist der Grund leicht einzusehen, wenn man in Erwägung zieht, dass — nachdem $\alpha + \beta = H$ eine constante Grösse ist — durch eine anders vorgenommene Theilung zwar das eine Tragmoment (z. B. M_1) grösser werden könnte, gleichzeitig aber das andere Tragmoment (also M_2) kleiner würde, so dass jedenfalls an Tragvermögen verloren ginge. Statt den Kraftmomenten $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$ können auch die correspondirenden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 eingeführt werden, da bekanntlich

$$R_1 z_1 : R_2 z_2 = \frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} = \varrho_2 : \varrho_1 \text{ ist.}$$

Hiernach gehen die vorigen Bedingungsgleichungen auch in folgende über

$$\left.\begin{aligned} \alpha : \beta &= \varrho_1 : \varrho_2 \\ f' : f'' &= \varrho_2 : \varrho_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (280).$$

Die Proportion $f' : f'' = \varrho_2 : \varrho_1$ enthält die Regel, dass die ganze Querschnittsfläche F in zwei solche Theile f' und f'' zu theilen ist, welche sich der Grösse nach, wie umgekehrt die kleinsten numerischen Werthe beziehungsweise von den positiven und von den negativen Krümmungshalbmessern der Biegungscurve verhalten, und dass diese Theile nach Zulässigkeit oben und unten an den Enden der Querschnittshöhe anzubringen sind, wenn in dem hier betrachteten Falle, wo die Biegungscurve entgegengesetzte Krümmungen hat, und zugleich $\frac{M_1}{M_2} = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, das grösste Tragvermögen angestrebt wird.

Da nun die fraglichen Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 mit der Gestalt der Biegungscurve, und diese wieder mit der Art und Intensität der einwirkenden Kräfte veränderlich sind, so leuchtet ein, dass die der obigen Regel entsprechenden Resultate für die zweckmässigste Materialvertheilung in dem Querschnitte eines prismatischen Trägers nicht nur je nach der Materialgattung, sondern auch je nach der Art und Weise der Anspruchsnahme des Trägers verschieden sein werden *).

---

*) Wäre nicht $M_1 : M_2 = \beta : \alpha$, sondern umgekehrt $M_1 : M_2 = \alpha : \beta$, so hätte man in den Relationen (280) ϱ_1 mit ϱ_2 zu verwechseln, wodurch sich nur das Verhältniss $f' : f''$ umkehrt, ohne dass das Theilungsgesetz verändert wird.

Da in dem behandelten Falle das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ (oder eventuell $\frac{\alpha}{\beta}$) der Einheit näher liegt, als jenes zwischen a und r, so differiren offenbar die Querschnittstheile f' und f'' im Allgemeinen weniger von einander, als in dem im §. 145 behandelten Falle, wo die Biegungscurve keinen Wendepunct hatte. Nur die Gleichheit der besagten Verhältnisse knüpft die beiderseitigen Theilungsgesetze an einander, indem sie sodann identisch werden.

2. Das zuvor gefundene Theilungsgesetz gilt nur so lange, als das nach den Gleichungen (280) erhaltene Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ von der Einheit nicht mehr abweicht, als jenes zwischen den Elasticitätsgränzwerthen a und r. Im entgegengesetzten Falle, wo offenbar das Verhältniss $M_1 : M_2$ nach jenem zwischen a und r zu beurtheilen ist, hat man jedoch — wie man nach einiger Ueberlegung erkennt — statt den Gleichungen (280) die folgenden

$$\left.\begin{aligned} \alpha : \beta &= a : r \\ f' : f' &= r : a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (281)$$

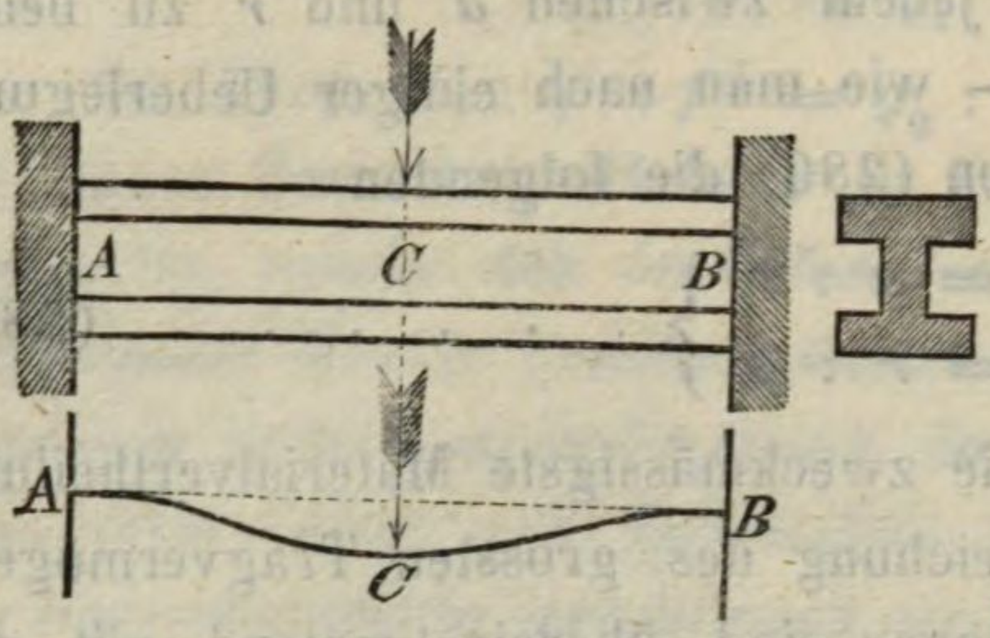
zu wählen, wenn auch jetzt die zweckmässigste Materialvertheilung im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens angestrebt wird. Diese Gleichungen sind übereinstimmend mit den im §. 145 gefundenen. Es ist daher in diesem Falle das Gesetz für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung dasselbe, wie in jenem §., d. h. es ist dann bezüglich des Tragvermögens gerade so, als ob nur die grösste Krümmung der Biegungscurve vorhanden wäre.

§. 155.

Anwendung der im vorigen §. gegebenen Regeln für schmiedeeiserne Träger. Kann man für Schmiedeeisen mit Rücksicht auf die Qualität und die anderweitigen Umstände die Gleichheit der Elasticitätsgränzwerthe a und r zulassen, so tritt der im vorigen §. ad 2 erörterte Fall ein. Wie dann auch die Form der Biegungscurve ist, so wird es für prismatische Träger stets das Zweckmässigste sein, im Querschnitte oben und unten gleiche Flächentheile anzubringen, so dass z. B. für ⌶ Formen gleiche Flanschen einen grösseren Vortheil, als ungleiche gewähren werden. Ist aber,

wie in vielen Fällen, $r < a$ anzunehmen, so kommt es darauf an, wie sich das numerische Verhältniss des grössten positiven zum grössten negativen Krümmungshalbmesser $(\varrho_1 : \varrho_2)$ gestaltet. Sind diese Krümmungshalbmesser einander gleich, ist also $\varrho_1 = \varrho_2$, somit das Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1$, so erscheint nach der im vorigen §. ad 1 gegebenen Regel die Anwendung von gleichen Flächentheilen oben und unten im Querschnitte wieder die zweckmässigste. Es ist desshalb auch in diesem Falle bei der Construction einer ⊥ Form die Anordnung mit gleich grossen Flanschen, jener mit ungleich grossen vorzuziehen. Man wird in der Folge sehen, dass der Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ vorhanden wäre, wenn z. B. ein Träger (Fig. 223) an seinen beiden Enden *A* und *B* fest vermauert, und nur in der Mitte *C* belastet, dabei aber von dem eigenen Gewichte abstrahirt wird. Hier könnte also bei der ⊥ Form mit gleichen Flanschen das grösste Tragvermögen erreicht werden, wie auch die Elasticitätsgränzwerthe *a* und *r* sein mögen.

Fig. 223.



Wenn aber ausser *a* und *r* auch ϱ_1 und ϱ_2 von einander verschieden sind, z. B. $\varrho_1 < \varrho_2$ ist, so wird die zweckmässigste Querschnittsvertheilung nach dem Verhältnisse $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, so lange $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \gtrless \frac{a}{r}$ ist, sonst aber nach jenem von $\frac{r}{a}$ vorzunehmen sein.

§. 156.

Anwendung der im §. 154 gegebenen Regeln für gusseiserne Träger. Für Gusseisen ist $r > a$. Demungeachtet wird auch hier für $\varrho_1 = \varrho_2$ die Anordnung von gleichen Flächentheilen oben und unten die vortheilhafteste sein, wenn das grösste Tragvermögen erreicht werden soll, so dass z. B. für den Fall (Fig. 223) die Construction der ⊥ Form mit gleichen Flanschen noch immer jener mit ungleichen Flanschen vorzuziehen wäre. Sind aber die numerischen Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 von einander verschieden, so kommt es auch hier, wie bei dem Schmiedeeisen, auf das

Resultat der Vergleichung der beiden Verhältnisse an, wovon das erste zwischen ϱ_1 und ϱ_2, das andere aber zwischen a und r existirt. In diesem Falle erhält man im Querschnitte oben und unten ungleiche Flächentheile, daher auch beispielsweise für die zweckmässigste I Form ungleiche Flanschen, deren Grössenverhältniss je nach der Form der Biegungscurve von 1 : 1 bis $r : a$ variiren kann. Bei prismatischen Trägern, deren Längenaxen nach entgegengesetzten Richtungen gebogen sind, kann daher die zweckmässigste Materialvertheilung im Querschnitte zur Erreichung des grössten Tragvermögens von jener bedeutend abweichen, die man im §. 145 kennen gelernt hat.

III. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein mechanisches Widerstandsmoment unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll.

§. 157.

Hauptsatz. Das mechanische Widerstandsmoment, welches ein Träger ohne Gefahr für seinen Bestand entwickeln kann, ist in Gemässheit der Gleichungen (147) und (148) nach dem kleineren der beiden Alternativwerthe

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{Tl}{h''^2} \end{cases}$$

zu bestimmen.

Eine Querschnittsform erscheint daher bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes desto zweckmässiger, je grösser unter sonst gleichen Umständen der kleinere von jenen Alternativwerthen ist.

§. 158.

Folgerung. Um die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform in dem obigen Sinne kennen zu lernen, bemerke man, dass nach den Gleichungen (159) im §. 109 das mechanische Widerstandsmoment W auf die Form

$$W = \begin{cases} \text{entw. } C \cdot \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } C' \cdot \frac{r^2}{m} K \end{cases}$$

gebracht werden kann, wobei K den Körperraum des Trägers bezeichnet, und die Coefficienten C und C' nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Der massgebende Werth für das mechanische Widerstandsmoment wird daher bei einem gegebenen Körperraume des Trägers und bei einer gegebenen Materialgattung desto grösser, je grösser der betreffende Coefficient (C oder C') ist.

§. 159.

Einfluss der Körperdimensionen. Der Einfluss der Körperdimensionen auf das mechanische Widerstandsmoment macht sich in einer anderen Weise geltend, als auf die Steifigkeit und auf das Tragvermögen. Während in diesen letzteren zwei Beziehungen die Höhe der Querschnittsfigur einen wesentlichen Einfluss hat, ist hier ausser der Querschnittsgestalt nur der Körperraum des Trägers zu berücksichtigen.

§. 160.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes. Auf die Betrachtungen in den §§ 133 und 145 zurückkehrend, schliesst man, dass bei einer gegebenen Höhe des Querschnittes auch das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes auf die dort angegebene Weise erreicht würde, wenn man nämlich im Stande wäre, die Fläche des Querschnittes an den beiden Enden der Höhe, in zwei gerade Linien $\overline{A' A''}$ und $\overline{B' B''}$ (Fig. 178) zu drängen. Nur kömmt hier wiederholt die Frage zu erörtern, welches Verhältniss zwischen den Flächentheilen f' und f'' als das zweckmässigste anzusehen ist. Die bezüglichen Resultate, obgleich einem imaginären Falle angehörig, werden hierauf wieder, wie in den citirten §§. geeignet sein, um daran die Bedingungen zu knüpfen, welche man bei der zweckmässigsten Vertheilung des Flächenraumes in einem

Querschnitte zu erfüllen hat. In dieser Absicht untersuche man, für welche Werthe von f' und f'' das mechanische Widerstandsmoment, welches sich mit Hilfe der Gleichung (228) $T = h' h'' F$ auf die Form

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{h'}{h'} F l = \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{h''}{h'} . K \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{h'}{h''} F l = \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{h'}{h''} . K \end{cases}$$

bringen lässt, ein Maximum wird.

Da von diesen Alternativwerthen niemals der grössere gilt, da ferner $h' + h'' = H$ eine constante Grösse ist, somit von jenen Werthen der eine zunimmt, wenn der andere abnimmt, und umgekehrt, so leuchtet ein, dass das grösste mechanische Widerstandsmoment in dem Augenblicke erreicht wird, wenn die beiden Alternativwerthe einander gleich werden, d. i. wenn

die Gleichung $\frac{a^2 h''}{h'} = \frac{r^2 h'}{h''}$, oder

die Proportion $h' : h'' = a : r$

vorhanden ist.

Diese Bedingung steht in Uebereinstimmung mit derjenigen, welche im §. 145 bezüglich des Maximal-Tragmomentes gefunden wurde. Hiernach ist auch hier, wie dort,

$$h' = \left(\frac{a}{a+r}\right) H \quad \Big| \quad f' = \left(\frac{r}{a+r}\right) F$$

$$h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right) H \quad \Big| \quad f'' = \left(\frac{a}{a+r}\right) F,$$

somit das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes

$$W = \frac{1}{6} \frac{ar}{m} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282).$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass die im §. 145 enthaltenen Regeln und Bemerkungen über die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen bezüglich des Tragvermögens, auch bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes Anwendung finden.

Der Werth für W in der Formel (282) ist zwar eine Function des Körperraumes, sonst aber unabhängig von der Querschnittshöhe H, was mit der Bemerkung im §. 159 übereinstimmt.

Nachdem man die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes kennen gelernt hat, betrachte man die vorzüglichsten der in dieser Beziehung zweckmässigen Querschnitte.

Fig. 224.

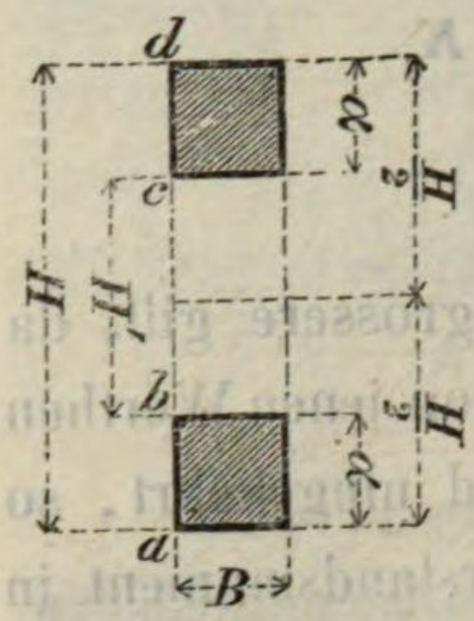
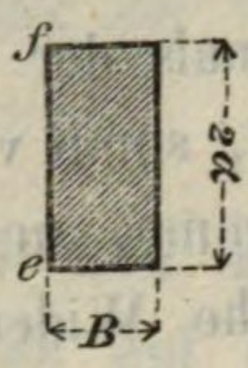


Fig. 225.



§. 161.

Querschnittsform Fig. 224. Diese Querschnittsform ist dieselbe, wie die in dem §§. 134 und 146 betrachtete, und es entspricht ihr das Trägheitsmoment $T = \frac{(1+n+n^2)}{12} F H^2$. Das mechanische Widerstandsmoment W ist daher wegen $h' = h'' = \frac{1}{2}H$

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2} = \frac{1}{18}(1+n+n^2)\frac{a^2}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2} = \frac{1}{18}(1+n+n^2)\frac{r^2}{m}K, \end{cases}$$

wenn der Körperraum Fl des Prismas mit K bezeichnet wird.

Für ein vierkantiges Prisma (Fig. 225) von demselben Körperraume unter sonst gleichen Umständen wäre das mechanische Widerstandsmoment W' nach der Relation (149)

$$W' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{18}\frac{a^2}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{18}\frac{r^2}{m}K. \end{cases}$$

Vergleicht man jetzt die mechanischen Widerstandsmomente W und W', und lässt für beide die Pressung r in gleicher Intension zu, so erhält man die Proportion

$$W' : W = 1 : (1+n+n^2),$$

welche, wenn (wie in den §§. 134 und 146) $\frac{2\alpha}{H} = x$ und $n = (1-x)$ gesetzt wird, in folgende übergeht

$$W' : W = 1 : (3 - 3x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (283).$$

Insbesondere ist

für $x = 1$, $\alpha = 0{\cdot}50\,H$ und $W' : W = 1 : 1$
„ $x = 0{\cdot}9$, $\alpha = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}11$
„ $x = 0{\cdot}8$, $\alpha = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}24$
„ $x = 0{\cdot}7$, $\alpha = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}39$
„ $x = 0{\cdot}6$, $\alpha = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}56$
„ $x = 0{\cdot}5$, $\alpha = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}75$
„ $x = 0{\cdot}4$, $\alpha = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}96$
„ $x = 0{\cdot}3$, $\alpha = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}19$.

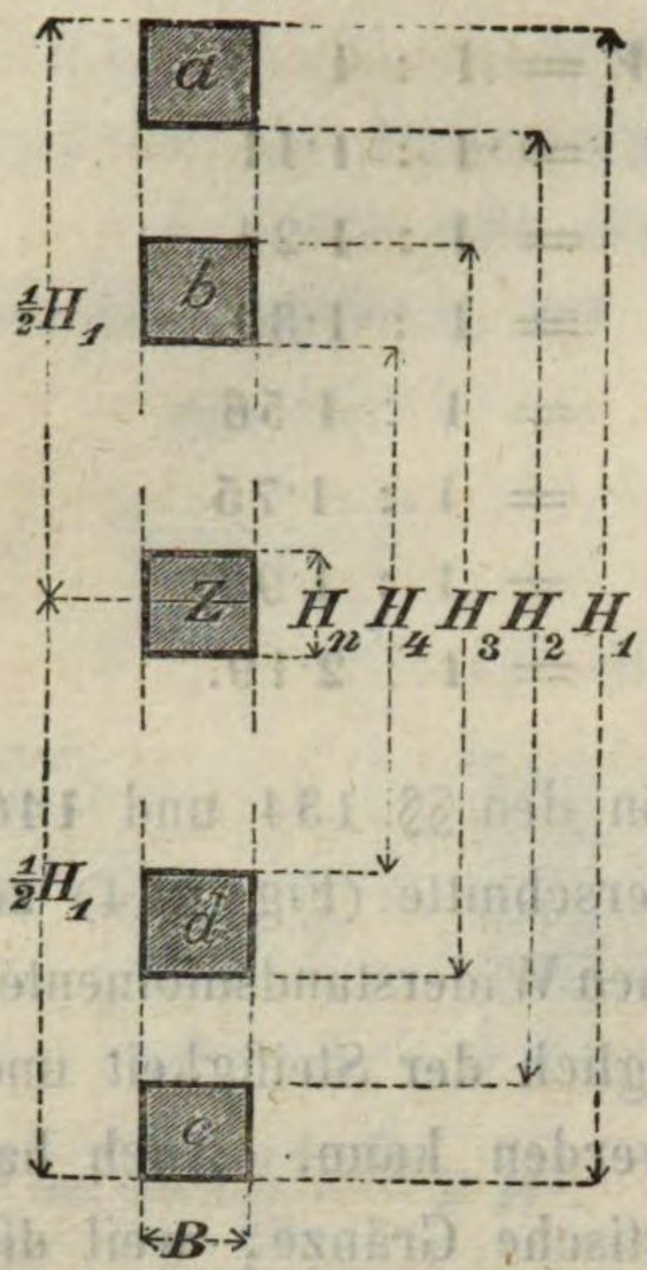
Diese Zahlenwerthe verglichen mit jenen in den §§. 134 und 146 zeigen, dass der mit dem betrachteten Querschnitte (Fig. 224) zu erreichende Vortheil bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes gegen denjenigen zurückbleibt, welcher bezüglich der Steifigkeit und des Tragvermögens des Prismas erreicht werden kann. Auch hat das Verhältniss $W' : W$ nicht nur eine practische Gränze, weil die Verkleinerung von x aus dem in den §§. 134 und 146 angegebenen Grunde nicht ohne Ende fortgesetzt werden kann, sondern dasselbe ist im vorliegenden Falle auch von theoretischer Seite begränzt, indem für $x = o$ das analytisch grösste Verhältniss $W' : W = 1 : 3$ entsteht, welches natürlich in der Praxis nicht erreicht werden kann.

Die Anordnung von gleich grossen Flächentheilen oben und unten, wie in der Figur 224, ist übrigens nicht immer die vortheilhafteste. Aus dem Inhalte des vorigen §. geht nämlich hervor, dass zur möglichsten Vermehrung des mechanischen Widerstandsmomentes das Grössenverhältniss zwischen dem gespannten und dem gepressten Querschnittstheile nach dem Verhältnisse der Elasticitätsgränzwerthe r und a angeordnet werden soll. Dadurch erhält man im Allgemeinen oben und unten ungleich grosse Querschnittstheile, und es ist sodann das mechanische Widerstandsmoment mit Benützung der Formeln (188) nach Anleitung des §. 107 zu bestimmen.

§. 162.

Querschnittsform Fig. 226. Diese Querschnittsform ist mit der in den §§. 135 und 147 betrachteten identisch. Für

Fig. 226.



dieselbe wird wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H_1$ das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{2}{3} \frac{a^2}{m} \frac{T\,l}{H_1^2} \\ \text{oder } \frac{2}{3} \frac{r^2}{m} \frac{T\,l}{H_1^2}, \end{cases}$$

wobei man das Trägheitsmoment T nach der Gleichung (234) zu berechnen hat.

Für den besonderen Fall, in welchem alle vollen und alle leeren Räume die gleiche Höhe α besitzen, wird nach der Gleichung (235)

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2} \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2} \frac{r^2}{m} K \end{array} \right\} \quad (284).$$

Setzt man in diese Formel $n = 2, 3, 4$, etc., so erhält man für den Coefficienten $\frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2}$ die entsprechenden Werthe, welche $\frac{2}{3}$ von jenen betragen, die für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes im §. 135 gefunden wurden. Die dortige Schlussbemerkung gilt auch gegenwärtig.

§. 163.

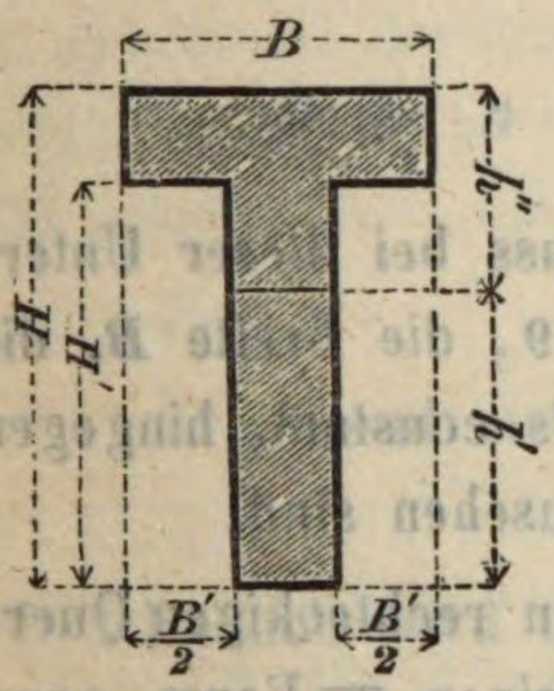
I förmiger Querschnitt. Bezüglich dieses Querschnittes wird lediglich auf die Bemerkungen des §. 148 hingewiesen. Da nämlich in Gemässheit des §. 160 die zweckmässigste Vertheilung des Flächenraumes im Querschnitte in Ansehung des mechanischen Widerstandsmomentes an die gleichen Bedingungen zu knüpfen ist, wie in Ansehung des Tragvermögens, so ist es erlaubt, das vortheilhafteste Verhältniss zwischen den beiden Flanschen eines I förmigen Querschnittes auch dann nach den Erörterungen im §. 148 anzuordnen, wenn es sich um das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes handelt.

§. 164.

T förmiger Querschnitt. So wie in den §§. 137 und 149, entsteht auch hinsichtlich des zu erreichenden mechanischen

Widerstandsmomentes die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die ⊤ Form als zweckmässig zu betrachten sei. Behufs dieser Untersuchung hat man wieder, wie im §. 149, zwischen den Materialien zu unterscheiden, weil nach deren Verschiedenheit in dem Ausdrucke für das mechanische Widerstandsmoment bald der eine, bald der andere Alternativ-Werth massgebend ist.

Fig. 227.



1. Ist bei dem zu verwendenden Materiale $r \gtrless a$ (wie z. B. bei dem Schmiedeeisen), so wird diejenige Stellung der ⊤ Form die vortheilhaftere sein, wo die Fasern an der schmalen Seite ausgedehnt, und jene an der breiten Seite zusammengedrückt werden, also gerade so, wie diess bezüglich des Tragvermögens der Fall war. (Siehe §. 149 ad 1, Fig. 207.) Behält man die dortigen Bezeichnungen bei, so hat man (Fig. 227)

$$h' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma n}{1\ \gamma}\right) H$$

$$h'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-2\gamma+\gamma n}{1-\gamma}\right) H$$

$$T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2)-3(1-\gamma n)^2}{12\,(1-\gamma)^2} F H^{2*}),$$

und das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{Tl}{h''^2}. \end{cases}$$

Wäre nun der erste Alternativwerth als der kleinere, oder wenigstens nicht als der grössere anzusehen, d. h. wäre $\frac{a}{h'} \leqq \frac{r}{h''}$, so hätte man wegen $Fl = K$

$$W = \tfrac{1}{18}\,\frac{a^2}{m}\left[\frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n)}{(1-\gamma n)^2} - 3\right] K \quad . \quad . \quad (285),$$

*) Zur Unterscheidung des Moduls der Längenveränderung des Materiales (m) von dem mit dem gleichen Buchstaben bezeichneten Verhältnisse $\frac{B'}{B}$, schreibe man jenen Buchstaben für den Modul, wie bisher, liegend, für das fragliche Verhältniss aber stehend, nämlich $\frac{B'}{B} = \mathrm{m}$.

und diesen Ausdruck zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes zu einem Maximum zu machen.

Dieser Absicht wird entsprochen für

$$\frac{dW}{dn} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\gamma(1-\gamma)(1-n)}{(1-\gamma n)^3} = o, \text{ d. i.}$$

für

$$\left.\begin{aligned} n &= 1 \\ \text{und } m &= \frac{\gamma}{n} = \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (286),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2W}{dn^2}$ negativ ausfällt.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei dieser Untersuchung, eben so wie in den §§. 137 und 149, die Breite B, die Höhe H und der Flächenraum F der ⊤ Form als constant, hingegen die Verhältnisszahlen m und n als variabel anzusehen sind.

Das Resultat (286) führt offenbar auf einen rechteckigen Querschnitt, so dass für diesen der Charakter einer ⊤ Form ganz verloren geht. Auch ist in diesem Falle $h' = h'' = \frac{1}{2}H$, und da vorausgesetzt wurde, dass zur Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes die Formel $\frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2}$ die massgebende, daher $\frac{a}{h'} \leqq \frac{r}{h''}$ sein soll, so schliesst man, dass das obige Resultat (286) eigentlich nur dann Anwendung findet, wenn $a = r$, d. i. die Gleichheit der Elasticitätsgränzwerthe vorhanden ist.

Kann diese Gleichheit bei dem Schmiedeeisen zugelassen werden, so wird bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes, welches der Träger entwickeln kann, die Anwendung des rechteckigen Querschnittes vortheilhafter sein, als jene des ⊤ förmigen.

Ist jedoch bei dem Schmiedeeisen $r < a$, so kann das Resultat (286) nicht mehr benützt werden, weil die dabei zu Grunde liegende Bedingung $\frac{a}{h'} \leqq \frac{r}{h''}$, wegen $h' = h''$, nicht vorhanden wäre.

In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass jener Bedingung Genüge geleistet wird. Diess geschieht offenbar für $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$, d. i. in dem Falle, wo bei der Biegung die Elasticitäts-

gränzen in den am meisten gespannten und gepressten Fasern gleichzeitig erreicht werden.

Hiernach finden für die zweckmässigsten Formverhältnisse folgende Relationen statt

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{r} = \frac{h'}{h''},\ h' &= \left(\frac{a}{a+r}\right)H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma n}{1-\gamma}\right)H \\ h'' &= \left(\frac{r}{a+r}\right)H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-2\gamma+\gamma n}{1-\gamma}\right)H \\ \text{ferner } n &= \frac{\left(1-\frac{a}{r}+2\gamma\frac{a}{r}\right)}{\gamma\left(1+\frac{a}{r}\right)} \\ \text{und } m &= \frac{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(1-\frac{a}{r}+2\gamma\frac{a}{r}\right)} = \frac{\gamma}{n} \end{aligned}\right\} \quad (287).$$

Endlich wird das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes selbst

$$W = \tfrac{1}{18}\,\frac{a^2}{m}\left[1-\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{r}{a}\right)^2\right]K \quad . \quad . \quad (288).$$

Ex. Es sei $\frac{a}{r} = \frac{5}{4}$, ferner $F = \frac{2}{3}BH$, also $\gamma = \frac{1}{3}$. In diesem Falle hat man

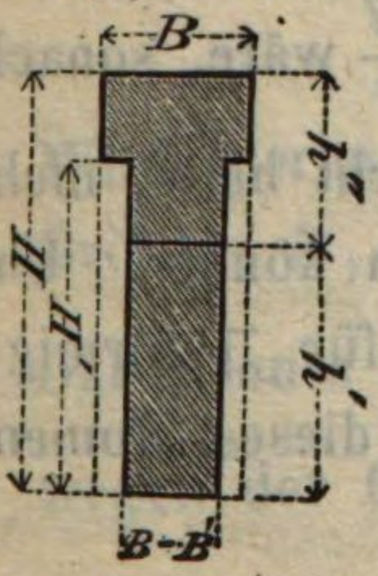
$$\begin{array}{l|l|l|l} n = \frac{7}{9} & h' = \frac{5}{9}H & H' = \frac{7}{9}H & (H-H') = \frac{2}{9}H \\ m = \frac{3}{7} & h'' = \frac{4}{9}H & B' = \frac{3}{7}B & (B-B') = \frac{4}{7}B \end{array}$$

$$(H-H') : (B-B') = 7H : 18B$$

und

$$W = \tfrac{11}{225}\cdot\frac{a^2}{m}K.$$

Fig. 228.



Für gleiche Wanddicken wäre ausserdem wegen $(B-B') = (H-H')$ die Anordnung.

$$B : H = 7 : 18$$

nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind mittelst der Fig. 228 anschaulich gemacht.

Hätte der Träger einen rechteckigen Querschnitt von dem gleichen Flächenraume F, so wäre sein mechanisches Widerstandsmoment nach der Relation (149)

$$W' = \tfrac{1}{18}\,\frac{r^2}{m}K.$$

Der Vergleich zwischen den beiden Werthen W und W' ergibt wegen $\frac{a}{r} = \frac{5}{4}$ die Proportion

$$W : W' = \tfrac{11}{225} a^2 : \tfrac{17}{18} r^2 = 11 : 8,$$

welche in der That zu Gunsten der ⊤ Form spricht, obwohl der Vortheil gegen denjenigen weit zurückbleibt, welcher durch die Anwendung der ⊥ Form erreicht werden kann.

2. Ist das Materiale des ⊤ förmigen Trägers **Gusseisen**, so ist diejenige Querschnittslage die vortheilhaftere, wo die Fasern an der breiten Seite der ⊤ Form ausgedehnt, und jene an der schmalen Seite zusammengedrückt werden. Sodann ist das mechanische Widerstandsmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \cdot \frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \cdot \frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf die Bezeichnungen im §. 149 ad 2

$$h' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-2\gamma+\gamma n}{1-\gamma}\right)H, \quad h'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma n}{1-\gamma}\right)H$$

$$\text{und } T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-n\gamma)^2}{12(1-\gamma)^2} FH^2.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass in diesem Falle der **erste** Alternativwerth $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ zu einem Maximum zu machen ist, wenn man die Frage zu beantworten hat, welche Formverhältnisse als die **zweckmässigsten** zur Erreichung des **grössten** mechanischen Widerstandsmomentes anzusehen sind. Denn das Maximum des zweiten Alternativwerthes $\frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{Tl}{h''^2}$ würde wieder auf die Gleichungen (286) führen, welche für gusseiserne Träger nicht angewendet werden dürfen, weil sonst $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2} < \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{Tl}{h''^2}$ wäre, sonach der letzte Werth, den man zu einem Maximum gemacht hätte, nicht mehr das mechanische Widerstandsmoment vorstellen könnte. Um daher das grösste mechanische Widerstandsmoment für ⊤ förmige Träger aus **Gusseisen** zu erhalten, drücke man dieses Moment durch die Formel

$$W = \tfrac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$$

aus, und treffe eine solche Wahl in den Verhältnissen der ⊤ Form, dass jener Ausdruck ein Maximum wird. Demgemäss hat man nach den obigen Bezeichnungen, wenn zugleich der Körperraum $Fl = K$ gesetzt wird.

$$W = \tfrac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2}{(1-2\gamma+\gamma n)^2} K$$

$$= \tfrac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{(1-4\gamma+6\gamma n-4\gamma n^2+\gamma^2 n^2)}{(1-2\gamma+\gamma n)^2} K \quad (289).$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{dW}{dn} = \tfrac{2}{9} \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma+\gamma n)^3} [1-(2-\gamma)n] K = 0,$$

also für

$$n = \frac{1}{(2-\gamma)} \text{ und } m = \gamma(2-\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (290),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2 W}{dn^2}$ negativ ausfällt. Hiernach erhält man das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes

$$W = \frac{1}{18(1-\gamma)} \frac{a^2}{m} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291).$$

Zugleich ist die Dicke der horizontalen Wand

$$(H-H') = (1-n)\, H = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right) H$$

und jene der verticalen

$$(B-B') = (1-m)\, B = (1-\gamma)^2 B \quad \Big\} \quad . \quad (292),$$

endlich das Verhältniss beider Wanddicken

$$(H-H') : (B-B') = H : (1-\gamma)(2-\gamma) B.$$

Noch hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Werthe

$$h' = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right) H \text{ und } h'' = \left(\frac{1}{2-\gamma}\right) H \quad . \quad . \quad (293).$$

Wird hiernach die ⊤ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen B, H und F das grösste mechanische Widerstandsmoment. Dabei muss aber gleichzeitig $\frac{a}{h'} \lessgtr \frac{r}{h''}$, d. i. $\frac{h''}{h'} \lessgtr \frac{r}{a}$ sein, also auch wegen der Gleichungen (293)

$$\gamma \lessgtr \left(1 - \frac{a}{r}\right) \text{ und } F \gtrless \frac{a}{r} B H.$$

Der Gebrauch der vorigen Gleichungen zur Ausmittlung der zweckmässigsten Formverhältnisse des ⊤ förmigen Querschnittes für gusseiserne Träger erscheint somit an die Bedingung geknüpft, dass der Flächenraum der ⊤ Form nicht kleiner als $\frac{a}{r} BH$ sein darf. Der Gegenfall erfordert eine besondere Untersuchung. Man wird desshalb zwischen folgenden drei Fällen unterscheiden:

$$A)\ F > \frac{a}{r} BH,$$

$$B)\ F = \frac{a}{r} BH$$

$$\text{und } C)\ F < \frac{a}{r} BH.$$

Der Werth von $\frac{a}{r}$, welcher diese Fälle gruppirt, variirt, wie man sieht, mit den Elasticitätsgränzwerthen a und r. Bezüglich der Wahl jenes Werthes gilt dasselbe, was bereits im §. 149 ad 2 gesagt wurde.

A) Ist $F > \frac{a}{r} BH$, so dienen die Formeln (290), (291), (292) und (293) zur Basis für die Ausmittlung der vortheilhaftesten Verhältnisse der ⊤ Form.

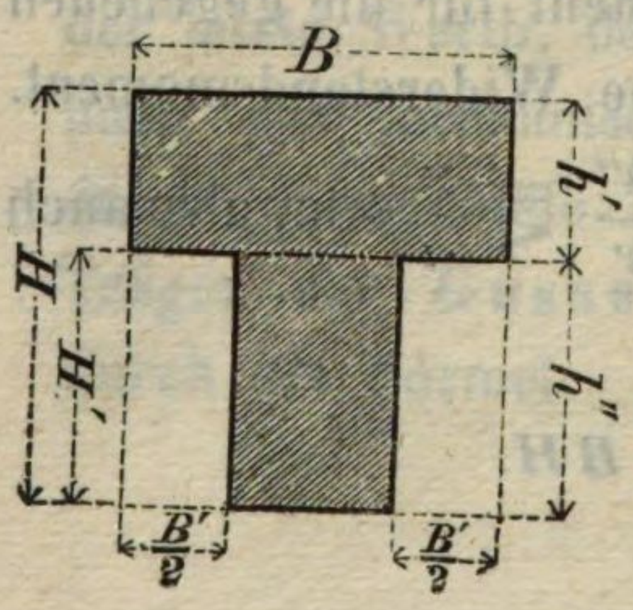
Ex. Es sei $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$, ferner der Flächenraum $F = \frac{2}{3} BH$ daher in der That grösser, als $\frac{a}{r} BH = \frac{1}{2} BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{3}$

$$n = \tfrac{3}{5} \mid h' = \tfrac{2}{5} H \mid H' = \tfrac{3}{5} H \mid (H - H') = \tfrac{2}{5} H$$
$$m = \tfrac{5}{9} \mid h'' = \tfrac{3}{5} H \mid B' = \tfrac{5}{9} B \mid (B - B') = \tfrac{4}{9} B,$$

$$(H - H') : (B - B') = 9H : 10B \text{ und}$$

$$W = \tfrac{1}{12} \frac{a^2}{m} K.$$

Fig. 229.



Soll $(H - H') = (B - B')$, d. i. die Dicke der horizontalen Wand eben so, wie jene der verticalen werden, so muss überdiess

$$B : H = 9 : 10$$

sein.

In der Fig. 229 sind diese speciellen Formverhältnisse anschaulich gemacht.

Im vorliegenden Falle ist offenbar $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, es wird somit für die zweckmässigste Materialvertheilung in der ⊤ Form des Trägers bei der Biegung die Elasticitätsgränze nur in den gespanntesten Querschnittstheilen erreicht. Auch bemerkt man aus der Gleicheit der Grössen h' und $(H—H')$, dass die neutrale Axe stets mit dem unteren Rande der horizontalen Flansche zusammenfällt.

B) Ist $F = \frac{a}{r} BH$, so lassen sich die vorigen Gleichungen noch immer anwenden.

Ex. Es sei wieder $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$, ferner $F = \frac{1}{2} BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{2}$

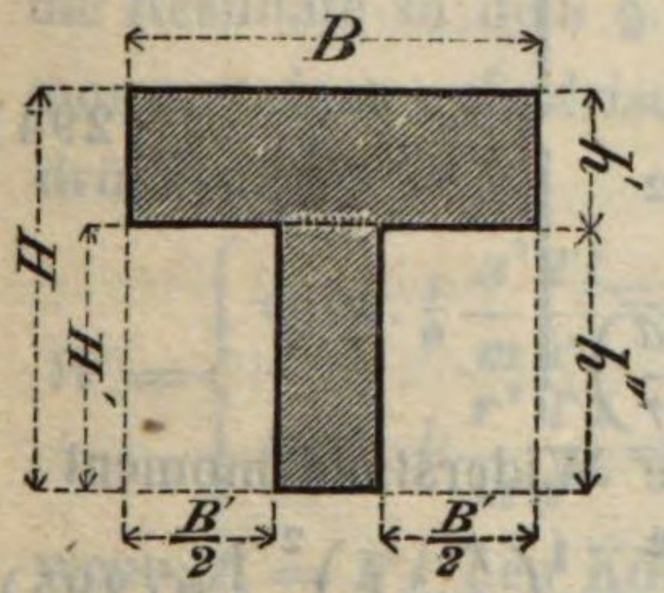
$$n = \tfrac{2}{3} \mid h' = \tfrac{1}{3} H \mid H' = \tfrac{2}{3} H \mid (H—H') = \tfrac{1}{3} H$$
$$\mathrm{m} = \tfrac{3}{4} \mid h'' = \tfrac{2}{3} H \mid B' = \tfrac{3}{4} B \mid (B—B') = \tfrac{1}{4} B,$$

$$(H — H') : (B — B') = 4H : 3B$$

und

$$W = \tfrac{1}{9} \frac{a^2}{m} K.$$

Fig. 230.



Diese Formverhältnisse sind in der Fig. 230 dargestellt. Für gleiche Wanddicken müsste ausserdem wegen $(H—H') = (B—B')$

$$B : H = 4 : 3$$

sein.

Hier werden offenbar wegen $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ bei der Biegung des Trägers die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen gleichzeitig erreicht. Auch fällt die neutrale Axe, wie ad **A**, mit dem inneren Rande der horizontalen Wand zusammen.

C) Ist endlich $F < \frac{a}{r} BH$, so lassen sich, wie bereits bemerkt wurde, die bisherigen Formeln nicht mehr anwenden. Der Werth von $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ kann zwar noch immer zu einem analytischen Maximum gemacht werden, allein es würde hiernach h' so klein und $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ so gross ausfallen, dass man genöthigt wäre, zu dem Werthe

$\frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2}$, als dem kleineren, zurückzukehren. In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass das mechanische Widerstandsmoment noch durch diese Formel repräsentirt werden kann. Offenbar geschieht dieser Bedingung Genüge für

$$\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''},$$

d. h. für $h' = \left(\frac{a}{a+r}\right) H$ und $h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right) H$.

Diese Formeln stimmen mit jenen im §. 149 ad C überein. In dem vorliegenden Falle ist also die zweckmässigste ⊤ Form für gusseiserne Träger zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes dieselbe, wie jene zur Erreichung des grössten Tragvermögens, und es werden bei der Biegung sowohl die gespanntesten, als auch die zumeist gepressten Querschnittstheile bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommen; so dass man für die vortheilhaftesten Formverhältnisse nach den Relationen (267)

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)}{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma} \\ \text{und } m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (294)$$

hat, und hiernach das grösste mechanische Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{18m}\left[r^2 - \frac{1}{\gamma}(r-a)^2\right] K = \frac{1}{18}\frac{a^2}{m}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\right] K \quad (295).$$

Ex. Es sei $\frac{r}{a} = 2$, ferner der Flächenraum $F = \frac{1}{3} B H$, daher in der That kleiner, als $\frac{a}{r} B H = \frac{1}{2} B H$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = 1 - \frac{F}{BH} = \frac{2}{3}$

$n = \frac{5}{6}$	$h' = \frac{1}{3} H$	$H' = \frac{5}{6} H$	$(H - H') = \frac{1}{6} H$
$m = \frac{4}{5}$	$h'' = \frac{2}{3} H$	$B' = \frac{4}{5} B$	$(B - B') = \frac{1}{5} B$,

$$(H - H') : (B - B') = 5H : 6B$$

und

$$W = \frac{5}{36}\frac{a^2}{m} K.$$

Für gleiche Wanddicken wäre wegen $(B - B') = (H - H')$ noch die Anordnung

$$B : H = 5 : 6$$

nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind bereits mittelst der Figur 215 anschaulich gemacht worden.

In den gewählten Beispielen ad A, B und C hat man für das mechanische Widerstandsmoment W die beziehungsweisen Werthe $\frac{1}{12}\frac{a^2}{m}K$, $\frac{1}{9}\frac{a^2}{m}K$ und $\frac{5}{36}\frac{a^2}{m}K$ gefunden. Einem Träger von gleichem Körperraume mit rechteckigem Querschnitte würde nach der Relation (149), weil für Gusseisen $a < r$ ist, nur das mechanische Widerstandsmoment $\frac{1}{18}\frac{a^2}{m}K$ entsprechen. Der Vergleich zwischen diesem und jenen obigen Werthen lässt die verhältnissmässig grosse Widerstandsfähigkeit gusseiserner Träger mit ⊤ förmigen Querschnitten erkennen, obgleich dieselbe gegen diejenige zurückbleibt, welche durch die Anwendung der ⊥ Form mit ungleichen Flanschen erreicht werden kann.

§. 165.

Röhrenquerschnitte. Mit Bezug auf die Bezeichnungen und die Resultate in dem §. 138 kann man das mechanische Widerstandsmoment einer cylindrischen Röhre (Fig. 231) durch die Formel ausdrücken:

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2} = \frac{1}{24}(1+n^2)\frac{a^2}{m}K = \frac{1}{24}(2-2x+x^2)\frac{a^2}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2} = \frac{1}{24}(1+n^2)\frac{r^2}{m}K = \frac{1}{24}(2-2x+x^2)\frac{r^2}{m}K \end{array} \right\} \quad (296)$$

wenn $K = Fl$ den Körperraum der Röhre bezeichnet.

Fig. 231.

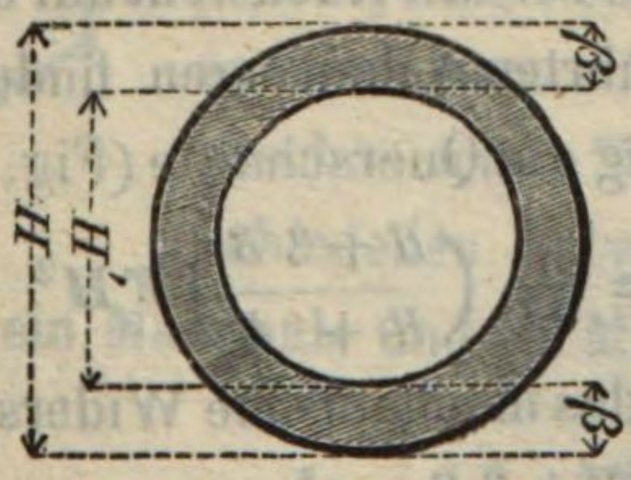
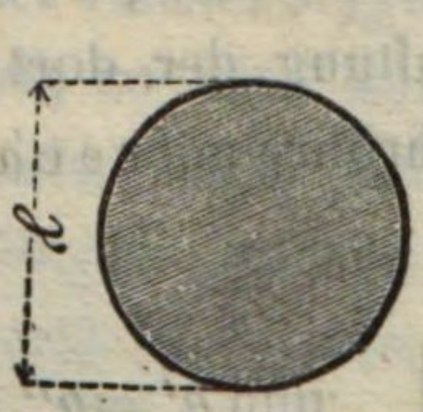


Fig. 232.



Für einen Cylinder (Fig. 232), welcher den gleichen Körperraum wie die Röhre hat, ist das mechanische Widerstandsmoment nach den Relationen

$$W' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{24} \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{r^2}{m} K. \end{cases}$$

Demnach findet man durch Vergleichung

$$W' : W = 1 : (1 + n^2) = 1 : (2 - 2x + x^2) \quad . \quad (297).$$

Insbesondere wird

für $x = 1$, $\beta = 0{\cdot}50\,H$ und $W' : W = 1 : 1$

„ $x = 0{\cdot}9$, $\beta = 0{\cdot}45\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}01$

„ $x = 0{\cdot}8$, $\beta = 0{\cdot}40\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}04$

„ $x = 0{\cdot}7$, $\beta = 0{\cdot}35\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}09$

„ $x = 0{\cdot}6$, $\beta = 0{\cdot}30\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}16$

„ $x = 0{\cdot}5$, $\beta = 0{\cdot}25\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}25$

„ $x = 0{\cdot}4$, $\beta = 0{\cdot}20\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}36$

„ $x = 0{\cdot}3$, $\beta = 0{\cdot}15\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}49$

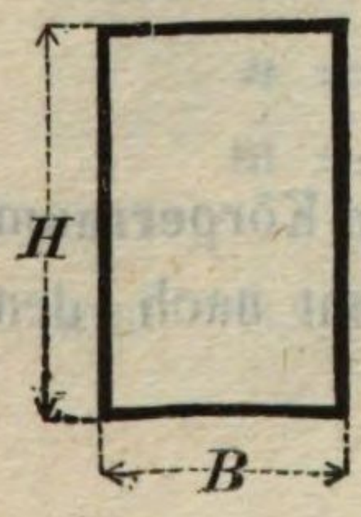
„ $x = 0{\cdot}2$, $\beta = 0{\cdot}10\,H$ „ $= 1 : 1{\cdot}64$

Diese Zahlenwerthe verglichen mit jenen in den §§. 138 und 150 zeigen, dass der mit dem Röhrenquerschnitte zu erreichende Vortheil bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes gegen denjenigen zurückbleibt, welcher bezüglich der Steifigkeit oder des Tragvermögens der Röhre erreicht werden kann. Auch hat das Verhältniss $W' : W$ nicht nur eine practische Gränze, weil die Verkleinerung von x aus dem in jenen §§. angegebenen Grunde nicht ohne Ende fortgesetzt werden kann, sondern dasselbe ist im vorliegenden Falle auch von theoretischer Seite begränzt, indem für $x = o$ das analytisch grösste Verhältniss $W' : W = 1 : 2$ entsteht, welches natürlich in der Praxis nicht erreicht werden kann.

§. 166.

Blechröhrenquerschnitte. Mit Rücksicht auf den §. 139 und unter Beibehaltung der dort eingeführten Näherungen findet man zuerst für eine Blechröhre mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 233) wegen

Fig. 233.



$$T = \frac{1}{12}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) F H^2$$

und $h' = h'' = \frac{1}{2}H$ das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{18}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) \frac{r^2}{m} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (298)$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtrless a$, also von den betreffenden Alternativ-Werthen für das Widerstandsmoment jener mit dem Factor r zu nehmen ist.

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient

$$\frac{1}{18}\left(\frac{H+3B}{H+B}\right) = \frac{1}{18}\left\{\frac{1+3\frac{B}{H}}{1+\frac{B}{H}}\right\}$$

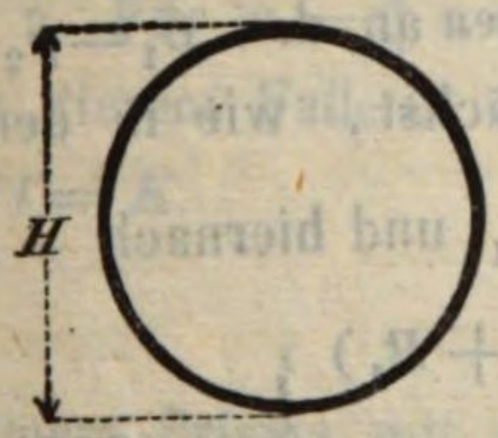
variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die beiden Gränzen für denselben erhält man, die eine für $B=o$ mit $\frac{1}{18}$, und die andere für $H=o$ mit $\frac{1}{6}$.

Für $B=H$ geht das Reckteck in ein Quadrat über, und für dieses wird

$$W = \frac{1}{9}\frac{r^2}{m}K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (299).$$

Hier ist der Coefficient $(\frac{1}{9})$ das arithmetische Mittel aus jenen Gränzwerthen, und doppelt so gross, wie bei einem vollen Quadrate $(\frac{1}{18})$.

Fig. 234.

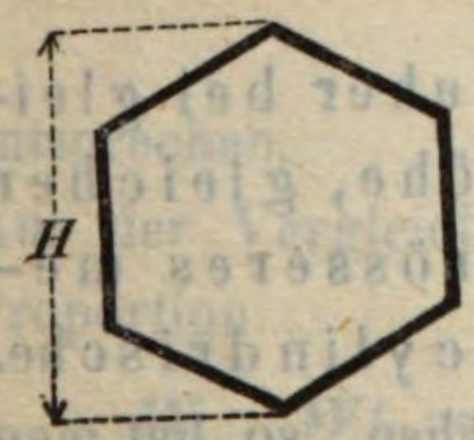


Für eine cylindrische Blechröhre (Fig. 234) ist mit Rücksicht auf die Formel (243) $T=\frac{1}{8}FH^2$, man findet daher, wegen $h'=h''=\frac{1}{2}H$, das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12}\frac{r^2}{m}K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300).$$

Auch hier ist der Coefficient $(\frac{1}{12})$ doppelt so gross, wie bei einem vollen Kreisquerschnitte.

Fig. 235.



Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein regelmässiges Polygon (Fig. 235), so hat man das mechanische Widerstandsmoment mit Benützung der Formel (244) auf analoge Weise, wie bezüglich der vollen Polygone (§. 125) aufzusuchen. Wie dort, so wird auch hier das mechanische Widerstandsmoment mit den verschiedenen Polygonstellungen variiren, und für dasselbe stets ein Maximal- und ein Minimalwerth vorhanden sein.

§. 167.

Vergleichung der mechanischen Widerstandsmomente von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren.

Behufs dieser Vergleichung behalte man die im §. 140 gewählte

Bezeichnungsweise bei, und benütze die betreffenden Formeln aus dem vorigen §.

Hiernach findet man für die vierkantige Röhre mit rechteckigem Querschnitte

den Körperraum . . . . . $K_1 = F_1 l_1 = 2(H_1 + B_1)\beta_1 l_1$

und das mechanische Widerstandsmoment . . . . . $W_1 = \frac{1}{18}\left(\begin{matrix} H_1 + 3B_1 \\ H_1 + B_1 \end{matrix}\right)\frac{r^2}{m}K_1$,

ferner für die cylindrische Röhre

den Körperraum . . . . . $K_2 = F_2 l_2 = \pi H_2 \beta_2 l_2$

und das mechanische Widerstandsmoment . . . . . $W_2 = \frac{1}{12}\frac{r^2}{m}K_2$,

also durch Vergleichung

$$W_1 : W_2 = \left(\frac{H_1 + 3B_1}{H_1 + B_1}\right)K_1 : \tfrac{3}{2}K_2 \quad . \quad . \quad . \quad (301).$$

1. Nimmt man für beide Röhren gleiche Wanddicken, gleiche Querschnittshöhen, gleiche Längen und gleiche Blechmengen an, d. i. $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$, $l_1 = l_2$ und $K_1 = K_2$, so wird zunächst, wie in den §§. 140 und 152, $B_1 = \frac{(\pi - 2)}{2}H_1 = 0\,5708\,H_1$ und hiernach

$$\left.\begin{aligned} W_1 : W_2 &= 4(H_1 + 3B_1) : 3(H_1 + B_1) \\ &= 2(3\pi - 4) : 3\pi \\ &= 1{\cdot}151 : 1 \end{aligned}\right\} \quad (302).$$

Dieses Verhältniss stimmt mit den sub (246) und (274) gegebenen überein.

Die vierkantige Röhre entwickelt daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Querschnittshöhe, gleicher Länge und gleicher Blechmenge ein grösseres mechanisches Widerstandsmoment, als die cylindrische.

2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$ und setzt man auch in diesem Falle $K_1 = K_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (301) auf

$$W_1 : W_2 = 4 : 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (303).$$

Bei gleicher Blechmenge entwickelt daher die vierkantige Röhre auch dann ein grösseres mechanisches Widerstandsmoment, als die cylindrische, wenn dieselbe einen quadratischen Querschnitt hat.

§. 168.

Cannelirtes Blech (Fig. 236). Mit Bezug auf die im §. 141 eingeführten Bezeichnungen wird das mechanische Widerstandsmoment W einer Cannelirung (Fig. 237)

Fig. 236.

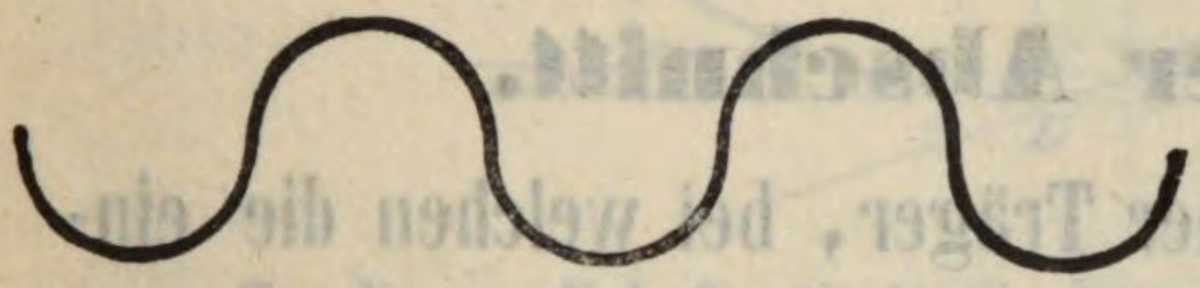
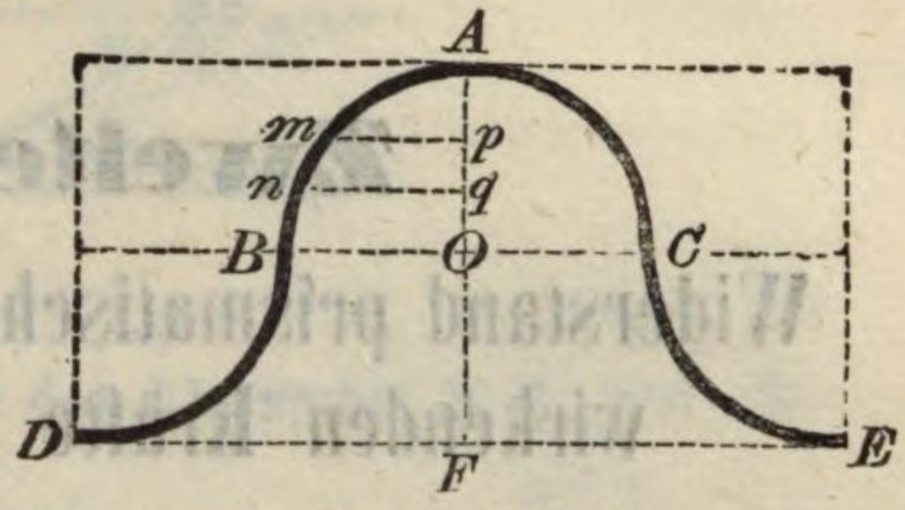


Fig. 237.



$$W = \frac{1}{48}\frac{r^2 b^2 \beta}{m c^2}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda-(1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)\right]l \quad (304),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \lessgtr a$, also von den beiden Alternativwerthen für das Widerstandsmoment wegen $h' = h'' = c$ jener mit dem Factor r, $\left(\frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2}\right)$, als der kleinere anzunehmen ist.

Für $n = \frac{4}{3}$ wurde z. B. im §. 141 $T = 0{\cdot}1191\,FH^2$ gefunden. In diesem Falle ist daher das mechanische Widerstandsmoment wegen $Fl = K$

$$W = 0{\cdot}0794\,\frac{r^2}{m}K.$$

Einem Prisma mit rechteckigem Querschnitte, welches mit der Blechcannelirung einerlei Körperraum hat, würde nur das mechanische Widerstandsmoment

$$W' = \frac{1}{18}\frac{r^2}{m}K = 0{\cdot}0556\,\frac{r^2}{m}K$$

entsprechen.

Aus der Vergleichung der Werthe für W und W' ergibt sich die Proportion

$$W : W' = 0{\cdot}0794\,\frac{r^2}{m}K : 0{\cdot}0556\,\frac{r^2}{m}K = 1{\cdot}4292 : 1$$

und hieraus der Schluss, dass das cannelirte Blech ein verhältnissmässig bedeutendes mechanisches Widerstandsmoment entwickeln kann.

Zweiter Abschnitt.

Widerstand prismatischer Träger, bei welchen die einwirkenden Kräfte normal auf die Längenaxe gerichtet sind.

§. 169.

Im ersten Hauptstücke hat man die Anwendung der allgemeinen Untersuchungen hinsichtlich des Biegungswiderstandes nur auf die im §. 58 erwähnten vier einfachsten Fälle gemacht. Im Constructionswesen kommen aber noch viele andere Fälle vor. Um daher zu zeigen, auf welche Weise man sodann die Steifigkeit des Trägers, das Tragvermögen und das mechanische Widerstandsmoment zu beurtheilen hat, werden in diesem Abschnitte die wichtigsten Fälle behandelt. Hierbei wird stets angenommen, dass die Kräfte normal auf die Längenaxe gerichtet sind.

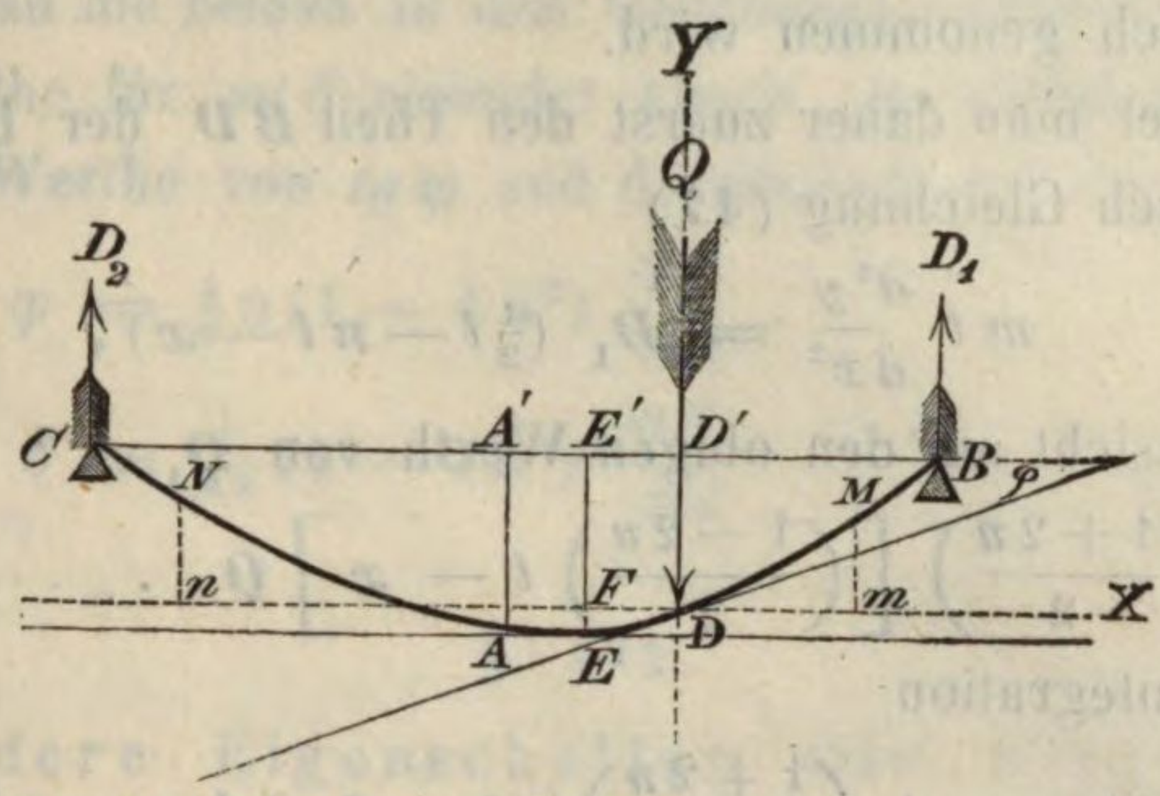
Erstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden unterstützten Trägers, welcher an einer beliebigen Stelle belastet ist.

§. 170.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 238) den prismatischen Träger BC in B und C unterstützt und in dem Puncte D belastet. Es sei in diesem Falle die Biegung, das Tragvermögen und das mechanische Widerstandsmoment des Trägers zu bestimmen.

Fig. 238.



Zu diesem Behufe sei A' die Mitte des Abstandes $B\,C$, und dieser letztere . . . . . $= l$,
die Entfernung des Kraftangriffspunctes D von der verticalen Mittellinie, d. i. $A'D'$ . . . . . $= n\,l$,*)
und die Senkung $D\,D'$ dieses Punctes . . . . . $= \delta$;
ferner für einen beliebigen Punct M des Curventheils $B\,D$
die horizontale Abscisse $D\,m$ . . . . . $= x$,
die verticale Ordinate $M\,m$ . . . . . $= y$,
und der Winkel, welchen die Tangente in D mit dem Horizonte bildet . . . . . $= \varphi$.

Die Bezeichnungen m und t seien dieselben, wie im §. 53.

Sind noch die Componenten der Last Q, welche als die Drücke auf die Stützen in B und C auftreten, beziehungsweise D_1 und D_2, so hat man, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird,

$$D_1 = \left(\frac{1+2n}{2}\right) Q$$

$$\text{und } D_2 = \left(\frac{1-2n}{2}\right) Q.$$

Für $n = o$ befindet sich die Last in der halben Länge, und es ist sodann $D_1 = D_2 = \frac{1}{2} Q$.

Biegung.

§. 171.

Allgemeine Ableitung. Der in Fig. 238 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn der Träger nach der Biegung in D festge-

*) n muss stets kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

halten, und in B und C von den aufwärts wirkenden Kräften D_1 und D_2 in Anspruch genommen wird.

Betrachtet man daher zuerst den Theil BD der Biegungscurve, so hat man nach Gleichung (47)

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = D_1\,(\tfrac{1}{2}l - nl - x),$$

also mit Rücksicht auf den obigen Werth von D_1

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1+2n}{2}\right)\left[\left(\frac{1-2n}{2}\right)l - x\right]Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305),$$

somit durch Integration

$$mt\,\frac{dy}{dx} = mt\,tg\,\varphi + \left(\frac{1+2n}{4}\right)[(1-2n)\,lx - x^2]\,Q. \quad (306)$$

und

$$mt\,y = mt\,tg\,\varphi\,x + \left(\frac{1+2n}{4}\right)\left[(1-2n)\,\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]Q. \quad (307),$$

wenn man beachtet, dass für $x = o$ auch $y = o$, hingegen $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ werden muss. Da ferner für den Punct B die gleichzeitigen Werthe

$$x = (\tfrac{1}{2} - n)\,l = \left(\frac{1-2n}{2}\right)l \text{ und } y = \delta$$

existiren, so hat man noch

$$mt\,\delta = \tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi\,(1-2n)\,l + (1+2n)\,(1-2n)^3\,\frac{Q\,l^3}{48} \quad (308).$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den Curventheil CD, wenn man für irgend einen Punct N dieses Theiles die Coordinaten $Dn = x$ und $Nn = y$ annimmt, die Bedingungsgleichungen

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1-2n}{2}\right)\left[\left(\frac{1+2n}{2}\right)l - x\right]Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = -\,mt\,tg\,\varphi + \left(\frac{1-2n}{4}\right)[(1+2n)\,lx - x^2]\,Q \quad (310)$$

und

$$mt\,y = -\,mt\,tg\,\varphi\,x + \left(\frac{1-2n}{4}\right)\left[(1+2n)\,\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]Q \quad (311),$$

da hier die gleichzeitigen Werthe $x = o$, $\frac{dy}{dx} = -\,tg\,\varphi$ und $y = o$ stattfinden. Auch hat man für den Punct C, $x = \left(\frac{1+2n}{2}\right)l$ u. $y = \delta$, somit

$$mt\,\delta = -\,\tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi\,(1+2n)\,l + (1-2n)\,(1+2n)^3\,\frac{Q\,l^3}{48} \quad . \quad (312).$$

Setzt man die beiden in den Gleichungen (308) und (312) gegebenen Werthe für $mt\delta$ einander gleich, so findet man die bisher unbekannten Werthe von $tg\,\varphi$ und δ, nämlich

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{6} n (1 - 4n^2) \frac{Q l^2}{mt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

$$\text{und} \quad \delta = \tfrac{1}{48} (1 - 4n^2)^2 \frac{Q l^3}{mt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314).$$

§. 172.

Besondere Eigenschaften der Biegungscurve. (Fig. 238.)

1. Da *tang* φ mit n positiv oder negativ wird, so sieht man, dass die Tangente an dem Puncte D mit der Geraden BC auf derjenigen Seite convergirt, wo das kleinere von den beiden Curvenstücken BD und CD liegt.

2. Mit Hilfe des Werthes von *tang* φ gehen die unbestimmten Gleichungen (307) und (311), welche zu den beiden Curvenstücken gehören, in bestimmte über, nämlich für den Curventheil BD in:

$$mty = \left(\frac{1+2n}{24}\right) Q\,[\quad 4n(1-2n)l^2x + 3(1-2n)lx^2 - 2x^3] \quad (315),$$

und für den Curventheil CD in:

$$mty = \left(\frac{1-2n}{24}\right) Q\,[-4n(1+2n)l^2x + 3(1+2n)lx^2 - 2x^3] \quad (316).$$

3. Die grösste Biegung EE' findet zu Folge der Bemerkung ad 1 in dem grösseren Curventheil (CD) und zwar an derjenigen Stelle E statt, wo die Tangente an die Curve horizontal, d. h. wo $\frac{dy}{dx} = o$ ist. Nennt man für diesen Punct E, die Abscisse $DF = x'$ und den numerischen Werth der Ordinate $EF = y'$, ferner die grösste Biegung $EE' = \delta'$ so ist offenbar

$$\delta' = \delta + y',$$

und man wird nur noch mit Rücksicht auf die Gleichung (316) $\frac{dy}{dx} = o$ zu setzen haben, um hieraus den Werth von $x = x'$ und hiermit die Ordinate $y = y'$ zu bestimmen. Demgemäss findet man wegen

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-2n}{24}\right) Q\,[-4n(1+2n)l^2 + 6(1+2n)lx - 6x^2] = o$$

$$x = x' = D'E' = \tfrac{1}{2}\left[1 + 2n - \sqrt{(1+2n)(1-\tfrac{2}{3}n)}\right] l \quad . \quad (317),$$

womit y' nunmehr aus der Gleichung (316) berechnet werden kann. Man wird für y' zwar einen negativen Werth erhalten, es ist jedoch in der Formel $\delta' = \delta + y'$ bloss der numerische Werth von y' ohne Rücksicht auf das Zeichen zu substituiren.

Um diess durch ein Beispiel zu erläutern, sei $n = \frac{1}{4}$. Hiermit findet man aus der Gleichung

$$(314)\quad \delta = \frac{9}{16} \cdot \frac{Q l^3}{48 m t} = 0{\cdot}5625 \cdot \frac{Q l^3}{48 m t} = \frac{3}{256} \frac{Q l^3}{m t},$$

$$(316)\quad y = [-3 l^2 + \tfrac{9}{2} l x - 2 x^2] \frac{Q x}{48 m t},$$

$$(317)\quad x' = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right) l = 0{\cdot}1910\, l,$$

(316) numerisch genommen $y' = \left(\frac{9 - \sqrt{5}}{16}\right) \frac{Q l^3}{48 m t} = 0{\cdot}4228 \frac{Q l^3}{48 m t}$,

und wegen $\delta' = \delta + y'$ endlich

$$\delta' = 0{\cdot}9853 \frac{Q l^3}{48 m t}.$$

4. Ist die Last Q in der Mitte, also der einfache Fall III vorhanden, wie in Fig. 59 ad §. 63, so wird $n = o$, somit

nach Gleichung (313) . . . . . $tang\, \varphi = o$,

„ (314) . . . . . $\delta = \frac{Q l^3}{48 m t}$,

„ (315) } . . . . . $m t\, y = \frac{Q}{24} (3 l x^2 - 2 x^3)$,

„ (316) }

also die Biegungscurve symmetrisch, ferner $x' = o$, $y' = o$ und $\delta' = \delta$.

Diese Resultate stimmen mit dem §. 63 überein. Auch ist in diesem Falle ($n = o$) die Biegung $\delta' = \delta$ grösser, als in dem ad 3 betrachteten Falle.

Tragvermögen.

§. 173.

Allgemeine Formel. Nach §. 127 muss der gefährliche Querschnitt an der Stelle D liegen, wo die Kraft Q ihren Angriffspunct hat. Für diese Stelle ist das Moment der einwirkenden Kräfte $D_1 . \overline{BD'}$ oder $D_2 . \overline{CD'}$, welche beiden Werthe dasselbe Resultat geben müssen. In der That ist

$$D_1 = \left(\frac{1+2n}{2}\right) Q, \text{ ferner } \overline{BD'} = \left(\frac{1-2n}{2}\right) l$$

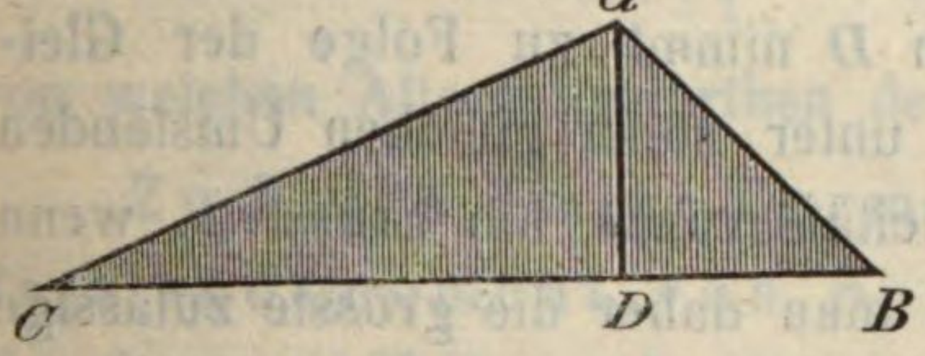
$$D_2 = \left(\frac{1-2n}{2}\right) Q, \text{ und } \overline{CD'} = \left(\frac{1+2n}{2}\right) l,$$

somit

$$D_1 \,.\, \overline{BD'} = D_2 \,.\, \overline{CD'} = \left(\frac{1-4n^2}{4}\right) Q\, l.$$

Nachdem zufolge der Gleichung (47) im §. 52 auch der Werth $mt\frac{d^2y}{dx^2}$ das statische Kraftmoment repräsentirt, dieser Werth aber aus der Gleichung (305) oder (309) zu entnehmen ist, je nachdem man eines der beiden Curvenstücke BD oder CD betrachtet, so wird man das Kraftmoment für den Punct D auch erhalten können, wenn man in der einen oder in der andern jener citirten Gleichungen die Abscisse $x = o$ setzt.

Fig. 239.



Wenn man übrigens die statischen Kraftmomente nach den Gleichungen (305) und (309) im Sinne des §. 127 graphisch darstellt, so gelangt man zur Fig. 239. Der grösste numerische Werth für das Kraftmoment ist offenbar in D vorhanden, wesshalb daselbst in Uebereinstimmung mit dem Gesagten nach §. 127 der gefährliche Querschnitt liegen muss.

Heisst man M das Tragmoment des Querschnittes im Sinne des §. 77, und beachtet, dass dasselbe gleich dem obigen Kraftmomente sein muss, wenn bei der Anspruchsnahme des Trägers die Gränze der Elasticität geradezu erreicht werden soll, so ist die dazu nöthige (also grösste zulässige) Belastung $Max.\ Q$ das Tragvermögen. Dieses folgt daher aus der Relation

$$\left(\frac{1-4n^2}{4}\right) l \,.\, Max.\ Q = M$$

mit

$$Max.\ Q = \frac{4M}{(1-4n^2)\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318).$$

§. 174.

Besondere Eigenschaften.

1. Die Gleichung (318) für das Tragvermögen ist, wie man sieht, von n, also von der Lage des Angriffspunctes D abhängig. Dasselbe wird desto kleiner, je näher der Punct D gegen die Mitte des Trägers rückt. Das kleinste Tragvermögen findet daher für $n = o$ statt, d. h. wenn die Last Q in der Mitte wirkt, und in diesem ungünstigsten Falle ist in Uebereinstimmung mit der Gleichung (108) im §. 86

$$Max.\ Q = \frac{4\,M}{l}.$$

In allen andern Fällen ist das Tragvermögen grösser. So z. B. erhält man für $n = \frac{1}{4}$

$$Max.\ Q = 5\tfrac{1}{3}\,\frac{M}{l},$$

somit das Tragvermögen $1\frac{1}{3}$mal so gross, wie zuvor.

2. Die Biegung δ des Trägers in D nimmt zu Folge der Gleichung (314) mit Q zu, und wird unter sonst gleichen Umständen und ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränze am grössten, wenn Q das Tragvermögen erreicht. Nennt man daher die grösste zulässige Biegung in D, $Max.\ \delta$, so hat man

$$Max.\ \delta = (1 - 4\,n^2)^2\ \frac{Q l^3\ Max.}{48\,m\,t},$$

somit wegen der Gleichung (318) auch

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{12}\ (1 - 4\,n^2)^2\ \frac{M l^2}{m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319).$$

Für $n = o$ befindet sich die Last Q in der Mitte des Trägers, und es stimmt sodann das diessfällige Resultat $\frac{M l^2}{12\,m\,t}$ mit der Formel (119) im §. 92 überein.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 175.

Allgemeine Formel. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erschöpfung seines Tragver-

mögens leisten kann, ist nach Anleitung des §. 107 aus der Formel

$$W = \tfrac{1}{2}\,(Max.\ Q)\ .\ (Max.\ \delta)$$

zu berechnen. Substituirt man daher für *Max. Q* und *Max. δ* die entsprechenden Werthe (318) und (319), so erhält man nach vorgenommener Reduction

$$W = \tfrac{1}{6}\,\frac{M^2\,l}{m\,t},$$

und, weil nach Gleichung (95) das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw.}\ \dfrac{a\,t}{h'} \\ \text{oder}\ \dfrac{r\,t}{h''} \end{cases}$$

ist, auch

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.}\ \tfrac{1}{6}\,\dfrac{a^2}{m}\,\dfrac{t\,l}{h'^2} \\ \text{oder}\ \tfrac{1}{6}\,\dfrac{r^2}{m}\,\dfrac{t\,l}{h''^2} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (320),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat.

Zu Folge dieser Formel ist das mechanische Widerstandsmoment von *n*, daher von der Lage des Kraftangriffspunctes *D* unabhängig. Diess bestätigt auch die Identität der Relationen (148) und (320), von welchen die erstere dem Falle angehört, wo der Kraftangriffspunct in der halben Länge des Trägers sich befindet.

Zweites Kapitel.

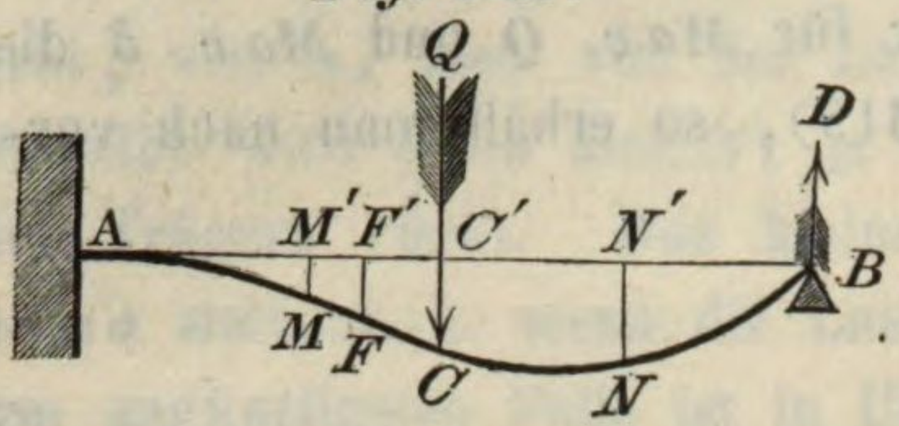
Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe an einer beliebigen Stelle belastet ist.

§. 176.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 240) den prismatischen Träger *AB* an einem Ende *A* festgehalten, am anderen Ende *B* unterstützt, und an der Stelle *C* belastet. Man suche wieder die

Biegung, das Tragvermögen und das mechanische Widerstandsmoment des Trägers.

Fig. 240.



Zu diesem Behufe sei

das Belastungsgewicht $= Q$,

der Abstand AB . . . $= l$,

der Abstand AC' . . . $= nl$,

und die Senkung des Punctes C d. i. CC' . . . $= \delta$,

man zähle ferner von A aus, als Coordinatenursprung die horizontalen Abscissen in der Richtung von A gegen B, die verticalen Ordinaten hingegen nach abwärts, und nenne sofort für einen beliebigen Punct M des Curventheiles AC

$AM' =$ . . . . . $= x$,

$MM' =$ . . . . . $= y$,

und den Winkel, welche die Tangente in C mit dem Horizonte bildet . . . . . $= \varphi$.

Die Buchstaben m und t behalten die bisherige Bedeutung bei. Noch sei D der Druck auf die Stütze in B, welcher durch die Belastung Q hervorgebracht wird, und es werde hierbei von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt. Dieser Druck D lässt sich im vorliegenden Falle nicht im Voraus bestimmen, sondern derselbe wird sich erst im Laufe der Untersuchung ergeben. Betreffend den Coefficienten n in der Annahme $AC' = nl$, so kann derselbe zwischen den Gränzen 0 und 1 variiren.

Biegung.

§. 177.

Allgemeine Ableitung. Der in der Fig. 240 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn man die Stütze in B weggenommen, und an deren Statt eine Kraft angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt dem Drucke D auf jene Stütze ist.

Betrachtet man vorläufig nur den Theil der Biegungscurve AC, so hat man im Sinne der Gleichung (47)

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = Q\,(nl - x) - D\,(l - x) \quad . \quad . \quad (321),$$

daher durch Integration

$$mt\,\frac{dy}{dx} = Q\left(nlx - \frac{x^2}{2}\right) - D\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad (322)$$

und

$$mt\,y = Q\left(\frac{nlx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - D\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad . \quad . \quad (323),$$

wenn man berücksichtigt, dass an dem festgehaltenen Ende die Werthe für x, y und $\frac{dy}{dx}$ zugleich verschwinden müssen. Für den Punct C ist $x = nl$, $y = \delta$ und $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$, somit

$$mt\,tg\,\varphi = \left[\tfrac{1}{2}n^2Q - D\left(n - \tfrac{1}{2}n^2\right)\right]l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

und

$$mt\,\delta = \left[\tfrac{1}{3}n^3Q - D\left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3\right)\right]l^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325).$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den Curventheil BC, wenn man für einen Punct N desselben die Coordinaten $AN' = x$ und $NN' = y$ setzt, die Bedingungsgleichungen

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,(l - x)\,D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = C - \left(lx - \frac{x^2}{2}\right)D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

und

$$mt\,y = C' + Cx - \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (328).$$

Um die noch unbekannten Coefficienten C und C' zu bestimmen, beachte man, dass für $x = nl$ eben so, wie früher, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = \delta$ werden muss, und dass man hiernach erhält:

$$mt\,tg\,\varphi = C - \left(n - \tfrac{1}{2}n^2\right)D\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

und

$$mt\,\delta = C' + Cnl - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{6}\right)D\,l^3 \quad . \quad . \quad . \quad (330).$$

Setzt man jetzt die Relationen (324) und (329) und beziehungsweise (325) und (330) einander gleich, und bestimmt hieraus die Constanten C und C', so findet man

$$C = \tfrac{1}{2}n^2Q\,l^2 \text{ und } C' = -\,\tfrac{1}{6}n^3Q\,l^3.$$

Berücksichtigt man endlich, dass für $x = l$ in der Gleichung (328) $y = o$ werden muss, so hat man

$$C' + Cl - \tfrac{1}{3}D\,l^3 = o,$$

und hieraus, wenn man statt C und C' die obigen Werthe substituirt,

$$D = \frac{n^2(3-n)}{2} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331).$$

Der Druck D auf die Stütze in B, welcher anfänglich unbekannt war, ist also durch die Gleichung (331) bestimmt. Derselbe ist mit n, d. h. mit der Lage des Angriffspunctes von Q veränderlich.

So z. B. wird

$$\text{für } n = \tfrac{1}{4},\ D = \tfrac{11}{128} Q$$
$$,, \quad n = \tfrac{1}{2},\ D = \tfrac{5}{16} Q$$
$$,, \quad n = \tfrac{3}{4},\ D = \tfrac{81}{128} Q$$
$$\text{etc. etc.}$$

Es können nunmehr die Gleichungen, worin D erscheint, bestimmt dargestellt werden. Hiernach findet man aus den Relationen (324) und (325)

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{4}(1-n)(2-4n+n^2)\, n^2 \frac{Q l^2}{m t} \quad . \quad . \quad (332)$$

und die Biegung

$$\delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2 (4-n)\, n^3 \frac{Q l^3}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333).$$

§. 178.

Besondere Eigenschaften der Biegungscurve.

1. Da die Gleichung (321) für einen zulässigen Werth von x Null werden kann, so folgt nach §. 52 ad 3 in Verbindung mit der Relation (47), dass der Curventheil AC (Fig. 240) einen Wendepunct F besitzt. Den Werth für seine Abscisse $x = AF'$ erhält man aus der Gleichung

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = Q(n l - x) - D(l - x) = o,$$

mit

$$x = AF' = \left(\frac{nQ-D}{Q-D}\right) l = \frac{n(2-n)}{2+n(2-n)} l \quad . \quad (334).$$

Ist z. B. die Last Q in der Mitte zwischen A und B, oder $n = \frac{1}{2}$, so hat man $AF' = \frac{3}{11} l = \frac{3}{11} AB$.

2. Der Werth von

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{4}(1-n)(2-4n+n^2)n^2\,\frac{Ql^2}{mt}$$

verschwindet für $n = (2-\sqrt{2}) = 0{\cdot}5859$, sonst aber wird er positiv für $n < (2-\sqrt{2})$, und negativ für $n > (2-\sqrt{2})$.

Fig. 241.

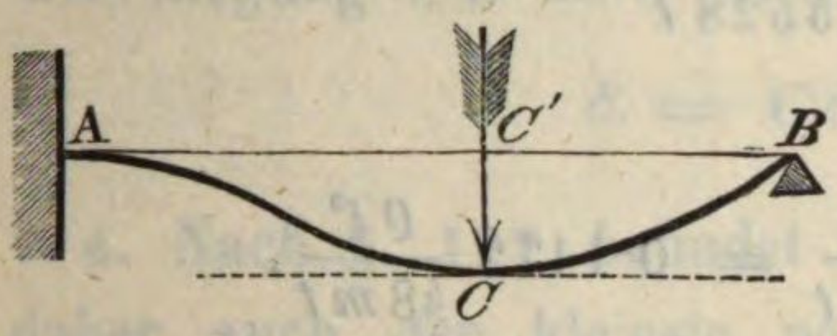


Fig. 242.

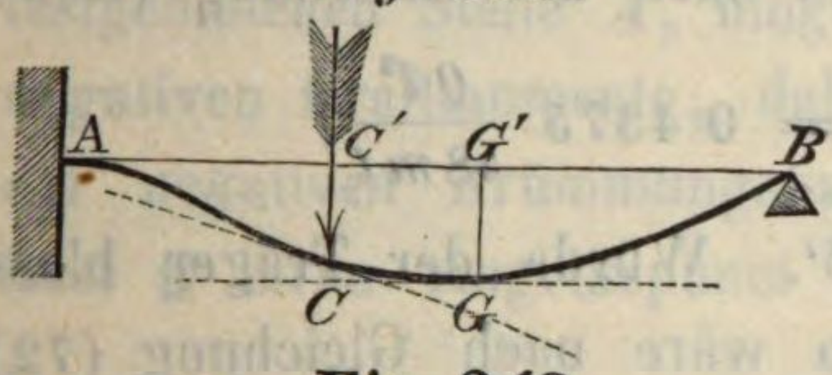
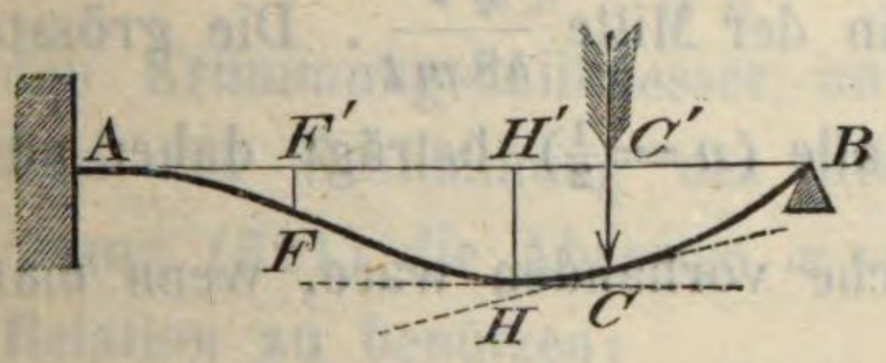


Fig. 243.



Hieraus folgt, dass die Tangente in C horizontal geht, wenn (Fig. 241) $AC' = (2-\sqrt{2})\,l$ ist, in jedem anderen Falle aber mit der Horizontalen AB convergirt, und zwar für $AC' < (2-\sqrt{2})\,l$ (Fig. 242) in der Richtung gegen A, hingegen für $AC' > (2-\sqrt{2})\,l$ (Fig. 243) in jener gegen B. So wird z. B. für $n = \frac{1}{2}$,

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{128}\cdot\frac{Ql^2}{mt},$$

also positiv, und die Tangente convergirt mit dem Horizonte, wie in der Fig. 242.

3. Ist, wie in der Figur 241, $n = (2-\sqrt{2})$, also die Tangente in C horizontal, so ist die Biegung $CC' = \delta$ zugleich die grösste in der ganzen Ausdehnung der Biegungscurve, und ihr Werth nach der Gleichung (333)

$$\delta = \left(\frac{17-12\sqrt{2}}{3}\right)\frac{Ql^3}{mt} = 0{\cdot}0098\,\frac{Ql^3}{mt}.$$

Ist aber, wie in der Fig. 242, $n < (2-\sqrt{2})$, so liegt der grösste Biegungspfeil GG' in dem Curvenstücke BC. In diesem Falle geht die Tangente in G horizontal, und es muss für $x = AG'$ die Gleichung (327) verschwinden. Man hat sodann

$$mt\,\frac{dy}{dx} = C - (lx - \tfrac{1}{2}x^2)D = o,$$

daher nach Substitution der Werthe für C und D,

$$x = AG' = \left(1-\sqrt{\frac{1-n}{3-n}}\right)l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (335),$$

und hiermit die grösste Durchbiegung $\delta' = GG'$ nach der Gleichung (328)

$$\delta' = GG' = \tfrac{1}{6}\, n^2\, (1-n) \sqrt{\frac{1-n}{3-n}} \cdot \frac{Q\, l^3}{m\, t} \quad (336).$$

Ist z. B. wieder $n = \frac{1}{2}$, so findet man

$$AG' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) l = 0{\cdot}5528\, l$$

und

$$\delta' = GG' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{Q\, l^3}{48\, m\, t} = 0{\cdot}4472\, \frac{Q\, l^3}{48\, m\, t}.$$

Die Biegung an der Stelle C ist hingegen nach der Gleichung (333)

$$\delta = CC' = \tfrac{7}{768} \cdot \frac{Q\, l^3}{m\, t} = 0{\cdot}4375\, \frac{Q\, l^3}{48\, m\, t},$$

somit etwas kleiner, als die Biegung δ'. Würde der Träger bloss einfach an beiden Enden aufliegen, so wäre nach Gleichung (72) der numerische Werth der Biegung in der Mitte $\frac{Q\, l^3}{48\, m\, t}$. Die grösste Biegung $\delta' = GG'$ in dem obigen Falle ($n = \frac{1}{2}$) beträgt daher nur $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{\cdot}4472$ von derjenigen, welche vorhanden wäre, wenn man den Träger unter sonst gleichen Umständen auf beiden Enden aufgelegt hätte.

Ist endlich, wie in der Fig. 243, $n > (2 - \sqrt{2})$, so liegt der grösste Krümmungspfeil HH' in dem Curvenstücke AC. In diesem Falle geht die Tangente in H horizontal, und es muss für $x = AH'$ die Gleichung (322) verschwinden. Es wird sodann

$$m\, t\, \frac{dy}{dx} = Q\, (n\, l\, x - \tfrac{1}{2} x^2) - D \left(l\, x - \frac{x^2}{2}\right) = o,$$

und nach gehöriger Substitution

$$x = AH' = 2 \left(\frac{Qn - D}{Q - D}\right) l = \frac{2n(2-n)}{2 + n(2-n)}\, l \quad (337).$$

Dieser Werth ist doppelt so gross, wie jener für AF' in der Gleichung (334), wonach der Wendepunct F in die Mitte des Trägerstückes AH zu liegen kommt.

Die grösste Biegung selbst findet man mit

$$HH' = \delta' = \frac{(1-n)\, n^3\, (2-n)^3}{[2 + n(2-n)]^2} \cdot \frac{Q\, l^3}{3\, m\, t} \quad (338).$$

So wäre z. B. für $n = 0{\cdot}8$ zunächst

$$AC' = 0\,8\,l,\quad AH' = 0{\cdot}6487\,l \text{ und } AF' = 0{\cdot}3244\,l,$$

hiernach aber

$$\delta' = HH' = 0{\cdot}0067\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}.$$

Die Biegung $CC = \delta$ nach der Formel (333) wäre nur

$$\delta = CC' = 0{\cdot}0055\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}.$$

4. Nach §. 127 befindet sich das grösste positive Kraftmoment, daher auch der kleinste positive Krümmungshalbmesser ϱ_1 an der festgehaltenen Stelle A, hingegen der grösste numerische Werth der negativen Kraftmomente, daher auch der kleinste numerische Werth der negativen Krümmungshalbmesser ϱ_2 an der Stelle C, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat. Da aus der Biegungstheorie bekannt ist, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden kann, wenn allgemein ϱ den Krümmungshalbmesser an der Stelle (x, y) bedeutet, so hat man zur Bestimmung des Krümmungsradius ϱ_1 in A in der Gleichung (321) die Abscisse $x = o$ zu setzen, und hiernach folgende Relation zu benützen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = (Qn - D)\,\frac{l}{m\,t} = \tfrac{1}{2}n(1-n)(2-n)\,\frac{Q\,l}{m\,t}.$$

Der Krümmungsradius ϱ_2 folgt für $x = nl$ aus der Relation (326), welche die Form annimmt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{n^2}{2}(1-n)(3-n)\,\frac{Q\,l}{m\,t}.$$

Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass derselbe nach aufwärts gerichtet ist. Vergleicht man die numerischen Werthe der beiden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2, so sieht man, dass sie für $n = (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 241) einander gleich werden, während für $n < (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 242) der Radius in A, und endlich für $n > (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 243) der Radius in C der kleinere ist.

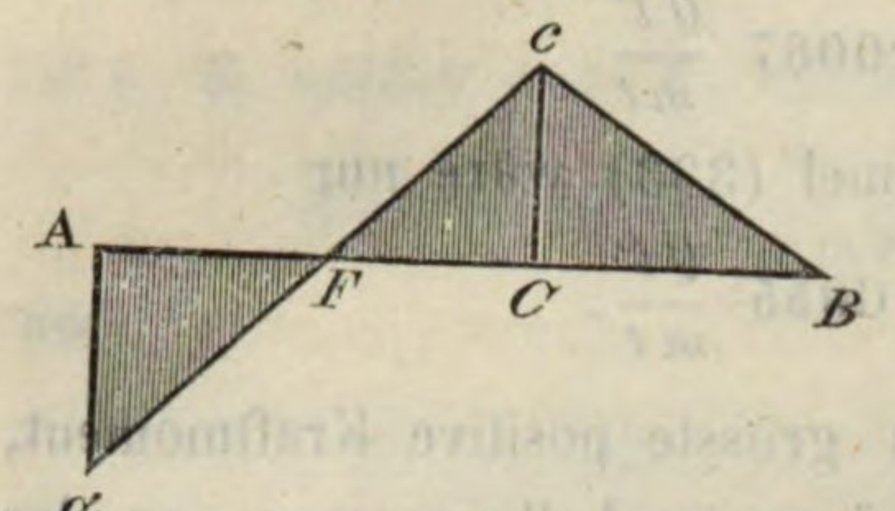
Tragvermögen.

§. 179.

Allgemeine Formel. Wenn man die statischen Kraftmomente nach den Gleichungen (321) und (326) im Sinne des

§. 127 graphisch darstellt, so gelangt man auf die Fig. 244. In der Längenaxe des Trägers AB bezeichnet F den Wendepunct der Curve, und es ist in A das grösste positive Kraftmoment, in C hingegen der grösste numerische Werth der negativen Kraftmomente vorhanden. Hiernach befindet sich der gefährliche Querschnitt entweder an der festgehaltenen Stelle A, oder in dem Puncte C, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat. Diese grössten numerischen Werthe der Kraftmomente folgen, der eine für $x = o$ aus der Gleichung (321), und der andere für $x = nl$ aus der Gleichung (326). Es ist nämlich

Fig. 244.



$$\text{für } x=o, \ldots\ldots mt \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}n\ (1-n)(2-n)\,Q\,l$$

$$\text{und „ } x=nl \ldots\ldots mt \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l.$$

Diese Kraftmomente können übrigens auch unabhängig von den früheren Relationen gefunden werden, wenn man den Druck D kennt. Denn es ist offenbar das Kraftmoment in A

$$Q\,.\,\overline{AC'} - D\,.\,\overline{AB} = (nQ-D)\,l = \tfrac{1}{2}n\ (1-n)(2-n)\,Q\,l,$$

und jenes in C

$$-D\,.\,\overline{BC'} = -D\,(1-n)\,l = -\tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l.$$

Diess vorausgesetzt, vergegenwärtige man sich die Bemerkungen im zweiten Kapitel des ersten Abschnittes dieses Hauptstückes. Nach den dortigen Bezeichnungen hat man zu schreiben

$$R_1 z_1 = \tfrac{1}{2}n\,(1-n)(2-n)\,Q\,l \text{ u. } R_2 z_2 = \tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l$$

und aus der Vergleichung dieser beiden Kraftmomente mit den Tragmomenten M_1 und M_2 des Querschnittes auf die Lage des gefährlichen Querschnittes und auf das Tragvermögen zu schliessen.

Bezeichnet man das Tragvermögen, d. i. die grösste zulässige Belastung mit $Max.\ Q$, so hat man in Gemässheit des §. 125 jedenfalls

$$\text{entw. } M_1 = \tfrac{1}{2}n\ (1-n)\ (2-n)\,l\ .\ Max.\,Q$$
$$\text{oder } M_2 = \tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)\ (3-n)\,l\ .\ Max.\,Q,$$

folglich

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.}\ \dfrac{2\,M_1}{n\ (1-n)\,(2-n)\,l} \\ \text{oder}\ \dfrac{2\,M_2}{n^2(1-n)\ (3-n)\,l} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (339)$$

und von diesen Alternativwerthen offenbar den kleineren zu nehmen *). Sind diese Werthe einander gleich, so befindet sich der gefährliche Querschnitt in A und C zugleich, sonst aber ist derselbe an jener Stelle vorhanden, zu welcher der kleinere von jenen Werthen gehört. So z. B. wäre für $n = \frac{1}{2}$ das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.}\ 5\tfrac{1}{3}\ \dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder}\ 6\tfrac{2}{5}\ \dfrac{M_2}{l}, \end{array} \right.$$

also für $M_1 = M_2 = M$ (Siehe §§. 81 und 125),

$$Max.\ Q = 5\tfrac{1}{3}\ \frac{M}{l},$$

und in diesem Falle der gefährliche Querschnitt in A, ferner das Tragvermögen $5\frac{1}{3}$mal so gross, wie in dem Falle I (§. 58), wo der Träger an einem Ende festgehalten, und am anderen Ende belastet wird.

§. 180.

Besondere Eigenschaften.

1. Wenn der erste von den beiden Werthen in der Formel (339) das Tragvermögen angibt, somit

$$Max.\ Q = \frac{2\,M_1}{n\,(1-n)\,(2-n)\,l}$$

ist, so wird dasselbe unter sonst gleichen Umständen für den Maximalwerth von $n\,(1-n)\,(2-n)$ ein Minimum. Diess geschieht für

$$\frac{d\,[n\,(1-n)\,(2-n)]}{dn} = (2 - 6\,n + 3\,n^2) = 0,$$

---

*) Da auch die Tragmomente M_1 und M_2 alternativ darzustellen sind, so leuchtet ein, dass das obige Tragvermögen $Max.\ Q$ eigentlich durch vier Alternativ-Formeln ausgedrückt erscheint, von denen diejenige Mass und Ziel zu geben hat, welche den kleinsten Werth hat.

also für

$$n = (1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 0{\cdot}4226,$$

weil hiefür

$$\frac{d^2\,[n\,(1-n)\,(2-n)]}{dn} = -\,6\,(1-n) = -\,2\sqrt{3}$$

wesentlich negativ ist. Der Minimalwerth für das Tragvermögen wird in diesem Falle

$$Max.\,Q = \frac{3\sqrt{3}\,M_1}{l} = 5{\cdot}1962\,\frac{M_1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (340).$$

Dieser Werth muss jedoch der Voraussetzung zu Folge kleiner sein, als der zweite Alternativwerth in der Formel (339), welcher für $n = (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})$ übergeht in:

$$\frac{2\,M_2}{n^2\,(1-n)\,(3-n)\,l} = \tfrac{9}{11}\,(3\sqrt{3}+4)\,\frac{M_2}{l} = 7{\cdot}5241\,\frac{M_2}{l}.$$

Hiernach hat man für die Giltigkeit der Gleichung (340) die Bedingung

$$3\sqrt{3}\,M_1 = 5{\cdot}1962\,M_1 < \tfrac{9}{11}\,(3\sqrt{3}+4)\,M_2 = 7{\cdot}2541\,M_2,$$

oder

$$M_1 : M_2 < 7{\cdot}2541 : 5{\cdot}1962 = 1{\cdot}398 : 1,$$

was z. B. für $M_1 = M_2$ der Fall sein wird.

2. Wenn der zweite Alternativwerth als der kleinere das Tragvermögen bezeichnet, so wird unter sonst gleichen Umständen das Tragvermögen ein Minimum, wenn $n^2\,(1-n)\,(3-n)$ das Maximum erreicht. Diess geschieht für

$$\frac{d\,[n^2\,(1-n)\,(3-n)]}{dn} = (3 - 6\,n + 2\,n^2) = 0,$$

d. i. für

$$n = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3}{2}\,(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 0{\cdot}6339,$$

weil sodann

$$\frac{d^2\,[n^2\,(1-n)\,(3-n)]}{dn^2} = -\,2\,(3-2n) = -\,2\sqrt{3}$$

negativ ausfällt. Der betreffende Minimalwerth für das Tragvermögen wird

$$Max.\,Q = \tfrac{8}{9}\,(2\sqrt{3}+3)\,\frac{M_2}{l} = 5{\cdot}7459\,\frac{M_2}{l}\ . \quad (341).$$

Dieser Werth muss aber kleiner sein, als der erste Alternativwerth in der Formel (339), welcher für $n = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ übergeht in:

$$\frac{2M_1}{n(1-n)(2-n)l} = \tfrac{4}{3}(3+\sqrt{3})\,\frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3095\,\frac{M_1}{l},$$

wornach die Bedingung entsteht

$$\tfrac{8}{9}(2\sqrt{3}+3)\,M_2 = 5{\cdot}7459\,M_2 < \tfrac{4}{3}(3+\sqrt{3})\,M_1 = 6{\cdot}3095\,M_1,$$

oder

$$M_2 : M_1 < 6{\cdot}3095 : 5{\cdot}7459 = 1{\cdot}0981 : 1,$$

welche z. B. wieder für $M_1 = M_2$ eintreten wird.

3. Die Vergleichung der Formeln (340) und (341) zeigt, dass für $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) die erste Formel, nämlich

$$Max.\ Q = \frac{3\sqrt{3}}{l}\,M = 5{\cdot}1962\,\frac{M}{l}$$

das kleinste Tragvermögen angibt, welches je nach der Lage des Angriffspunctes C entstehen kann. In diesem Falle muss

$$AC' = (1-\tfrac{1}{3}\sqrt{3})\,l = 0{\cdot}4226\,AB$$

(Fig. 242) sein.

4. Da die nach der Formel (333) in C entstehende Biegung

$$\delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2(4-n)n^3\,\frac{Ql^3}{mt}$$

mit Q zunimmt, so wird dieselbe unter sonst gleichen Umständen am grössten, wenn Q das Tragvermögen erreicht. Nennt man daher die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, so ist

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2(4-n)n^3\,\frac{l^3 . Max\ Q}{mt},$$

also wegen der Relation (339)

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{n\,(1-n)(4-n)}{6\,(2-n)} \cdot \dfrac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \dfrac{n\,(1-n\ \ (4-n)}{6\,(3-n)} \cdot \dfrac{M_2 l^2}{mt} \end{array}\right\} \quad . \quad (342),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat. So wird z. B. für $n = \frac{1}{2}$

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{7}{144}\,\dfrac{l^2 M_1}{mt} \\ \text{oder } \frac{7}{120}\,\dfrac{l^2 M_2}{mt}, \end{array}\right.$$

also etwa für $M_1 = M_2 = M$, wie gewöhnlich bei dem Schmiedeeisen,

$$Max.\ \delta = \tfrac{7}{144}\,\frac{l^2 M}{m t}.$$

Würde der Träger bloss an beiden Enden aufliegen (Fig. 59), so wäre die grösste zulässige Biegung nach der Gleichung (119)

$$\frac{M l^2}{12\, m t} = \tfrac{12}{144}\,\frac{M l^2}{m t},$$

somit grösser, als in dem vorigen Falle.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 181.

Allgemeine Formel. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erschöpfung seines Tragvermögens leisten kann, ist nach §. 107 aus der Formel

$$W = \tfrac{1}{2}\,(Max.\ Q)\ (Max.\ \delta)$$

zu bestimmen.

Setzt man daher statt $Max.\ Q$ und $Max.\ \delta$ die entsprechenden Werthe (339) und (342), so erhält man

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \tfrac{1}{6}\,\dfrac{(4-n)\,n}{(2-n)^2}\cdot\dfrac{M_1^2 l}{m t} \\ \text{oder } \tfrac{1}{6}\,\dfrac{(4-n)}{n\,(3-n)^2}\cdot\dfrac{M_2^2 l}{m t} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (343),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat. Für $n = \frac{1}{2}$ wird z. B.

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \tfrac{7}{54}\,\dfrac{M_1^2 l}{m t} \\ \text{oder } \tfrac{14}{75}\,\dfrac{M_2^2 l}{m t}, \end{array} \right.$$

also etwa für $M_1 = M_2 = M$, wie gewöhnlich bei dem Schmiedeeisen,

$$W = \tfrac{7}{54}\cdot\frac{M^2 l}{m t} = \tfrac{7}{9}\cdot\frac{M^2 l}{6\, m t}.$$

Dieser Werth beträgt nur $\frac{7}{9}$ von jenem, welcher für das mechanische Widerstandsmoment im §. 175 gefunden wurde, wo man den Träger auf beiden Enden aufliegend betrachtet hat.

§. 182.

Besondere Eigenschaft. Wenn der Träger an einem Ende festgehalten und am andern Ende belastet, oder wenn derselbe an beiden Enden aufgelegt und an irgend einer Stelle von der Last in Anspruch genommen wird, so hat man zufolge der Gleichungen (147), (148) und (320) jedesmal in dem Ausdrucke für das mechanische Widerstandsmoment denselben numerischen Coefficienten $(\frac{1}{6})$. Da nun in der Gleichung (343) der fragliche Coefficient

$$\left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \frac{1}{6} \cdot \frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \cdot \frac{(4-n)}{n(3-n)^2},\end{array}\right.$$

also mit n variabel ist, so kann man untersuchen, unter welcher Bedingung derselbe gleich, kleiner oder grösser als $\frac{1}{6}$ wird, um sodann einen Vergleich zwischen den in diesem Kapitel behandelten Falle und jenen anzustellen, die sich auf die citirten Gleichungen (147), (148) und (320) beziehen. Man findet leicht, dass der alternative Coefficient $\frac{1}{6}\,\frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2}$ oder $\frac{1}{6}\,\frac{4-n}{n(3-n)^2}$ den Werth $\frac{1}{6}$ annimmt, wenn $n = (2-\sqrt{2})$ wird, d. h., wenn der Kraftangriffspunct C eine solche Lage hat, auf welche mittelst Fig. 241 aufmerksam gemacht wurde. In diesem Falle ist das mechanische Widerstandsmoment eben so gross, wie in den erwähnten andern Fällen, wenn das in Betracht kommende Tragmoment überall den gleichen Werth hat. Sonst aber, wo n von $(2-\sqrt{2})$ verschieden ist, differirt der betreffende Coefficient von dem Werthe $\frac{1}{6}$, und zwar ist der erste Alternativcoefficient $\frac{1}{6}\,\frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2}$ für $n > (2-\sqrt{2})$ grösser, und für $n < (2-\sqrt{2})$ kleiner als $\frac{1}{6}$, hingegen der zweite Alternativcoefficient $\frac{1}{6}\,\frac{(4-n)}{n(3-n)^2}$, gerade umgekehrt, für $n > (2-\sqrt{2})$ kleiner, und für $n < (2-\sqrt{2})$ grösser als $\frac{1}{6}$.

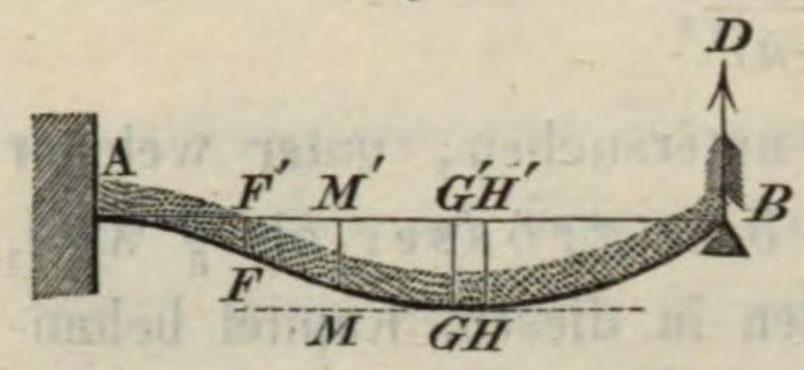
Drittes Kapitel.

Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe der ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist.

§. 183.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 245) den prismatischen Träger AB an einem Ende A festgehalten, und am anderen Ende B unterstützt, endlich mit der nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Belastung Q in Anspruch genommen. Zur Bestimmung der Biegung des Trägers, und seines Tragvermögens in diesem Falle hat man auf ähnliche Weise, wie im vorigen Kapitel zu verfahren.

Fig. 245.



Zu diesem Behufe sei

der Abstand AB . . . . . $= l$,

für irgend einen Punct M der Längenaxe

die Abscisse AM' . . . . . $= x$,

die Ordinate MM' . . . . . $= y$,

ferner der Druck, welchen die Stütze in B zu erleiden hat, $= D$,

und es werden auch hier die Bezeichnungen m und t beibehalten.

So wie in dem vorigen Kapitel, wird auch gegenwärtig der Druck D erst im Laufe der folgenden Untersuchung bestimmt werden können.

Biegung.

§. 184.

Allgemeine Ableitung. Der in der Fig. 245 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn man die Stütze in B weggenommen, und an deren Statt eine Kraft angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt dem Drucke D auf jene Stütze ist. Dieser Bemerkung gemäss hat man nach Gleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q(l-x)^2}{2l} - D(l-x)$$

$$= \frac{Q}{2l}(l^2 - 2lx + x^2) - D(l - x) \quad (344),$$

daher durch Integration

$$mt\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2l}(l^2x - lx^2 + \tfrac{1}{3}x^3) - D(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \quad (345)$$

und

$$mty = \frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{2}l^2x^2 - \tfrac{1}{3}lx^3 + \tfrac{1}{12}x^4) - D(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) \quad (346),$$

wenn man berücksichtigt, dass an dem festgehaltenen Ende die Grössen x, y und $\frac{dy}{dx}$ zugleich verschwinden. Für den Punct B ist $x = l$ und $y = o$, es findet daher der Gleichung (346) gemäss die Bedingung

$$o = \tfrac{1}{8}Ql^3 - \tfrac{1}{3}Dl^3$$

statt, aus welcher sich der unbekannte Druck D ergibt mit

$$D = \tfrac{3}{8}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347).$$

Hiernach gehen die vorigen Gleichungen (344), (345) und (346) in folgende bestimmte über:

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{8}Q(l-x)(l-4x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (348),$$

$$mt\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{48}\frac{Q}{l}x(6l^2 - 15lx + 8x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

und

$$mty = \tfrac{1}{48}\frac{Q}{l}x^2(l-x)(3l-2x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (350).$$

§. 185.

Besondere Eigenschaften.

1. Die grösste Biegung findet in dem Puncte G statt, allwo die Tangente horizontal geht, und für denselben muss daher $\frac{dy}{dx}$, also auch

$$mt \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{48l} \cdot x(6l^2 - 15lx + 8x^2) = 0$$

sein. Hieraus ergibt sich für die Abscisse des Punctes G der Werth

$$x = AG' = \left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)l = 0{\cdot}5785\,l \quad . \quad . \quad . \quad (351),$$

und hiermit die grösste Biegung selbst nach der Gleichung (350)

$$\delta = GG' = \left(\frac{39+55\sqrt{33}}{16^4}\right)\frac{Ql^3}{mt} = 0{\cdot}0054\,\frac{Ql^3}{mt} \quad . \quad (352).$$

2. Die Biegung in der halben Länge findet man für $x = \frac{1}{2}l$ aus der Gleichung (350) und sie ist $\frac{1}{192}\,\frac{Ql^3}{mt} = 0{\cdot}0052\,\frac{Ql^3}{mt}$, somit nur wenig geringer, als die obige Maximalbiegung (δ).

3. Da die Gleichung (348) für $x = \frac{1}{4}l$ verschwindet, und dieser Werth von x zwischen o und l liegt, so besitzt die Curve einen Wendepunct F, für welchen die Abscisse ist:

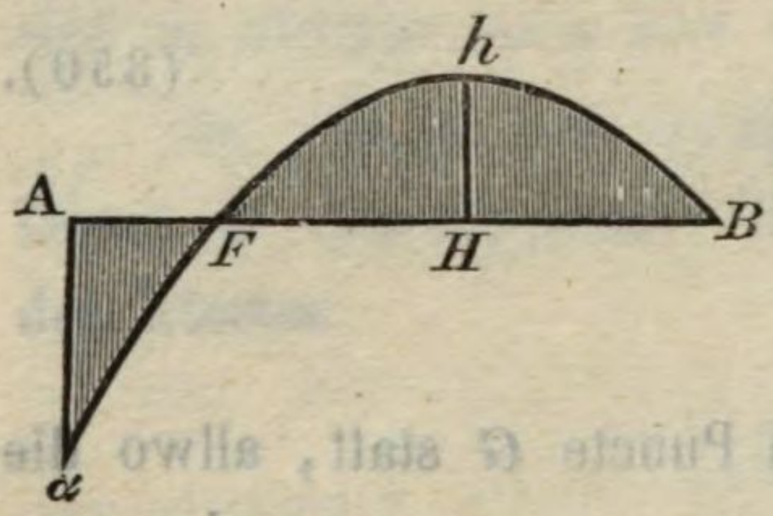
$$x = AF' = \tfrac{1}{4}AB.$$

4. Die Gleichung (348)

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{8}Q(l-x)(l-4x)$$

bezeichnet die statischen Kraftmomente, und bezieht sich auch auf die Krümmungshalbmesser der Biegungscurve, da dieselben dem Werthe $\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ gleich sind. Stellt man jene statischen Kraftmomente im Sinne des §. 128 graphisch dar, so gelangt man zur Fig. 246. Die erhaltene krumme Linie ist eine gemeine Parabel, welche durch den Wendepunct F geht, und deren Axe Hh vertical liegt. Die grössten numerischen Werthe für die Ordinaten dieser Parabel befinden sich dieser Figur gemäss, und in Uebereinstimmung mit dem §. 128 in A und H. A ist die Stelle, wo der Träger festgehalten wird, während die Stelle H in der Mitte zwischen B und F liegt, wornach

Fig. 246.



$$AH = \left(\frac{AF+AB}{2}\right) = \tfrac{5}{8}l$$

ist. Hiernach sind die statischen Kraftmomente, so wie die Krümmungshalbmesser der Biegungscurve zwischen A und F positiv, und zwischen F und B negativ. Das grösste positive Kraftmoment, und

der kleinste positive Krümmungshalbmesser sind für $x = o$ in A, hingegen die grössten numerischen Werthe von den negativen Kraftmomenten und den negativen Krümmungshalbmessern für $x = \frac{5}{8} l$ in H vorhanden. Man erhält nämlich

$$\text{für } x = o \ldots . \; mt \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{8} Q l$$

$$\text{und „ } x = \frac{5}{8} l \ldots \; mt \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{9}{128} Q l.$$

Heisst man daher ϱ_1 den Krümmungshalbmesser in A, und ϱ_2 jenen in H, hingegen die betreffenden grössten numerischen Werthe für die Kraftmomente, wie im §. 124, $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{mt}{\varrho_1} &= \frac{1}{8} Ql \\ -\frac{mt}{\varrho_2} &= \frac{9}{128} Ql \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} R_1 z_1 &= \frac{1}{8} Ql \\ R_2 z_2 &= \frac{9}{128} Ql \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (353).$$

Tragvermögen.

§. 186.

Allgemeine Formel. Mit Rücksicht auf den vorigen §. ist der gefährliche Querschnitt entweder in A oder in H vorhanden. Bezeichnet man im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes bezüglich der Anspruchsnahme in A mit M_1, und bezüglich der Anspruchsnahme in H mit M_2, und nennt man das Tragvermögen $Max.\ Q$, so hat man dem §. 124 zufolge

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = \frac{1}{8} l \,.\, Max.\, Q$$

$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = \frac{9}{128} l \,.\, Max.\, Q,$$

also das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \left\{\begin{aligned} &\text{entw. } 8 \frac{M_1}{l} \\ &\text{oder } \frac{128}{9} \frac{M_2}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (354),$$

je nachdem die erste oder zweite Alternative einen kleineren Werth gibt *).

---

*) Die Anmerkung zum §. 179 findet auch in diesem Falle Anwendung.

§. 187.

Besondere Eigenschaften.

1. Ist $M_1 = M_2 = M$ (siehe §. 125 ad 1 und 2), so gibt die erste Alternative in der Formel (354) den kleineren Werth, und es ist das Tragvermögen

$$Max.\ Q = 8\frac{M}{l}$$

also eben so gross, wie in dem Falle IV (§§. 58 und 87), wo der gleichförmig belastete Träger bloss auf beiden Enden aufliegen würde.

Für gusseiserne Träger kann es geschehen, dass $\frac{8M_1}{l} > \frac{128}{9}\frac{M_2}{l}$ wird. In diesem Falle ist das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \frac{128}{9}\frac{M_2}{l} = 14\frac{2}{9}\frac{M_2}{l}.$$

2. Die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen erreicht werden kann, ist mit Rücksicht auf die Formeln (352) und (354) offenbar

$$Max.\ \delta = \left(\frac{39+55\sqrt{33}}{16^4}\right)\frac{l^3\,.\,Max.\ Q}{mt},$$

also auch alternativ

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw.}\ \left(\frac{39+55\sqrt{33}}{2\,.\,16^3}\right)\frac{M_1 l^2}{mt} = 0{\cdot}0433\ \frac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder}\ \left(\frac{33+55\sqrt{33}}{18\,.\,16^2}\right)\frac{M_2 l^2}{mt} = 0{\cdot}0770\ \frac{M_2 l^2}{mt} \end{array}\right\} (355),$$

wo wieder der kleinere Werth zu gelten hat. Für $M_1 = M_2 = M$ wird z. B. der erste von jenen Werthen kleiner sein.

Viertes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen *A* und *B* ruhenden Trägers *DE*, welcher zwischen den Stützen mit der Last *Q*, und an beiden Enden *D* und *E* mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in *A* und *B* horizontal werden (Fig. 247).

§. 188.

Annahmen. Diesen Fall kann man sich auch dadurch versinnlichen, dass man die Stützen in *A* und *B* weggenommen, und an deren Statt Kräfte angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Bezeichnet man diese Drücke mit D_1 und D_2, so gelangt man dadurch auf die Betrachtung des freien Hebelssystemes (Fig. 248), an welchem die verticalen Kräfte D_1, D_2, P_1, P_2 u. Q wirken.

Fig. 247.

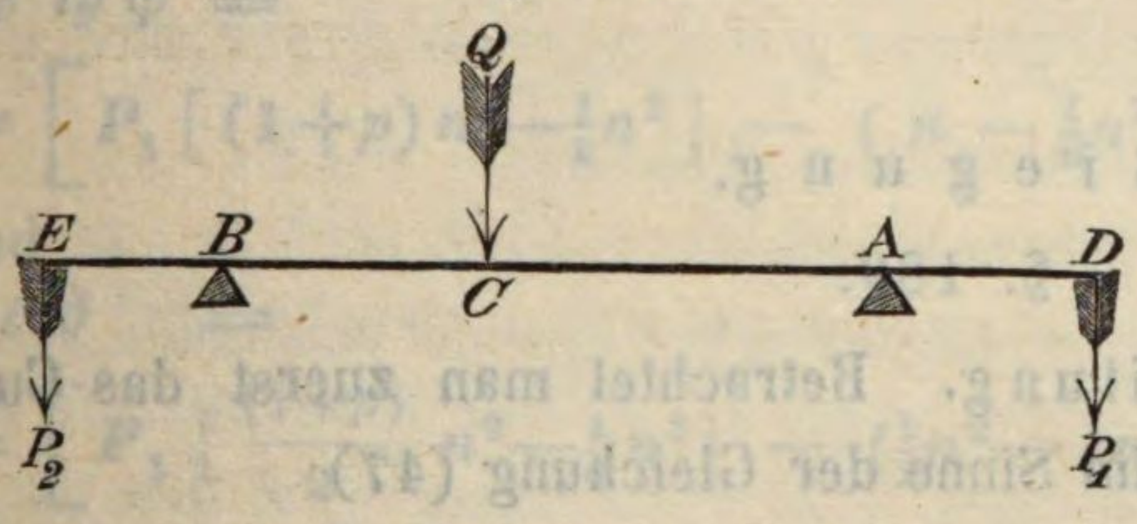
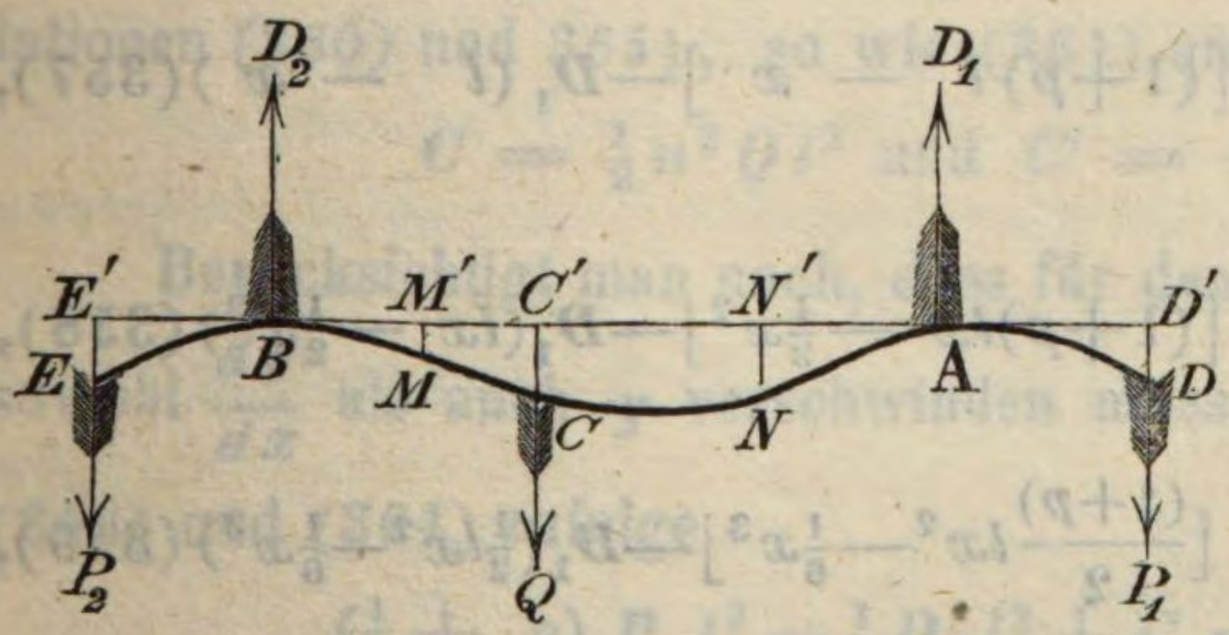


Fig. 248.



Zur Untersuchung des Biegungs-Widerstandes nenne man

die Länge AB . . . . . $= l$,
„ „ BC' . . . . . $= nl$,
„ „ AD' . . . . . $= pl$,
„ „ BE' . . . . . $= ql$,
die Biegung in dem Puncte C, d. i. . . . . CC' $= \delta$,
setze für einen Punct M des Curvenstückes BC
die Abscisse BM' . . . . . $= x$,
„ Ordinate MM' . . . . . $= y$,

ferner den Winkel, welchen die Tangente in C mit dem Horizonte bildet . . . . . $= \varphi$,
und behalte wieder die Bezeichnungen m und t im Sinne des §. 53 bei.

Es leuchtet ein, dass in diesem Falle, wo die Tangenten in A und B horizontal sein sollen, die Kräfte P_1 und P_2 nicht mehr beliebig sein können, sondern gewisse Werthe haben müssen, welche aber vorläufig noch unbekannt sind und erst im Laufe der folgenden Untersuchung sich ergeben werden. Eben so sind auch die Drücke D_1 und D_2 unbekannt, daher noch zu bestimmen. Jedenfalls muss aber zufolge des Gleichgewichtes bei dem freien Hebelssysteme (Fig. 248) die Bedingung

$$D_1 + D_2 = P_1 + P_2 + Q \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$

existiren, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird.

Biegung.

§. 189.

Allgemeine Ableitung. Betrachtet man zuerst das Curvenstück BC, so hat man im Sinne der Gleichung (47)

$$mt \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= Q(nl - x) + P_1[(1+p)l - x] - D_1(l - x) \quad (357),$$

$$mt \frac{dy}{dx} =$$

$$= Q(nlx - \tfrac{1}{2}x^2) + P_1[(1+p)lx - \tfrac{1}{2}x^2] - D_1(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \quad (358),$$

$$mt\ y =$$

$$= Q(\tfrac{1}{2}nlx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + P_1\left[\frac{(1+p)}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right] - D_1(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) \quad (359),$$

wo mit $x \quad o$, auch die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden müssen.

Nach der Voraussetzung muss ferner für $x = BC' = nl$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = CC' = \delta$ werden, wesshalb man hat

$$mt\ tg\,\varphi = \left[\tfrac{1}{2}n^2Q + [(1+p)n - \tfrac{1}{2}n^2]P_1 - (n - \tfrac{1}{2}n^2)D_1\right]l^2 \quad (360),$$

und

$$mt\ \delta = \left[\tfrac{1}{3}n^3Q + \left|\frac{(1+p)}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3\right|P_1 - (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3)D_1\right]l^3 \quad (361).$$

Auf das zweite Curvenstück AC übergehend, betrachte man einen Punct N desselben, und setze dessen Abscisse $BN' = x$, dessen Ordinate aber $NN' = y$. Hiernach erhält man ähnlich, wie zuvor

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = P_1\,[\,(1+p)\,l \;-\; x\,] - D_1\,(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (362),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = P_1\,[\,(1+p)\,lx \;-\tfrac{1}{2}x^2\,] - D_1\,(lx-\tfrac{1}{2}x^2) + C \quad . \quad (363)$$

und

$$mt\;y \;= P_1\left[\frac{(1+p)}{2}\,lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right] - D_1\,(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Cx + C' \;(364),$$

wobei die Constanten C und C' noch aufzusuchen sind.

Auch ist, da für den Punct C $x = nl$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = \delta$ gleichzeitige Werthe sind,

$$mt\;tg\,\varphi \;=$$

$$= \left[P_1\,[\,(1+p)\,n - \tfrac{1}{2}n^2\,] \;-\; (\,n - \tfrac{1}{2}n^2)\,D_1\right] l^{\,2} + C \quad . \quad . \quad (365)$$

und

$$mt\;\delta \;=$$

$$= \left[P_1\,[\,\frac{(1+p)}{2}\;n^2 - \tfrac{1}{6}n^3] \;-\; (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3)\,D_1\right] l^3 + Cnl + C' \;(366).$$

Die Constanten C und C' ergeben sich jetzt, wenn man die Relationen (360) und 365), so wie (361) und (366) vergleicht, mit

$$C = \tfrac{1}{2}n^2\,Q\,l^2 \text{ und } C' = -\tfrac{1}{6}n^3\,Q\,l^3.$$

Berücksichtigt man noch, dass für den Punct A, also für $x = l$, sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch y verschwinden muss, so ist den Gleichungen (363) und (364) zufolge

$$(\tfrac{1}{2} + p)\,P_1\,l^2 - \tfrac{1}{2}D_1\,l^2 + C = o,$$

und

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}p)\,P_1\,l^3 - \tfrac{1}{3}D_1\,l^3 + Cl + C' = o,$$

also mit Benützung der für C und C' gefundenen Werthe

$$P_1 = \frac{n^2\,(1-n)}{p}\,Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367),$$

und

$$D_1 = \left[\frac{n\;(\;-n)}{p} + n^2(3-2n)\right] Q \quad . \quad . \quad (368),$$

Man hätte offenbar in der Untersuchung die Abscissen, anstatt von B gegen A, gerade umgekehrt, von A gegen B wählen können, und würde sodann, statt den Relationen (367) und (368), zwei andere erhalten haben, welche von jenen nur dadurch unterschieden wären, dass statt P_1, D_1, n und p respective die Werthe P_2, D_2, $(1-n)$ und q vorkämen.

Dieser Bemerkung gemäss müssen folgende Relationen existiren:

$$P_2 = \frac{n(1-n)^2}{q} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (369)$$

$$\text{und } D_2 = \left[\frac{n(1-n)^2}{q} + (1-n)^2(1+2n)\right] Q \quad (370).$$

Als Controle für die Ricktigkeit dieser Resultate kann die Gleichung (356) dienen, denn man hat in der That

$$D_1 = P_1 + n^2(3-2n)Q$$

$$D_2 = P_2 + (1-n)^2(1+2n)Q$$

$$\text{und } D_1 + D_2 = P_1 + P_2 + Q,$$

somit übereinstimmend mit der citirten Gleichung.

Mit Hilfe der nunmehr bekannten Werthe von C, C', D_1, D_2, P_1 und P_2, gehen die Bedingungsgleichungen in folgende bestimmte über:

Die Gleichung

(357) in $mt\frac{d^2y}{dx^2} = (1-n)^2 Q \quad [nl - (1+2n)x]$. (371),

(358) in $mt\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-n)^2 Q x \quad [2nl-(1+2n)x]$. (372),

(359) in $mt\, y = \frac{1}{6}(1-n)^2 Q x^2 \quad [3nl-(1+2n)x]$. (373),

(362) in $mt\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 Q \quad [-(2-n)l+(3-2n)x]$. (374),

(363) in $mt\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}n^2 Q\,(l-x) \quad [-l+(3-2n)x]$. (375),

(364) in $mt\, y = \frac{1}{6}n^2 Q\,(l-x)^2 \quad [-nl+(3-2n)x]$. (376),

und es folgt aus

(360) $tang\,\varphi = \frac{1}{2}n^2(1-n^2)(1-2n)\frac{Ql^2}{mt}$ . . . . . (377),

endlich die Biegung aus

(361) $\delta = \frac{1}{3}n^3(1-n)^3\frac{Ql^3}{mt}$ . . . . . (378).

§. 190.

Besondere Eigenschaften.

1. Sämmtliche bestimmte Relationen mit Ausnahme jener für P_1 (367), D_1 (368), P_2 (369) und D_2 (370) sind von p und q unabhängig. Es bleibt daher das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B gegen Biegung unabhängig von den Umständen, welche sich auf die Trägerstücke AD und BE beziehen, wenn nur der Bedingung gemäss die Tangenten an die Biegungscurve in A und B horizontal sind.

2. Um die genannte Bedingung zu erreichen, müssen die an den Enden des Trägers D und E anzubringenden Kräfte P_1 und P_2 die unter (367) und (369) gegebenen Werthe haben. Diese Kräfte variiren zwar mit den Trägerstücken $\overline{AD'} = pl$ und $\overline{BE'} = ql$, die Producte aus denselben und den Längen der dazu gehörigen Trägerstücke aber sind von den Grössen p und q unabhängig. Es ist nämlich

$$P_1 \,.\, \overline{AD'} = P_1 \,.\, pl = n^2 (1-n) Ql \text{ und}$$
$$P_2 \,.\, \overline{BE'} = P_2 \,.\, ql = n\,(1-n)^2 Ql.$$

Diese Producte sind offenbar die statischen Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B, woraus folgt, dass die beiden Hebelsarme $\overline{AD'}$ und BE' verschieden lang sein können, ohne dass das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B gestört wird, insoferne die Kräfte P_1 und P_2 solche Werthe haben, dass die hiernach entstehenden Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B unverändert bleiben. Je kleiner also die Stücke AD und BE sind, desto grösser müssen die Kräfte P_1 und P_2 sein, und ebenso umgekehrt. Befindet sich die Last Q in der Mitte zwischen beiden Stützen, so wird

$$n = \tfrac{1}{2},\quad P_1 = \tfrac{1}{8}\frac{Q}{p} \quad \text{und} \quad P_2 = \tfrac{1}{8}\frac{Q}{q},$$

also, wenn die Stücke AD und BE gleich gross sind, sofort

$$p = q \text{ und } P_1 = P_2.$$

Auch kann zur Wissenschaft dienen, dass unter sonst gleichen Umständen die Kraft P_1 für $n = \frac{2}{3}$, die Kraft P_2 aber für $n = \frac{1}{3}$ am grössten wird, so dass also in diesen beiden Fällen die Bedingung der horizontalen Richtung für die Tangenten in A und B am schwierigsten zu erfüllen ist. Es ist merkwürdig, dass diese beiden Fälle ($n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$) sich ungünstiger darstellen,

als wenn $n = \frac{1}{2}$, d. h. die Last Q in der Mitte zwischen den Stützen angebracht ist.

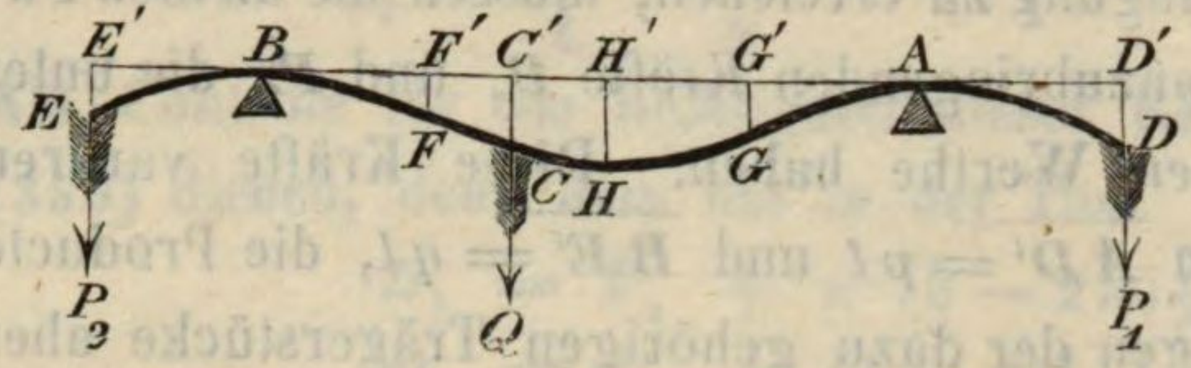
In der That hat man

$$\text{für } n = \tfrac{2}{3} \ldots P_1 = \tfrac{4}{27}\frac{Q}{p} \text{ und } P_2 = \tfrac{2}{27}\frac{Q}{q}$$

$$\text{für } n = \tfrac{1}{3} \text{ aber } P_1 = \tfrac{2}{27}\frac{Q}{p} \text{ und } P_2 = \tfrac{4}{27}\frac{Q}{q},$$

also im ersten Falle für P_1 und im zweiten Falle für P_2 einen grösseren Werth, als in dem Falle $n = \frac{1}{2}$.

Fig. 249.



3. Die Biegungscurve hat zwei Wendepuncte F und G (Fig. 249), deren Abscissen gefunden werden, wenn man die Werthe (371) und (374) gleich Null setzt. Hierdurch erhält man aus der ersten

$$x = AF' = \left(\frac{n}{1+2n}\right) l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (379),$$

und aus der zweiten

$$x = AG' = \left(\frac{2-n}{3-2n}\right) l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (380).$$

Ist z. B. die Last Q in der Mitte, also $n = \frac{1}{2}$, so hat man

$$AF' = \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{4} AB, \text{ und } AG' = \tfrac{3}{4} l = \tfrac{3}{4} AB,$$

so dass die beiden Wendepuncte F und G, von der Mitte aus, symmetrisch gelegen sind.

4. Da nach Gleichung (377) $tang\,\varphi$ positiv oder negativ wird, je nachdem n kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ ist, so folgt, dass die Tangente in C (Fig. 249) mit der horizontalen Richtung AB auf jener Seite convergirt, wo das kleinere von den beiden Curvenstücken BC und AC liegt. Befindet sich die Last Q in der Mitte zwischen A und B so ist $tang\,\varphi = o$, d. h. die Tangente horizontal.

5. Die Biegung in dem Puncte C ist aus der Relation (378)

$$CC' = \delta = \tfrac{1}{3} n^3 (1-n)^3 \frac{Q l^3}{m t}$$

zu berechnen. Dieselbe wird unter übrigens gleichen Umständen mit $n(1-n)$ ein Maximum, was offenbar für $n = \frac{1}{2}$ eintritt. In diesem Falle wirkt die Last Q in der Mitte zwischen den Stützen, und die Biegung ist

$$\delta = \tfrac{1}{192} \frac{Q l^3}{mt},$$

somit viermal kleiner, als in dem Falle III (siehe die §§. 58 und 63), wenn die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, nämlich der belastete Träger bloss auf den beiden Stützen A und B aufruhet.

6. Die grösste Biegung $HH' = \delta'$ (Fig. 249) ist an jener Stelle H, wo die Tangente horizontal liegt. Zufolge der Bemerkung ad 4 ist diese Stelle stets in dem grösseren der beiden Curvenstücke AC und BC vorhanden. Ist nämlich $n < \frac{1}{2}$, so ergibt sich der Werth für die Abscisse des Punctes H aus der Gleichung (375), wenn man dieselbe verschwinden lässt. Hiernach findet man

$$x = AH' = \frac{l}{(3-2n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (381),$$

und hiermit die grösste Biegung selbst aus der Gleichung (376)

$$\delta' = \overline{HH'} = \tfrac{2}{3} \frac{n^2(1-n)^3}{(3-2n)^2} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad (382).$$

Ist aber $n > \frac{1}{2}$, so hat man die Gleichungen (372) und (373) anstatt der vorigen (375) und (376) zu benützen. In diesem Falle ist

$$x = \overline{AH'} = \left(\frac{2n}{1+2n}\right) l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (383),$$

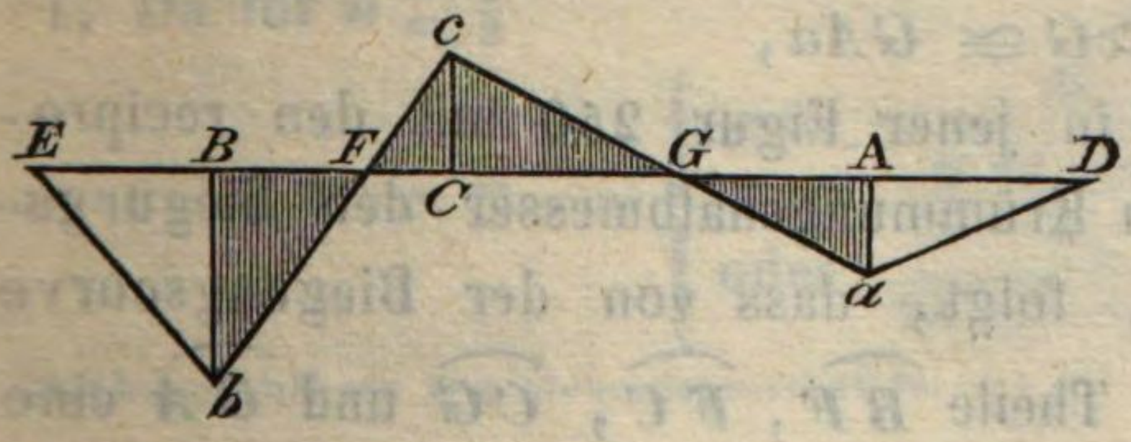
und $$\delta' = \overline{HH'} = \tfrac{2}{3} \frac{(1-n)^2 n^3}{(1+2n)^2} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (384).$$

Es ist übrigens klar, dass die Werthe (383) und (384) auch aus den vorigen (381) und (382) folgen müssen, wenn man n mit $(1-n)$ und x mit $(l-x)$ verwechselt.

Befindet sich die Last in der Mitte, oder ist $n = \frac{1}{2}$, so werden die Relationen (381) und (383), so wie jene sub (382) und (384) einander gleich, und die grösste Biegung tritt in der Mitte ein. Diese Biegung ist $\frac{1}{192} \frac{Q\,l^3}{m\,t}$, also übereinstimmend mit dem Resultate ad 5.

7. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die Gleichungen (371) und (374) repräsentirt sind, im Sinne des §. 127 graphisch dar, so gelangt man zu der (Figur 250). Aus derselben ist ersichtlich, dass die grössten positiven Kraftmomente durch die Ordinaten Aa und Bb ausgedrückt sind, und daher an den beiden Stellen A und B sich befinden,

Fig. 250.



während der grösste numerische Werth für die negativen Kraftmomente durch die Ordinate Cc ausgedrückt ist, somit an der Stelle C sich befindet, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat.

Die Werthe für diese besonderen Kraftmomente resultiren und zwar bezüglich der Stelle B für $x = o$ aus der Gleichung (371) mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = n (1 - n)^2 Q l,$$

bezüglich der Stelle A für $x = l$ aus der Gleichung (374) mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = n^2 (1 - n) Q l$$

und bezüglich der Stelle C für $x = n l$ aus den beiden Gleichungen (371) und (374) übereinstimmend mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = - 2 n^2 (1 - n)^2 Q l.$$

Nennt man, wie im §. 124, den grössten numerischen Werth von den positiven Kraftmomenten $R_1 z_1$, von den negativen Kraftmomenten aber $R_2 z_2$, so hat man offenbar

$$\left.\begin{aligned} R_1 z_1 &= \begin{cases} \text{entw. } n (1 - n)^2 Q l \\ \text{oder } n^2 (1 - n) Q l \end{cases} \\ \text{und } R_2 z_2 &= 2 n^2 (1 - n)^2 Q l \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (385).$$

Von den beiden Alternativwerthen für $R_1 z_1$ gilt stets der grössere, so zwar, dass man hat

$$\text{für } n < \tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad R_1 z_1 = n (1 - n)^2 Q l$$
$$\text{und für } n > \tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad R_1 z_1 = n^2 (1 - n) Q l.$$

Befindet sich die Last in der Mitte zwischen A und B, so werden die beiden Alternativwerthe von $R_1 z_1$ einander gleich und eben so gross, wie $R_2 z_2$. Es wird sodann wegen $n = \frac{1}{2}$

$$R_1 z_1 = R_2 z_2 = \tfrac{1}{8} Q l,$$

und man hat mit Rücksicht auf die Figur 250 die Relationen:

$$\overline{BC} = \overline{CA} = \tfrac{1}{2} \overline{AB}$$
$$\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{CG} = \overline{GA} = \tfrac{1}{4} \overline{AB}$$
$$\overline{Bb} = \overline{Cc} = \overline{Aa} = \tfrac{1}{8} Q l \text{ und}$$
$$\triangle BbF \cong FCc \cong CcG \cong GAa,$$

woraus, weil die Ordinaten in jener Figur 250 mit den reciproken Werthen der betreffenden Krümmungshalbmesser der Biegungscurve im Verhältnisse stehen, folgt, dass von der Biegungscurve zwischen A und B die vier Theile $\overset{\frown}{BF}$, $\overset{\frown}{FC}$, $\overset{\frown}{CG}$ und $\overset{\frown}{GA}$ eine congruente Gestalt haben.

Tragvermögen.

§. 191.

Allgemeine Formel. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt an einer der 3 Stellen A, B und C, oder auch an zweien, oder endlich an allen drei Stellen zugleich. Bezeichnet man im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes bezüglich der Anspruchsnahme in A oder B mit M_1 und bezüglich der Anspruchsnahme in C mit M_2, und nennt man das Tragvermögen $Max.\ Q$, so hat man dem citirten §. zufolge für $n \lessgtr \frac{1}{2}$

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = n\,(1-n)^2\,l\ .\ Max.\,Q$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = 2n^2\,(1-n)^2\,l\ .\ Max.\,Q,$$

und für $n \gtrless \frac{1}{2}$

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = n^2\,(1-n)\,l\ .\ Max.\,Q$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = 2\,n^2\,(1-n)^2\,l\ .\ Max.\,Q,$$

also das Tragvermögen für $n \lessgtr \frac{1}{2}$

$$Max.\,Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n\,(1-n)^2\,l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2\,(1-n)^2\,l} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (386),$$

und für $n \gtrless \frac{1}{2}$

$$Max.\,Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n^2\,(1-n)\,l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2\,(1-n)^2\,l} \end{array} \right\}$$

wobei von den in Betracht kommenden Alternativ-Werthen der kleinere zu nehmen ist.

§. 192.

Besondere Figenschaften.

1. Da für $n \lessgtr \frac{1}{2}$

$$Max.\,Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n\,(1-n)^2\,l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2\,(1-n)^2\,l} \end{array} \right.$$

gefunden wurde, so wird es zuweilen geschehen, dass der erste Werth der kleinere ist, und daher

$$Max.\ Q = \frac{M_1}{n(1-n)^2 l}$$

wird. Lässt man nun n variiren, die übrigen Grössen aber unverändert, so kann man fragen, für welchen Werth von n das Tragvermögen am kleinsten wird. Zur Beantwortung dieser Frage hat man $n(1-n)^2$ auf ein Maximum zu bringen. Diess geschieht dadurch, dass man

$$\frac{d[n(1-n)^2]}{dn} = (1-n)\ (1-3n) = o$$

setzt. Hieraus folgt aber (weil der Werth von $n = 1$ wegen der Bedingung $n \lessgtr \frac{1}{2}$ nicht zulässig ist) $n = \frac{1}{3}$, indem in diesem Falle

$$\frac{d^2[n(1-n)^2]}{dn^2} = -2,$$

somit negativ wird.

Unter diesen Umständen ist das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \frac{27}{4}\ \frac{M_1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (387).$$

Dabei muss man sich jedoch überzeugen, ob in der That der Werth für die 2. Alternative von $Max.\ Q$, welcher für $n = \frac{1}{3}$ in

$$\frac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} = \frac{81}{8}\ \frac{M_2}{l}$$

übergeht, nicht kleiner ist, als der nach (387) resultirende. Es muss nämlich

$$\frac{27}{4}\ \frac{M_1}{l} \lessgtr \frac{81}{8}\ \frac{M_2}{l}, \text{ d. i. } 2M_1 \lessgtr 3M_2$$

sein, welche Bedingung z. B. für $M_1 = M_2$ eintritt.

2. Für $n \gtrless \frac{1}{2}$ hat man das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n^2(1-n)\ l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l}. \end{cases}$$

Ist der erste Werth $\frac{M_1}{n^2(1-n)\,l}$ der kleinere, so wird unter übrigens gleichen Umständen das Tragvermögen am kleinsten, wenn $n^2(1-n)$ ein Maximum wird. Diess geschieht aber für $n = \frac{2}{3}$, und das Tragvermögen resultirt in diesem Falle mit

$$Max.\,Q = \tfrac{27}{4}\,\frac{M_1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (388),$$

somit eben so gross, wie das mit der Gleichung (387) gegebene. Nur muss der Voraussetzung gemäss sein

$$\frac{M_1}{n^2(1-n)\,l} = \tfrac{27}{4}\,\frac{M_1}{l} \leqq \frac{M_2}{2\,n^2\,(1-n)^2\,l} = \tfrac{81}{8}\,\frac{M_2}{l},$$

also, wie zuvor

$$2\,M_1 \leqq 3\,M_2.$$

3. Ist die Last Q in der Mitte zwischen A und B, so ist $n = \frac{1}{2}$, und es wird das Tragvermögen

$$Max.\,Q = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \dfrac{8\,M_1}{l} \\ \text{oder } \dfrac{8\,M_2}{l}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (389).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) ist insbesondere

$$Max.\,Q = \frac{8\,M}{l},$$

also das Tragvermögen doppelt so gross, wie in dem Falle III, wo der Träger bloss auf beiden Stützen A und B aufruhet, ohne zugleich von den Kräften P_1 und P_2 beansprucht zu werden. (Siehe die §§. 58 und 86.)

Uebrigens ist, wie man bemerkt $\frac{8\,M_2}{l}$ zugleich das Minimum von $\frac{M_2}{2\,n^2(1-n)^2\,l}$ in Bezug auf n.

4. Ist $M_1 = M_2 = M$, so ist unter übrigens gleichen Umständen für $n = \frac{1}{3}$ oder $n = \frac{2}{3}$ das geringste Tragvermögen vorhanden.

Es ist merkwürdig, dass diese beiden Fälle ($n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$) sich ungünstiger darstellen, als wenn $n = \frac{1}{2}$, oder die Last Q in der Mitte zwischen A und B angebracht wäre. Diese Bemerkung stimmt mit jener im §. 190 ad 2 überein.

5. Die grösste zulässige Biegung in C wird aus der Gleichung (378) bestimmt, wenn man statt Q das Tragvermögen $Max.\,Q$ substituirt. Man erhält nämlich

$$Max.\,\delta = \tfrac{1}{3}\,n^3\,(1-n)^3\,l^3 \cdot \frac{Max.\,Q}{mt},$$

folglich mit Benützung der Relationen (386)

für $n \lessgtr \frac{1}{2}$

$$Max.\,\delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{3} n^2 (1-n) \frac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} n (1-n) \frac{M_2 l^2}{mt} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (390),$$

und für $n \gtrless \frac{1}{2}$

$$Max.\,\delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{3} n (1-n)^2 \frac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} n (1-n) \frac{M_2 l^2}{mt} \end{array} \right\}$$

wo man von den in Betracht kommenden Alternativ-Werthen den kleineren zu wählen hat.

Für $n = \frac{1}{2}$ hat man insbesondere die grösste zulässige Biegung

$$Max.\,\delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{24} \frac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{M_2 l^2}{mt} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (391)$$

also halb so gross, wie in dem Falle III (§. 92, Gleichung 119), wenn die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, und der Träger bloss auf den beiden Stützen A und B aufruht.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 193.

Berechnung desselben. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erreichung der Elasticitätsgränzen leisten kann, ist nach Anleitung des §. 107 aus der Formel

$$W = \tfrac{1}{2} (Max.\,Q)\ (Max.\,\delta)$$

zu berechnen. Setzt man daher für $Max.\,Q$ und $Max.\,\delta$ die entsprechenden Werthe aus den Relationen (386) und (390), so erhält man für $n \lessgtr \frac{1}{2}$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6} \left(\frac{n}{1-n} \right) \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{24 n} \left(\frac{1}{1-n} \right) \frac{M_2^2 l}{mt} \end{array} \right\}$$

und für $n \gtrless \frac{1}{2}$.

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6} \left(\frac{1-n}{n} \right) \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{24 n} \left(\frac{1}{1-n} \right) \frac{M_2^2 l}{mt} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (392),$$

wobei wieder von den Alternativ-Werthen der kleinere zu gelten hat. Das mechanische Widerstandsmoment ist somit von n, oder von der Lage des Angriffspunctes der Last Q abhängig.

Für den besonderen Fall $n = \frac{1}{2}$ befindet sich die Last in der Mitte zwischen A und B, und es wird das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{M_2^2 l}{mt} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (393),$$

also eben so gross, wie in den Fällen, wo der Trägertheil AB auf die Arten in Anspruch genommen wird, worauf mittelst der Figuren 53, 59, 238 und 241 aufmerksam gemacht wurde. Die Vergleichung der Formeln (147), (148), (320) und (393) unter einander und mit jener im §. 182 zeigt die Wahrheit dieser Behauptung. Bei der Vergleichung der betreffenden Fälle ist jedoch darauf Acht zu geben, dass die Querschnittslage stets entprechend, nämlich so gewählt wird, dass das in Betracht kommende Tragmoment des gefährlichen Querschnittes überall dasselbe bleibt.

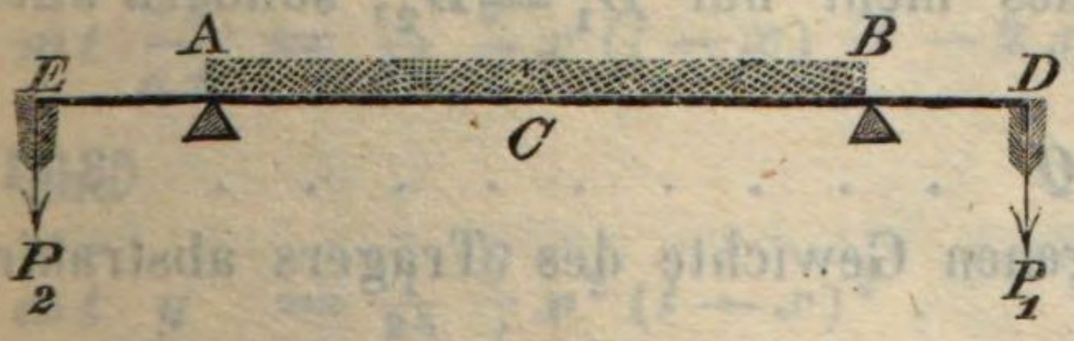
Fünftes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen A und B ruhenden Trägers DE, welcher zwischen den Stützen mit der gleichförmig vertheilten Belastung Q und an beiden Enden D und E mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in A und B horizontal werden (Fig. 251).

§. 194.

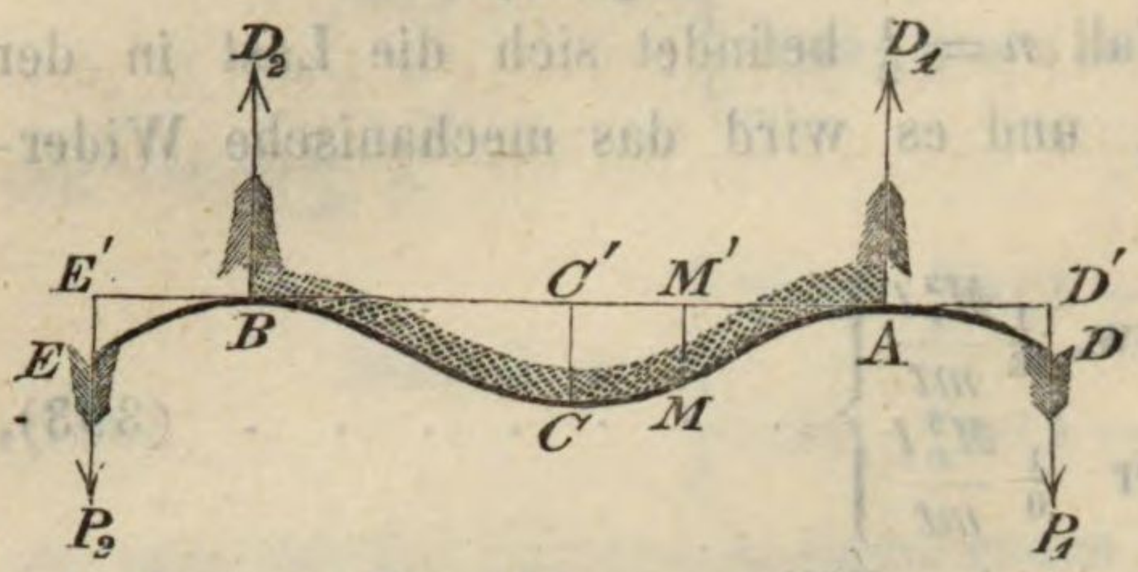
Annahmen. Diesen Fall kann man sich dadurch versinnlichen, dass man die Stützen in A und B weggenommen, und an deren Statt Kräfte angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken

Fig. 251.



auf jene Stützen sind. Bezeichnet man diese Drücke mit D_1 und D_2, so gelangt man auf die Betrachtung des freien Hebelsystems (Fig. 252),

Fig. 252.



wo die verticalen Kräfte D_1, D_2, P_1, P_2 und Q wirken. Es ist vorauszusehen, dass, um die Tangenten in A und B horizontal zu erhalten, die statischen Kraftmomente $P_1 . \overline{AD'}$ und $P_2 . \overline{BE'}$ eine entsprechende Grösse haben müssen, und dass es, um das Verhalten des Trägers innerhalb seiner Stützen zu erfahren, erlaubt sein wird, die beiden Theile AD und BE gleich lang anzunehmen. In Anbetracht der Symmetrie der Anordnung, welche sodann bei dem Hebelsysteme eintritt, folgt, dass auch $P_1 = P_2$, und die Biegungscurve, von der Mitte C aus gegen die beiden Seiten hin symmetrisch gebildet sein muss.

Behufs der weiteren Untersuchung sei

die Länge $\overline{AB} = 2\,\overline{BC'} = 2\,\overline{AC'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = l,$

„ „ $\overline{AD'} = \overline{BE'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = pl,$

die Biegung in der Mitte $\overline{CC'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \delta;$

ferner für irgend einen Punct M der Biegungscurve

die Abscisse $\overline{AM'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = x,$

die Ordinate $\overline{MM'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = y.$

Auch behalte man die Bezeichnungen m und t im Sinne des §. 53 bei.

Es leuchtet ein, dass in dem angenommenen Falle, wo die Tangenten in A und B horizontal sein sollen, die Kräfte P_1 und P_2 nicht beliebig sein können, sondern gewisse Werthe haben müssen. Diese sind jedoch vorläufig noch unbekannt und werden sich erst im Laufe der Untersuchung ergeben. Auch die Drücke D_1 und D_2 sind vor der Hand unbekannt, daher noch zu bestimmen. Uebrigens ist klar, dass wegen der Symmetrie und dem Gleichgewichte des in Betracht stehenden Hebelsystemes nicht nur $D_1 = D_2$, sondern auch die Bedingung

$$2D_1 = 2P_1 + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394)$$

stattfindet, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird.

Biegung.

§. 195.

Allgemeine Ableitung. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen und Bemerkungen des vorigen §. hat man zunächst in Gemässheit der Gleichung (47)

$$m\,t\,\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{l}\,x^2 - D_1\,x + P_1\,(p\,l + x),$$

somit, da nach der Relation (394) $(D_1 - P_1) = \frac{Q}{2}$ ist,

$$m\,t\,\frac{d^2y}{dx^2} = P_1\,p\,l - \tfrac{1}{2}\,Q\,x + \frac{Q}{2\,l}\,x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (395),$$

und durch Integration

$$m\,t\,\frac{dy}{dx} = P_1\,p\,l\,x - \tfrac{1}{4}\,Q\,x^2 + \tfrac{1}{6}\,\frac{Q}{l}\,x^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (396),$$

endlich

$$m\,t\;y = \tfrac{1}{2}\,P_1\,p\,l\,x^2 - \tfrac{1}{12}\,Q\,x^3 + \tfrac{1}{24}\,\frac{Q}{l}\,x^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (397),$$

wenn man beachtet, dass für den Punct A die Grössen x, $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden müssen. Indem nun der Voraussetzung gemäss auch für den Punct B die Tangente horizontal sein und seine Ordinate verschwinden muss, daher $x = l$, $\frac{dy}{dx} = o$ und $y = o$ gleichzeitige Werthe sind, so erhält man noch

$$P_1\,p\,l^2 - \tfrac{1}{4}\,Q\,l^2 + \tfrac{1}{6}\,Q\,l^2 = o$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2}\,P_1\,p\,l^3 - \tfrac{1}{12}\,Q\,l^3 + \tfrac{1}{24}\,Q\,l^3 = o,$$

woraus übereinstimmend der Druck auf jede der beiden Stützen

$$P_1 = \tfrac{1}{12}\,\frac{Q}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (398)$$

olgt. Mit Hilfe dieses We rthes gehen die vorigen Gleichungen (395), (396) und (397) in folgende bestimmte über:

$$m\,t\,\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{12}\,\frac{Q}{l}\,[l^2 - 6\,x\,(l - x)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (399),$$

$$m\,t\,\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{12}\,\frac{Q}{l}\,x\,(l - x)\,(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (400)$$

und

$$m\,t\;y = \tfrac{1}{24}\,\frac{Q}{l}\,x^2\,(l - x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (401).$$

Die Biegung in der Mitte C ergibt sich aus der letzten Gleichung für $x = \frac{1}{2} l$ mit

$$\overline{CC'} = \delta = \frac{1}{384} \frac{Q l^3}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (402).$$

§. 196.

Besondere Eigenschaften.

1. Sämmtliche Gleichungen, welche das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B beleuchten, sind von p unabhängig. Es hat daher in Uebereinstimmung mit der im §. 194 gemachten Bemerkung die Länge der Stücke AD und BF auf dieses Verhalten keinen Einfluss, wenn nur die Kräfte P_1 und P_2 so gewählt sind, dass die Tangenten in A und B horizontal werden.

2. Um diese verlangte Bedingung zu erreichen, muss jede der an den Enden des Trägers D und E anzubringenden Kräfte P_1 und P_2 den sub (398) angegebenen Werth haben. Dieser Werth variirt zwar mit p, und ist somit von der Länge der Stücke $\overline{AD'}$ und $\overline{BE'}$ abhängig; doch erscheint, wie vorauszusehen war, das Product aus jenen Kräften und den Längen der erwähnten Stücke von p unabhängig; denn man hat:

$$P_1 \,.\, \overline{AD'} = P_2 \,.\, \overline{BE'} = \frac{1}{12} Q l.$$

Diese Producte sind offenbar die statischen Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B, und es folgt hieraus, dass die Stücke $\overline{AD'}$ und $\overline{BE'}$ länger oder kürzer sein können, wenn nur die Kräfte P_1 und P_2 in einem solchen Verhältnisse kleiner oder grösser werden, dass die betreffenden statischen Kraftmomente sich nicht verändern. Hiernach wird die obige Bedingung, die Tangenten in A und B horizontal zu erhalten, desto schwieriger zu erfüllen sein, je weniger der Träger über die Stützen hinausragt.

3. Da die für $mt \frac{dy}{dx}$ gegebene Gleichung (400) für die drei Werthe $x = o$, $x = \frac{1}{2} l$ und $x = l$ verschwindet, so geht die Tangente an die Biegungscurve nicht nur in A und B, sondern auch in der Mitte C horizontal, was mit der Symmetrie der Biegungscurve übereinstimmt.

4. Da die für $mt \frac{d^2 y}{dx^2}$ gegebene Gleichung (399) mit dem Ausdrucke

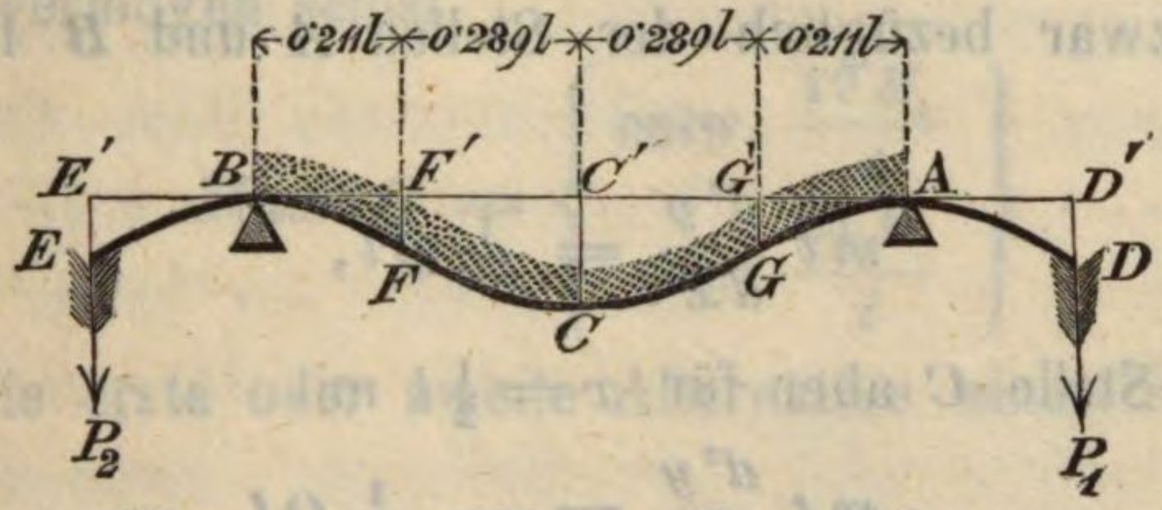
$$l^2 - 6x(l-x) = (6x^2 - 6xl + l^2)$$

verschwindet, und diess für die zwei Werthe

$$x = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)l \text{ und } x = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)l$$

geschieht, so hat die Biegungscurve zwei symmetrisch liegende Wende-

Fig. 253.



puncte F und G (Fig. 253). Zur näheren Bestimmung ihrer Lage hat man die Relationen

$$\left.\begin{aligned}
\overline{AG'} &= \overline{BF'} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)l = 0{\cdot}2113\,l \\
\overline{AF'} &= \overline{BG'} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)l = 0{\cdot}7887\,l \\
\overline{C'G'} &= \overline{C'F'} = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,l = 0{\cdot}2887\,l
\end{aligned}\right\} (403).$$

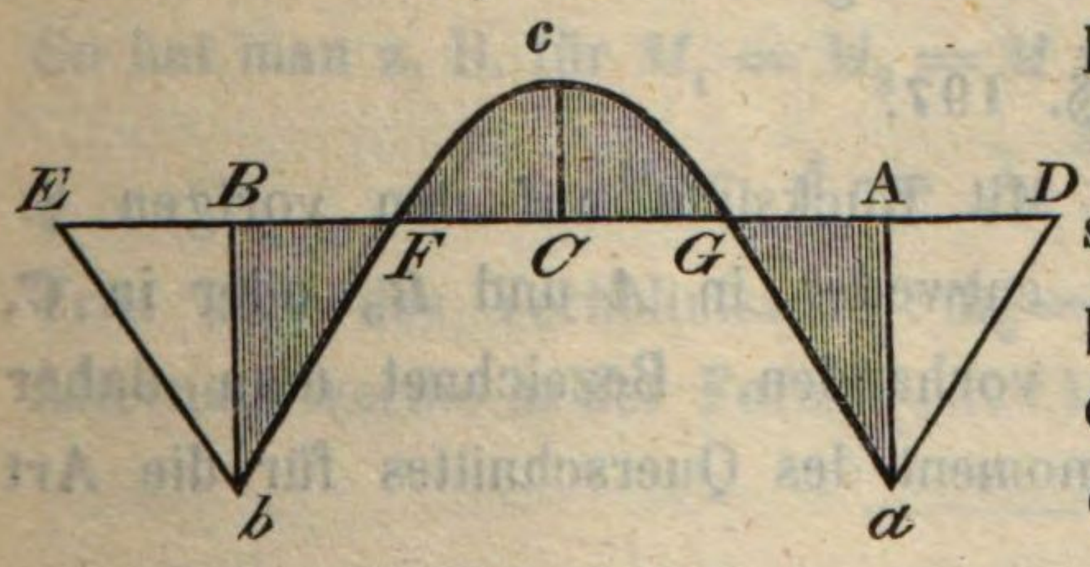
somit

$$\overline{BF'} : \overline{F'C'} = (3-\sqrt{3}):\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1):1 = 0{\cdot}7321:1.$$

Die Wendepuncte F und G und der Mittelpunct C theilen also die Curve ACB nicht, wie bei dem im vorigen Kapitel behandelten Falle, in vier gleiche Theile, sondern die den Stützen A und B anliegenden Theile sind etwas kleiner, als die an der Mitte liegenden Segmente.

5. Die Biegung in der Mitte $\overline{CC'} = \delta = \frac{1}{384}\frac{Ql^3}{mt}$ ist mit Rücksicht auf den §. 190 ad 5 nur die Hälfte von derjenigen, welche vorhanden wäre, wenn man die Last Q in der Mitte concentrirt hätte.

Fig. 254.



6. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die Gleichung (399) ausgedrückt sind, im Sinne des §. 128 graphisch dar, so erhält man die Fig. 254. Die Begränzungscurve acb ist eine Parabel,

welche durch die Wendepuncte F und G der Längenaxe geht, und deren Scheitel in der durch den Mittelpunct C gezogenen Verticalen liegt. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass der grösste numerische Werth der positiven Kraftmomente durch die Ordinaten $\overline{Aa}$ und $\overline{Bb}$, jener der negativen Kraftmomente aber durch die Ordinate $\overline{Cc}$ dargestellt wird. Diese Maximalwerthe resultiren aus der Gleichung (399), und zwar bezüglich der Stellen A und B für $x = o$ und $x = l$ mit

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = \tfrac{1}{12} Q l,$$

bezüglich der Stelle C aber für $x = \frac{1}{2} l$ mit

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = - \tfrac{1}{24} Q l.$$

Heisst man jetzt übereinstimmend mit den Bezeichnungen im §. 124 den grössten numerischen Werth der positiven Kraftmomente $R_1 z_1$, jenen der negativen Kraftmomente aber $R_2 z_2$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} R_1 z_1 &= \tfrac{1}{12} Q l \\ \text{und } R_2 z_2 &= \tfrac{1}{24} Q l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (404).$$

Nennt man noch den kleinsten der nach abwärts gerichteten Krümmungshalbmesser ϱ_1, jenen der nach aufwärts gerichteten hingegen ϱ_2, so ist, da bekanntlich für jeden Krümmungshalbmesser ϱ allgemein $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden kann,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \tfrac{1}{12} \frac{Q l}{m t} \\ \text{und } \frac{1}{\varrho_2} &= - \tfrac{1}{24} \frac{Q l}{m t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (405),$$

wesshalb der Krümmungshalbmesser in der Mitte der Biegungscurve doppelt so gross ist, wie jener an den beiden Auflagepuncten A und B.

Tragvermögen.

§. 197.

Allgemeine Formel. Mit Rücksicht auf den vorigen §. ist der gefährliche Querschnitt entweder in A und B, oder in C, oder in A, B und C zugleich vorhanden. Bezeichnet man daher im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes für die Art

der Anspruchsnahme in A und B mit M_1, jenes für die Art der Anspruchsnahme in C aber mit M_2, und nennt man das Tragvermögen, d. i. die grösste zulässige Belastung $Max.\ Q$, so hat man den erwähnten §§. zufolge,

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = \tfrac{1}{12} Q l$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = \tfrac{1}{24} Q l,$$

also das Tragvermögen selbst

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{12 M_1}{l} \\ \text{oder } \dfrac{24 M_2}{l} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (406),$$

je nachdem die erste oder zweite Alternative einen kleineren Werth gibt.

§. 198.

Besondere Eigenschaften.

1. Ist $M_1 = M_2 = M$ (siehe §. 125 ad 1 und 2), so gibt offenbar die erste Alternative einen kleineren Werth, der gefährliche Querschnitt befindet sich an den beiden Stellen A und B, und das Tragvermögen wird

$$Max.\ Q = \frac{12 M}{l},$$

also $1\frac{1}{2}$mal so gross, wie in dem Falle (IV ad 87), wo die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, und der Träger bloss auf den beiden Stützen in A und B aufruhet.

2. Die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen Platz greifen kann, ist mit Rücksicht auf die Formeln (402) und (406)

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{384} l^3 . \frac{Max.\ Q}{m t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \tfrac{1}{32} \dfrac{M_1 l^2}{m t} \\ \text{oder } \tfrac{1}{16} \dfrac{M_2 l^2}{m t} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (407).$$

So hat man z. B. für $M_1 = M_2 = M$ nach der ersten Alternative

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{32} \frac{M l^2}{m t}.$$

Tritt aber das Verhältniss $M_1 : M_2 = 2 : 1$ ein, so werden die beiden Alternativwerthe in der Formel (407) gleich gross.

Sechstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden eingemauerten Trägers.

§. 199.

Vorerinnerung. Wenn (Fig. 255 und 256) ein horizontal liegender Träger an beiden Enden eingemauert, und dabei beabsichtigt wird, diese Enden in ihrer horizontalen Lage auch dann zu erhalten, wenn der Träger belastet wird, so handelt es sich um die Erfüllung der Bedingung, dass die Tangenten der Biegungscurve in *A* und *B* horizontal werden. Doch kann hiebei, vom practischen Standpuncte aus betrachtet, noch nicht ein absolutes Festhalten der Trägerenden angenommen werden, indem die Puncte *A* und *B*, welche vor der Biegung in den beiden Wandflächen liegen, nach Eintritt derselben etwas gegen die Mitte *C* rücken. Werden durch die Biegung die Gränzen der Elasticität nicht überschritten, so wird zwar das Verrücken jener Puncte nur unwesentlich sein; man darf sich aber nicht darüber täuschen, dass es demungeachtet stattfindet, und selbst dann nicht als beseitigt anzusehen ist, wenn man die Reibung zwischen dem Mauerwerke und den Trägerenden bedeutend vermehren, oder wohl gar diese letzteren (wie in der Fig. 258) keilförmig, anstatt (wie in der Fig. 257) prismatisch machen wollte. Denn, wenn auch in diesen Fällen die Oberfläche der eingemauerten Enden in Folge der erwähnten Reibung oder der Keilform mit vermehrter Sicherheit fixirt werden könnte, so käme doch noch immer die Ausdehnung der Fasern von den Trägerenden in Betracht, welche desshalb nicht vermieden wäre, abgesehen davon, dass der nöthige Widerstand von Seite des Mauerwerkes, das die Trägerenden umhüllt, in dem letzteren Falle desto schwieriger erreicht würde, je greller man die Keilform der Enden gemacht hätte.

Fig. 255.

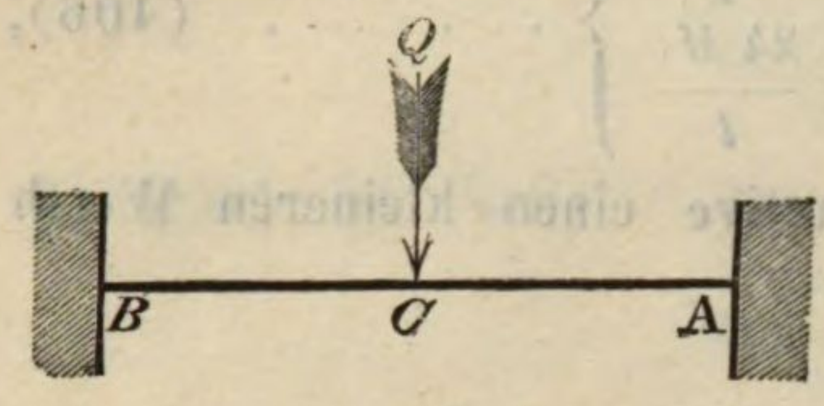


Fig. 256.

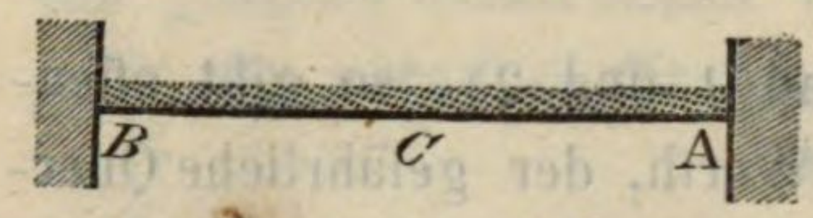


Fig. 257.

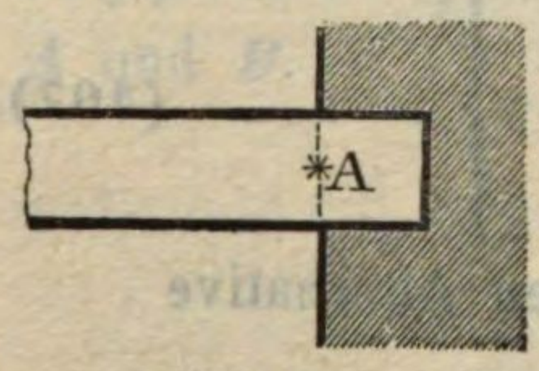
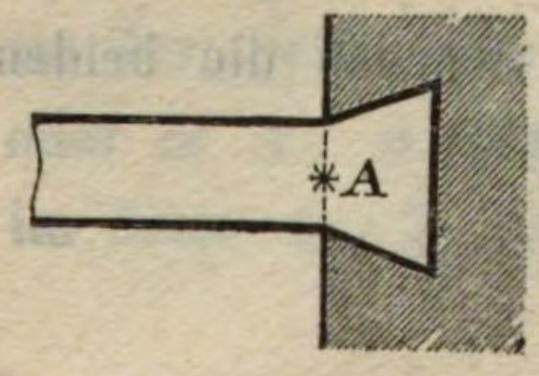


Fig. 258.



Kann man für die Praxis hinreichend genau annehmen, dass die Tangenten der Biegungscurve in A und B, (Fig. 255 und 256) horizontal gehen, so wird es gewöhnlich erlaubt sein, den Zustand des Trägers jenem gleich zu halten, welcher in den beiden vorhergehenden Kapiteln umständlich erörtert worden ist. Man beachte nämlich, dass auch in jenen Fällen (Fig. 247 und 251) die dortigen Puncte A und B der Längenaxe in Folge der Biegung etwas, obwohl nur unwesentlich einander näher gerückt werden.

§. 200.

Besondere Resultate. Mit Rücksicht auf den vorigen §. hat man in dem Falle, wenn (Fig. 255) der Träger von der freien Länge $AB = l$ in der Mitte C beansprucht wird, und mt die Bedeutung, wie im §. 53, beibehält, folgende Resultate:

1. Die **Biegung** in der Mitte C wird bei der Belastung Q, welche die Elasticitätsgränzen nicht überschreitet, nach der Gleichung (378) für $n = \frac{1}{2}$

$$\delta = \frac{1}{192} \frac{Q l^3}{m t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (408)$$

somit **viermal geringer**, als wenn unter sonst gleichen Umständen der Träger in A und B bloss aufliegen würde. (Siehe die Formel 72.)

2. Das **Tragvermögen** *Max.* Q wird nach der Gleichung (389)

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \ \frac{8 M_1}{l} \\ \text{oder} \ \frac{8 M_2}{l} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (409),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu wählen ist. Der gefährliche Querschnitt liegt in A und B zugleich, wenn die erste, hingegen in C, wenn die zweite Alternative das Tragvermögen bezeichnet, endlich in A, B und C zugleich, wenn beide Alternativwerthe gleiche Resultate geben. Diess letztere geschieht für $M_1 = M_2 = M$, und es ist sodann das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \frac{8 M}{l},$$

somit doppelt so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in *A* und *B* bloss aufliegt (§. 86) *).

3. Die grösste Biegung *Max.* δ, die ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen Platz greifen kann, ist nach der Gleichung (391)

$$Max.\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{24}\ \frac{M_1 l^2}{m t} \\ \text{oder } \frac{1}{24}\ \frac{M_2 l^2}{m t} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (410),$$

wobei wieder der kleinere Werth massgebend ist. Für $M_1 = M_2 = M$ wird diese Biegung

$$Max.\ \delta = \frac{1}{24}\ \frac{M l^2}{m t},$$

somit nur halb so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in *A* und *B* bloss aufliegt. (Siehe die Gleichung 119.)

4. Das mechanische Widerstandsmoment *W* bis zur Erreichung der Elasticitätsgränze ist nach der Formel (393) der kleinere von den beiden Werthen

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6}\ \frac{M_1^2 l}{m t} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\ \frac{M_2^2 l}{m t} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (411).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ wird

$$W = \frac{1}{6}\ \frac{M^2 l}{m t},$$

somit eben so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in *A* und *B* bloss aufliegt. (Siehe die Formel 148.)

Wenn (Fig. 256) der an beiden Enden eingemauerte Träger nach seiner Länge $AB = l$ gleichförmig belastet wird, so ist mit Rücksicht auf den vorigen §. Folgendes zu bemerken:

1. Die Biegung in der Mitte *C* wird bei der Belastung *Q*, welche die Elasticitätsgränzen nicht überschreitet, nach der Gleichung (402)

$$\delta = \frac{1}{384}\ \frac{Q l^3}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (412),$$

somit nur halb so gross, wie in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt ist. (Siehe die Formel 408.)

---

*) Dieses Resultat wird allgemein angenommen, obwohl man dasselbe auch auf andere nicht streng einleuchtende Arten abzuleiten pflegt.

2. Das Tragvermögen *Max. Q* wird nach der Gleichung (406)

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{12\,M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{24\,M_2}{l} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (413).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ ist insbesondere dasselbe

$$Max.\ Q = \frac{12\,M}{l},$$

somit $1\frac{1}{2}$mal so gross, wie in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt wird. (Siehe die Formel 409) *).

3. Die grösste Biegung *Max.* δ, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen stattfinden kann, ist nach der Gleichung (407)

$$Max.\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{32}\,\frac{M_1\,l^2}{m\,t} \\ \text{oder } \frac{1}{16}\,\frac{M_2\,l^2}{m\,t} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (414).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ wird insbesondere

$$Max.\ \delta = \frac{1}{32}\,\frac{M\,l^2}{m\,t},$$

---

*) Anmerkung. Auf dieses Resultat hat der Verfasser zuerst in der Förster'schen Bauzeitung (IV. und V. Heft *ex anno* 1853) aufmerksam gemacht. Dasselbe weicht von dem sonst üblichen insoferne ab, als man dem Träger mit der gleichförmig vertheilten Belastung das doppelte (anstatt wie oben das $1\frac{1}{2}$fache) Tragvermögen von jenem zuzuschreiben pflegt, welches bei der Concentrirung der Belastung in der halben Trägerlänge vorhanden ist. Bei der nicht ganz wissenschaftlichen Begründung dieses älteren Resultates darf die Unverlässlichkeit desselben um so weniger befremden, als man aus Versuchen gefunden hat, dass die nach der obigen Formel (412) berechnete Biegung δ mit der Erfahrung übereinstimmt, woraus auf die Richtigkeit der hier gegebenen Theorie zurück geschlossen werden kann. Nach dem englischen Schriftsteller Moseley wäre das Verhältniss der Tragfähigkeiten in den verglichenen Fällen sogar 3 : 1, welcher Irrthum dadurch herbeigeführt worden ist, dass er die schwächste Stelle (den gefährlichen Querschnitt) in der Mitte *C* (Fig. 256) annimmt, was für $M_1 = M_2$ nicht stattfinden kann, indem sodann der gefährliche Querschnitt bei jedem eingemauerten Ende liegt. Die Bedingung $M_1 = M_2$ ist darum zu Grunde zu legen, weil sie der Navier'schen Theorie, welcher sich Moseley anschliesst, entspricht. (Siehe die §§. 79 ad 5 und 125 ad 1.)

als der kleinere Werth, zu gelten haben. Diese Biegung beträgt nur $\frac{3}{4}$ von jener in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt wird. (Siehe die Gleichung 410.)

§. 201.

Combinirung der vorstehenden Fälle. Wenn ein an beiden Enden eingemauerter Träger sowohl in der Mitte von einer Last (Q_1), als auch mit einer nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Belastung (Q_2) in Anspruch genommen wird, so sind offenbar die im vorstehenden §. 200 erörterten zwei Fälle zu combiniren. Hiernach findet man folgende Resultate:

1. Die in der Mitte entstehende Biegung δ ist aus zwei Theilen zusammengesetzt zu betrachten, welche beziehungsweise von den Belastungen Q_1 und Q_2 herrühren, daher unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen aus folgender Relation zu bestimmen:

$$\delta = \frac{1}{192}\,\frac{Q_1\,l^3}{m\,t} + \frac{1}{384}\,\frac{Q_2\,l^3}{m\,t} = \frac{1}{192}\,(Q_1 + \tfrac{1}{2}\,Q_2)\,\frac{l^3}{m\,t}\,. \quad (415).$$

Hieraus sieht man, dass die gleichförmig vertheilte Belastung in Beziehung auf die Biegung in der Mitte dieselbe Wirkung äussert, wie wenn die Hälfte jener Belastung mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wäre.

2. Befindet sich der gefährliche Querschnitt in A und B, so ist das Kraftmoment in Bezug auf diese Stellen

$$(\tfrac{1}{8}\,Q_1\,l + \tfrac{1}{12}\,Q_2\,l)$$

und das Tragvermögen wird erreicht, wenn dieses Kraftmoment einen dem Tragmomente M_1 des Querschnittes gleichen Werth hat. Sodann müssen die grössten zulässigen Werthe von Q_1 und Q_2 der Gleichung

$$M_1 = \tfrac{1}{8}\,Q_1\,l + \tfrac{1}{12}\,Q_2\,l = \tfrac{1}{8}\,(Q_1 + \tfrac{2}{3}\,Q_2)\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (416)$$

Genüge leisten.

Hieraus sieht man, dass in diesem Falle in Beziehung auf das Tragvermögen die gleichförmig vertheilte Last dieselbe Wirkung äussert, wie wenn zwei Drittel jener Last mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wären.

Befindet sich aber der gefährliche Querschnitt in C, so ist der numerische Werth des Kraftmomentes daselbst

$$(\tfrac{1}{8}\,Ql + \tfrac{1}{24}\,Q_2\,l),$$

und das Tragvermögen wird erreicht, wenn das betreffende Tragmoment M_2 des Querschnittes jenem Kraftmomente gleich ist. In diesem Falle hat man

$$M_2 = \tfrac{1}{8} Q_1 l + \tfrac{1}{24} Q_2 l = \tfrac{1}{8} (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2) l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (417),$$

so dass jetzt die gleichförmig vertheilte Belastung eine andere Wirkung als zuvor, nämlich eine solche äussert, wie, wenn der dritte Theil dieser Belastung mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wäre.

Liegt endlich der gefährliche Querschnitt in A, B und C zugleich, so ist es gleichgiltig, von welcher der beiden Formeln (416) und (417) man Gebrauch macht.

Die Entscheidung, wo der gefährliche Querschnitt eigentlich liegt, ist übrigens nach der im §. 124 angegebenen Regel leicht zu fällen. Zu diesem Behufe hat man nur das Verhältniss $M_1 : M_2$ zu vergleichen mit jenem zwischen den angegebenen Kraftmomenten $\frac{1}{8} (Q_1 + \frac{2}{3} Q_2) l : \frac{1}{8} (Q_1 + \frac{1}{3} Q_2) l$, oder abgekürzt mit

$$(Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2),$$

und sofort im Sinne der Gleichungen (223), (224) und (225) zu untersuchen, welche von folgenden 3 Relationen stattfindet:

1. $M_1 : M_2 < (Q_1 + \frac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \frac{1}{3} Q_2)$
2. $M_1 : M_2 > (Q_1 + \frac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \frac{1}{3} Q_2)$
3. $M_1 : M_2 = (Q_1 + \frac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \frac{1}{3} Q_2)$.

Wäre z. B. $M_1 = M_2$ (§. 125 ad 1 und 2), so hätte man offenbar das erste Verhältniss, und diesem correspondirend die Gleichung (416) zur Beurtheilung des Tragvermögens zu benützen.

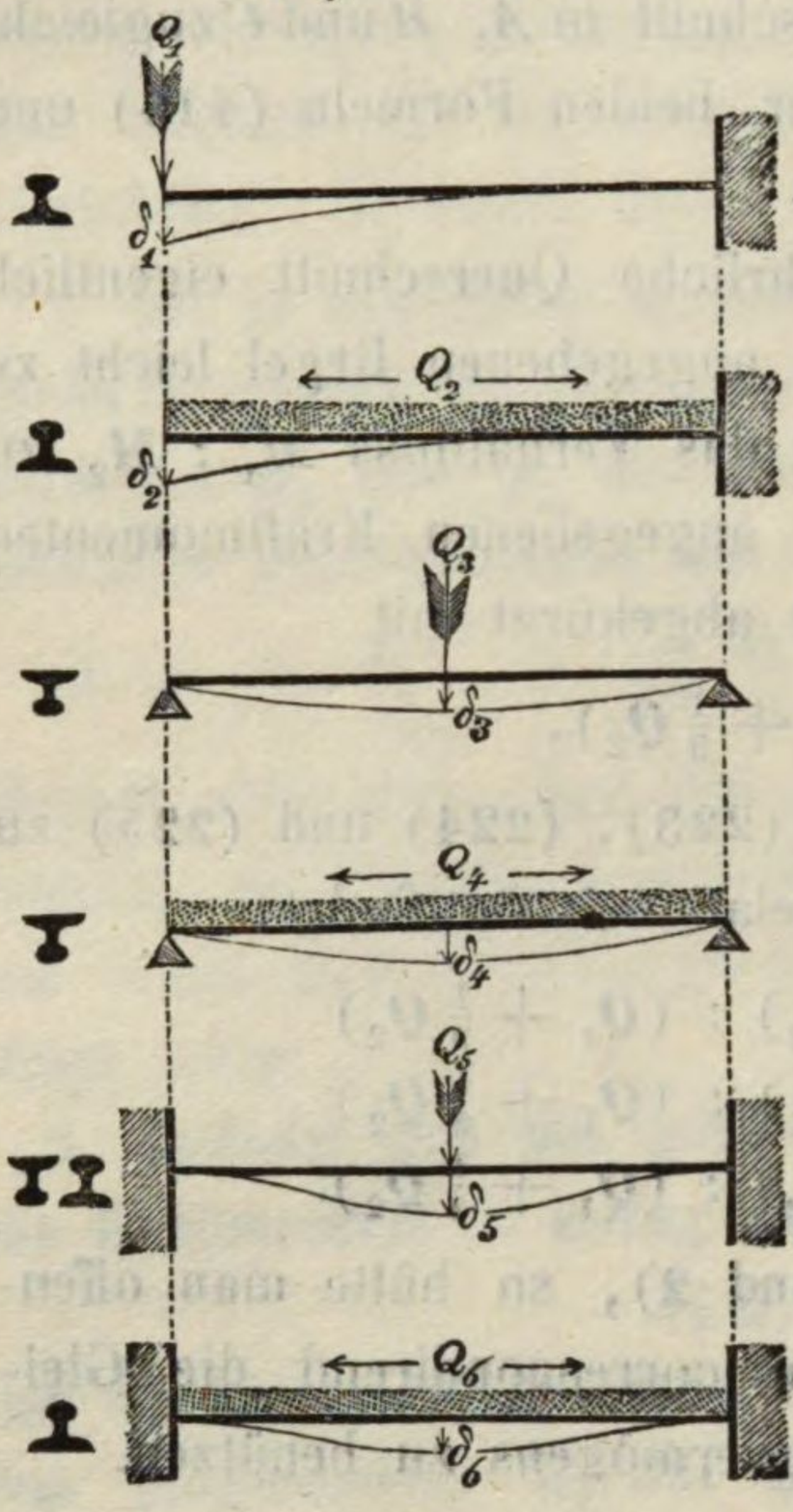
§. 202.

Berücksichtigung des eigenen Trägergewichtes. Das eigene Gewicht des prismatischen Trägers kann als eine nach seiner Länge gleichförmig vertheilte Belastung angesehen werden, wenn, wie vorausgesezt ist, seine Längenaxe horizontal liegt. Ist daher der Träger an beiden Enden eingemauert, und wird er auf eine der Arten in Anspruch genommen, welche in den vorstehenden §§. 200 und 201 behandelt wurden, so kann man bei der Beurtheilung seiner Biegung und seines Tragvermögens das eigene Gewicht leicht berücksichtigen.

§. 203.

Vergleichung der im §. 58 mit I, II, III und IV bezeichneten Fälle mit den zwei im §. 200 untersuchten. Zur Vergleichung dieser Fälle mit einander diene Fig. 259, wo dieselben nach folgenden Umständen geordnet erscheinen:

Fig. 259.



I Festhaltung des Trägers an einem Ende und Belastung desselben am andern Ende;

II. Festhaltung des Trägers an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach;

III. Unterstützung beider Enden des Trägers und Belastung desselben in der Mitte;

IV. Unterstützung beider Enden des Trägers und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach;

V. Feste Einmauerung beider Enden des Trägers und Belastung desselben in der Mitte;

VI. Feste Einmauerung beider Enden des Trägers und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach.

Die beiden im §. 200 untersuchten Fälle sind somit fortsetzend mit V und VI bezeichnet.

Werden bei der Anspruchsnahme des Trägers die Elasticitätsgränzen nicht überschritten, so kann man Folgendes bemerken:

1. Bezeichnet man die Belastungen des Trägers mit Q, und die hiedurch entstehenden Biegungen mit δ, beide Buchstaben aber noch mit Zeigern, welche mit den obigen numerirten Fällen correspondiren, so hat man nach den bezüglichen Formeln, und zwar

nach jener unter (61) . . . . . $\delta_1 = \frac{1}{3} \frac{Q_1 l^3}{m t}$,

„ „ „ (68) . . . . . $\delta_2 = \frac{1}{8} \frac{Q_2 l^3}{m t}$,

„ „ „ (72) . . . . . $\delta_3 = \frac{1}{48} \frac{Q_3 l^3}{m t}$,

„ „ „ (77) . . . . . $\delta_4 = \frac{5}{384} \frac{Q_4 l^3}{m t}$,

„ „ „ (408) . . . . . $\delta_5 = \frac{1}{192} \frac{Q_5 l^3}{m t}$,

„ „ „ (412) . . . . . $\delta_6 = \frac{1}{384} \frac{Q_6 l^3}{m t}$,

somit vergleichungsweise

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 : \delta_5 : \delta_6 = \frac{Q_1}{3} : \frac{Q_2}{8} : \frac{Q_3}{48} : \frac{5\,Q_4}{384} : \frac{Q_5}{192} : \frac{Q_6}{384}. \quad (418).$$

Sind alle Belastungen einander gleich, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6,$$

so wird insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 : \delta_5 : \delta_6 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{48} : \tfrac{5}{384} : \tfrac{1}{192} : \tfrac{1}{384} \\ &= 128 : 48 : 8 : 5 : 2 : 1 \end{aligned}\right\} (419)$$

wobei unter andern das Verhältniss

$$\delta_1 : \delta_3 : \delta_5 = 1 : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{8^2}$$

bemerkenswerth ist.

2. Der gefährliche Querschnitt liegt im I. und II. Falle stets an den festgehaltenen Enden, und im III. und IV. Falle stets in der Mitte des Trägers. Im V. und VI. Falle kann er nach Umständen entweder an den festgehaltenen Enden, oder in der Mitte, oder an allen diesen drei Stellen zugleich liegen. Das Nähere über die Lage des gefährlichen Querschnittes ist aus der vorausgegangenen speciellen Behandlung der einzelnen Fälle zu entnehmen.

3. Nimmt man den Querschnitt beliebig, z. B. ⊥ förmig und dessen Axe der Symmetrie vertical liegend an, so hat man im Allgemeinen zu unterscheiden, auf welche Weise die Fasern in dem gefährlichen Querschnitte in Anspruch genommen werden. Zu diesem Behufe bezeichne man das Tragmoment des Querschnittes mit M_1, wenn die Fasern an der schmalen Seite ausgedehnt und an der breiten Seite zusammengedrückt werden, hingegen mit M_2, wenn die Anspruchsnahme gerade umgekehrt stattfindet, also die Fasern

an der breiten Seite ausgedehnt und an der schmalen zusammengedrückt werden. Um nun die beabsichtigte Vergleichung obiger sechs Fälle möglichst anschaulich zu machen, wähle man die Querschnittslage in jedem einzelnen dieser Fälle derart, dass bei der Vergleichung des Tragvermögens stets derselbe Werth des Tragmomentes massgebend ist. Diese Bedingung wird z. B. für einen gusseisernen Träger dann erreicht werden, wenn der Querschnitt desselben in den einzelnen Fällen die in der Fig. 259 angezeigten Lagen hätte. Es ist sodann in dem Falle

Nr. I, der gefährliche Querschnitt an dem festgehaltenen Ende vorhanden, und nach Gleichung (106) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_1 = \frac{M_1}{l};$$

Nr. II, der gefährliche Querschnitt gleichfalls an dem festgehaltenen Ende vorhanden, und nach Gleichung (107) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_2 = \frac{2\,M_1}{l};$$

Nr. III, der gefährliche Querschnitt in der Mitte des Trägers, und nach Gleichung (108) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_3 = \frac{4\,M_1}{l};$$

Nr. IV, der gefährliche Querschnitt gleichfalls in der Mitte, und nach Gleichung (109) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_4 = \frac{8\,M_1}{l};$$

Nr. V, der gefährliche Querschnitt entweder an den beiden festgehaltenen Enden, oder in der Mitte des Trägers, je nachdem die Querschnittslage, welche diessfalls beliebig ist, gewählt wird, das Tragvermögen aber jedenfalls im Sinne der Gleichung (389), weil der Voraussetzung gemäss $M_1 < M_2$ ist,

$$Max.\ Q_5 = \frac{8\,M_1}{l};$$

Nr. VI, der gefährliche Querschnitt (wenigstens in der Regel) an den beiden festgehaltenen Enden, und im Sinne der Gleichung (406) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_6 = \frac{12\,M_1}{l}.$$

Für einen Träger aus Schmiedeeisen hat, falls man mit Rücksicht auf den §. 125 ad 1 $M_1 = M_2$ annehmen kann, die besprochene Lage des Querschnittes in allen sechs Fällen keinen Einfluss, wenn nur die Axe der Symmetrie vertical ist.

Hält man sich diese Bemerkungen gegenwärtig, so findet man folgende Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} Max.\,Q_1 : Max\ Q_2 : Max.\,Q_3 : Max.\,Q_4 : Max.\,Q_5 : Max.\,Q_6 = \\ = 1 : 2 : 4 : 8 : 8 : 12 \end{array}\right\} (420).$$

4. Das Verhältniss der grössten zulässigen Biegungen in den betrachteten Fällen ergibt sich unter Zugrundelegung des gefundenen Tragvermögens durch die Combinirung der Gleichungen (418) und (420), wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} Max.\,\delta_1 : Max.\delta_2 : Max.\delta_3 : Max.\delta_4 : Max.\delta_5 : Max.\,\delta_6 \\ = \frac{1}{3} Max.\,Q_1 : \frac{1}{8} Max.Q_2 : \frac{1}{48} Max.Q_3 : \frac{5}{384} Max\ Q_4 : \frac{1}{192} Max.Q_5 : \frac{1}{384} Max.Q_6 \\ = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{5}{48} : \frac{1}{24} : \frac{1}{32} \\ = 32 : 24 : 8 : 10 : 4 : 3 \end{array}\right\} (421),$$

wobei unter andern die Relation $Max.\,\delta_4 > Max.\,\delta_3$ bemerkungswerth ist.

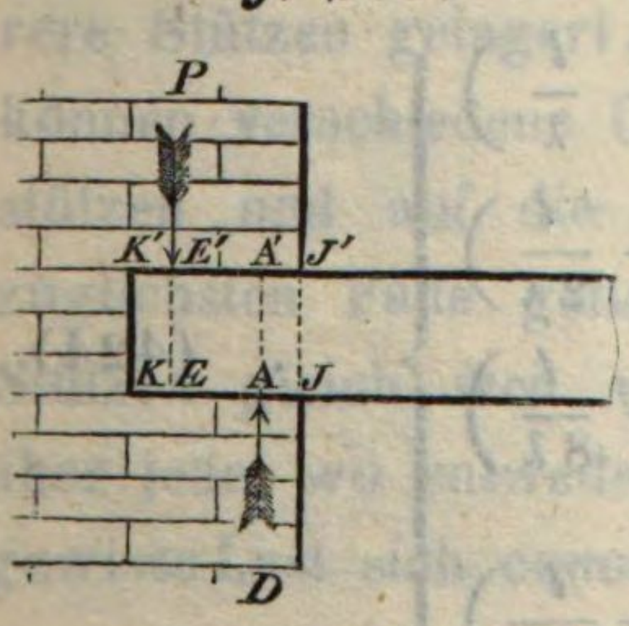
Auch hat

6. das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment in den Fällen I, III und V nach den Formeln (147), (148) und (411) einen und denselben Werth.

§. 204.

Widerstand des Mauerwerkes bei eingemauerten Trägerenden. Ist das eine Ende des Trägers, wie in den Fällen I und II, oder sind seine beiden Enden, wie in den Fällen V und VI, eingemauert, so entsteht die Frage, wie gross der Widerstand des Mauerwerkes sein muss, um die Enden des Trägers genügend festzuhalten, so, dass die Tangenten an die Biegungscurve daselbst horizontal werden. Zur Beantwortung dieser Frage stehe Fig. 260 in Betracht, wo das Ende des Trägers $\overline{JK}$ im Mauerwerke festgehalten wird. Bei der Anspruchsnahme des Trägers durch eine Belastung würde für die beabsichtigte Drehung J der Drehungspunct sein, wenn das

Fig. 260.



Mauerwerk unzusammendrückbar wäre. Da aber diess nicht der Fall ist, so wird jener Drehungspunct nur in die Gegend des Punctes J, etwa nach A fallen, wobei es einleuchtet, dass die Puncte A und J desto näher rücken werden, je weniger zusammendrückbar das Mauerwerk ist. Durch diesen Punct A geht der aus Anlass der Anspruchsnahme des Trägers hervorgerufene Druck auf das untere Mauerwerk, welcher mit D bezeichnet werden soll. Der Druck auf das obere Mauerwerk wird in einem Puncte zwischen J' und K', etwa in E' anzunehmen sein. Dieser Druck werde mit P bezeichnet. Nennt man noch die Entfernung der beiden Drücke P und D von einander, nämlich $\overline{AE} = \overline{A'E'} = \lambda$, so hat man es jetzt mit einem Hebelsysteme zu thun, wo in A der Drehungspunct ist, und die eine Kraft P als Widerstand des Mauerwerkes auftritt, während die andere Kraft durch die Belastung des Trägers entsteht. Sind beide Enden des Trägers eingemauert, so hat man dieselbe Vorstellung auch für das gegenüber liegende Ende beizubehalten. Wird von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt, so leuchtet ein, dass zur Erreichung des Gleichgewichtes in den Fällen

$$\left.\begin{array}{l} \text{I und II} \ldots D = P + Q \\ \text{V und VI aber } D = P + \frac{1}{2} Q \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (422)$$

sein muss. Wird ferner die Länge l des Trägers von dem Puncte A aus gerechnet, daher in derselben die Länge λ nicht einbezogen, so hat man überdiess wegen der nöthigen Gleichheit der statischen Kraftmomente in Bezug auf den Punct A in dem Falle

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I,} & P\lambda = Q l \\ \text{II,} & P\lambda = \frac{1}{2} Q l \\ \text{V,} & P\lambda = \frac{1}{8} Q l \\ \text{und VI,} & P\lambda = \frac{1}{12} Q l \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (423).$$

Durch die Combinirung der Gleichungen (422) und (423) findet man daher

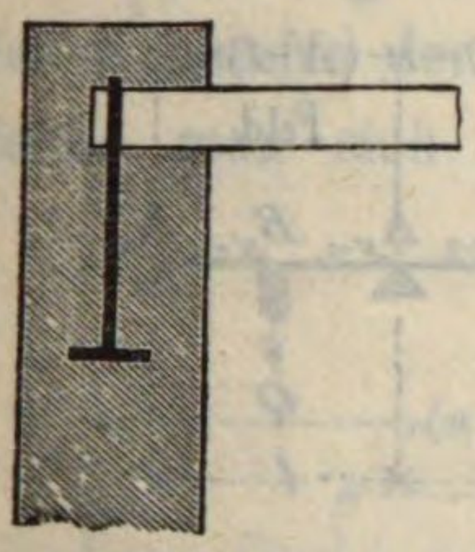
$$\left.\begin{array}{l} \text{ad I, } P = \frac{l}{\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{\lambda}\right) \\ \text{ad II, } P = \frac{l}{2\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{2\lambda}\right) \\ \text{ad V, } P = \frac{l}{8\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{8\lambda}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad (424).$$

endlich

$$\text{ad VI, } P = \frac{l}{12\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{12\lambda}\right)$$

Diese Gleichungen lassen die Drücke beurtheilen, welche das Mauerwerk ober- und unterhalb des betreffenden Trägerendes auszuhalten hat. Dieselben werden mit der Zunahme von λ kleiner, und mit der Abnahme von λ grösser, so dass sie für einen unendlich kleinen Werth von λ bis in das Unendliche gesteigert würden. Hieraus folgt, dass das bedungene Festhalten der Trägerenden desto schwieriger zu erfüllen ist, je kürzer die in dem Mauerwerke eingelassenen Stücke sind. Es muss daher in jedem besonderen Falle ein Minimum von λ, daher auch von $\overline{JK}$ geben, bei welchem das Gleichgewicht noch möglich ist. Ueberhaupt hat man bei kurzen Stücken vorzüglich darauf zu sehen, dass das obere Mauerwerk nicht gehoben werde. Im Falle einer derartigen Besorgniss kann die Verankerung des Trägerendes in das untere Mauerwerk gute Dienste leisten (Fig. 261).

Tig. 261.



Diese Verhältnisse muss man unverrückbar im Auge behalten, um sich keiner Täuschung über die Anwendbarkeit der gefundenen Rechnungsresultate hinzugeben.

Siebentes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn in der Mitte zwischen den Stützen stets die Belastung Q concentrirt ist.

§. 205.

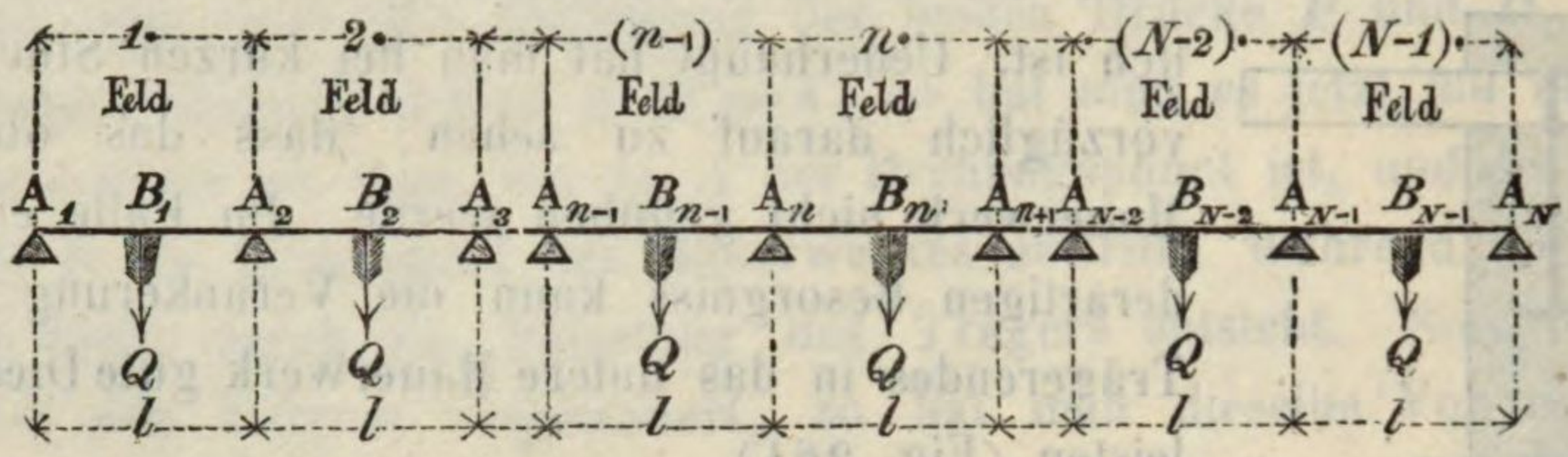
Vorerinnerung. Wenn ein continuirlicher Träger auf mehrere Stützen gelagert, und sodann mit Gewichten belastet wird, so können verschiedene Umstände in Bezug anf die Stellung der Tragstützen und auf die Art der Belastung stattfinden. Als die vorzüglichsten Fälle gelten in ersterer Beziehung jene, wo sämmtliche Stützen gleich weit von einander abstehen, in letzterer Beziehung aber jene, wo entweder in der Mitte zwischen den Stützen stets eine gewisse Last sich concentrirt, oder wo der Träger nach seiner ganzen

Länge gleichförmig belastet ist. Der Fall der vereinten Wirkung dieser beiden Belastungsweisen ist ebenfalls wichtig. Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich auf diese vorzüglichsten Fälle beschränken.

§. 206.

Annahmen. Das vorliegende Kapitel wird sich mit der Untersuchung des in Figur 262 dargestellten Falles befassen, wo nämlich der Träger auf N gleich weit von einander abstehenden Stützen A_1, A_2, A_3, ... A_n, ... A_{N-1} und A_N ruht, und in der Mitte zwischen denselben stets das Gewicht Q concentrirt ist.

Fig. 262.



Man nenne den Abstand der Stützen von einander . . l,
das Biegungsmoment im Sinne des §. 53 . . . . . ml,
betrachte die Längenaxe des Trägers als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, bei welchem die positiven Abscissen in der Richtung von A_1 gegen A_N, die positiven Ordinaten hingegen in der Richtung der einwirkenden Gewichte, also nach abwärts gezählt werden, und beziehe hierauf die Biegungscurve.

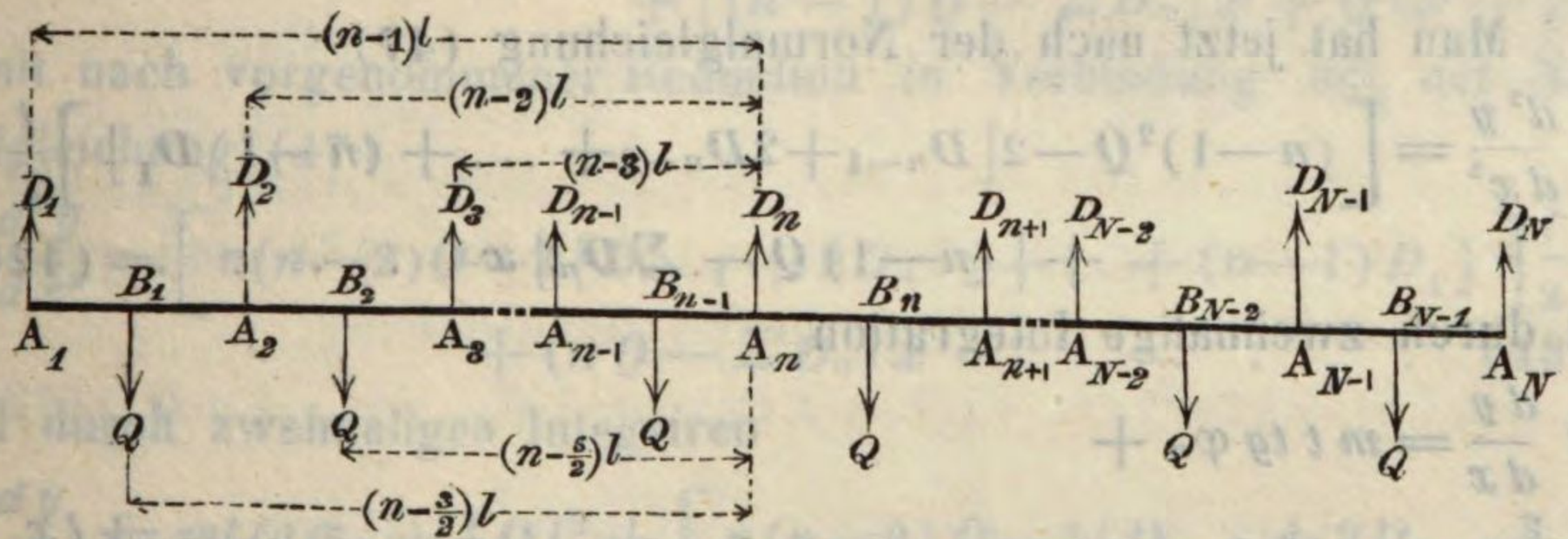
Man bezeichne ferner die Drücke auf die Stützen mit D,
die Biegungen in der Mitte zwischen denselben mit . . . . δ,
die Winkel, welche die Tangenten der Biegungscurve an den Stützpuncten mit dem Horizonte einschliessen, mit . . . φ,
und die Winkel, welche die Tangenten der Biegungcurve in der Mitte zwischen den Stützen mit jenem Horizonte bilden, mit . . . . . w,
diese Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern, so dass durch die Grösse D_n die Intensität des Druckes auf die n^{te} Stütze, und durch die Grösse δ_n die Biegung in B_n vorgestellt wird, wäh-

rend die Winkel φ_n und w_n zu den Tangenten an die Curve in A_n und B_n gehören. Uebrigens werde jeder Theil des Trägers zwischen zwei Stützen, „Tragfeld“ genannt, und gleichfalls auf einander folgend numerirt, so dass das n^{te} Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} zu liegen kommt, und der auf N Stützen ruhende Träger $(N-1)$ gleiche Tragfelder enthält.

§ 207.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Zur Erlangung der Kenntniss der Bedingungen des Gleichgewichtes bei dem Träger denke man sich (Fig. 263) seine Stützen weggenommen, und an

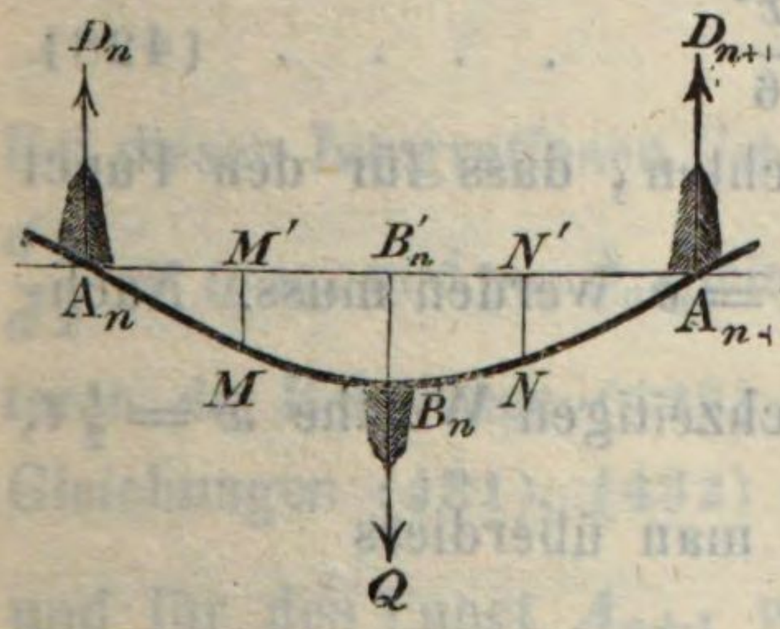
Fig. 263.



deren Statt Kräfte angebracht, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Hiernach muss vor Allem die Totalbelastung $(N-1)\,Q$ eben so gross, wie die Summe aller Drücke $(D_1 + D_2 + \ldots + D_n + \ldots + D_N)$ sein. Bezeichnet man diese mit ΣD_N, so ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes

$$\Sigma D_N = (N-1)\,Q \quad . \quad . \quad (425).$$

Fig. 264.



Auf die Betrachtung der Biegungscurve in einem beliebigen Tragfelde $\overline{A_n A_{n+1}}$ übergehend, sei der Coordinatenursprung in A_n und für irgend einen Punct des Curventheils $\overset{\frown}{A_n B_n}$ (Fig. 264) die Abscisse $\overline{A_n M'} = x$ und die Ordinate $\overline{MM'} = y$. Das statische Kraftmoment in Beziehung auf die Stelle M ist nach den Fig. 263 und 624

$$(Q.\overline{B'_1 M'} + Q.\overline{B'_2 M'} + \ldots + Q\,\overline{B'_{n-1} M'}) -$$
$$-(D_1.\overline{A_1 M'} + D_2.\overline{A_2 M'} + \ldots + D_n.\overline{A_n M'}),$$

und mit Rücksicht auf die Werthe von l und x, wenn man zugleich die Gliederordnuug umkehrt,

$$\left[Q(\tfrac{1}{2}l + x) + Q(\tfrac{3}{2}l + x) + \ldots + Q[(n - \tfrac{3}{2})l + x] \right] -$$
$$-\left[D_n x + D_{n-1}(l + x) + \ldots + [(n-1)l + x | D_1 \right] =$$
$$= \left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1] \right] \frac{l}{2} +$$
$$+ [(n-1)Q - \Sigma D_n | x,$$

wobei $\Sigma D_n = (D_1 + D_2 + \ldots + D_n)$ bedeutet, und die Reihe

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) = (n-1)^2$$

gesetzt wurde.

Man hat jetzt nach der Normalgleichung (47)

$$mt \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1] \right] \frac{l}{2} +$$
$$+ [(n-1)Q - \Sigma D_n] x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (426),$$

und durch zweimalige Integration

$$mt \frac{dy}{dx} = mt\, tg\, \varphi_n +$$
$$+ \left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1 | \right] \frac{lx}{2} +$$
$$+ [(n-1)Q - \Sigma D_n] \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (427)$$

und

$$mt\ y = mt\, tg\, \varphi_n x +$$
$$+ \left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1] \right] \frac{lx^2}{4} +$$
$$+ [(n-1)Q - \Sigma D_n | \frac{x^3}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (428).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass für den Punct A_n gleichzeitig $x = o$, $\frac{dy}{dx} = tg\, \varphi_n$ und $y = o$ werden muss. Nachdem aber auch für den Punct B_n die gleichzeitigen Werthe $x = \frac{1}{2} l$, $\frac{dy}{dx} = tg\, w_n$ und $y = \delta_n$ existiren, so hat man überdiess

$$mt\, tg\, w_n = mt\, tg\, \varphi_n +$$
$$+ \tfrac{1}{8}[(n-1)(2n-1)Q - D_n - 5D_{n-1} - 9D_{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - (4n-3)D_1]l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (429)$$

und

$$mt\,\delta_n = \tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi_n l +$$
$$+\tfrac{1}{48}\,[\,(n-1)(3n-2)\,Q - D_n - 7\,D_{n-1} - 13\,D_{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - (6n-5)\,D_1\,]\,l^3 \quad . \quad . \quad . \quad (430).$$

In den Gleichungen (426), (427) und (428) kann die Abscisse x nur von o bis $\frac{1}{2}\,l$ variiren.

Um sogleich auf den andern Curventheil $\overset{\frown}{B_n A_{n+1}}$ überzugehen, bezeichne man für irgend einen Punct N desselben wieder die Abscisse $\overline{A_n N'}$ mit x, und die Ordinate $\overline{N N'}$ mit y. In diesem Falle besteht offenbar das statische Krafmoment in Beziehung auf N aus einem Ausdrucke von der Form (426) vermehrt um das Product $Q\,(x - \frac{1}{2}\,l)$. Man hat nämlich für jenes Moment die Relation

$$\left[\,(n-1)^2\,Q - 2\,[\,D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1\,]\,\right]\frac{l}{2} +$$
$$+\,[\,(n-1)\,Q - \Sigma D_n\,]\,x + Q\,(x - \tfrac{1}{2}\,l),$$

somit nach vorgenommener Reduction in Verbindung mit der Normalgleichung (47)

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\,n(n-2)\,Q - 2\,[\,D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1\,]\,\right]\frac{l}{2} +$$
$$+\,(n\,Q - \Sigma D_n)\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (431),$$

und durch zweimaliges Integriren

$$mt\,\frac{dy}{dx} = mt\,tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{8}\,Q\,l^2 + \left[\,n\,(n-2)\,Q - 2\,[\,D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (n-1)\,D_1\,]\,\right]\frac{l\,x}{2} + (n\,Q - \Sigma\,D_n)\,\frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (432)$$

und

$$mt\;y = -\tfrac{1}{48}\,Q\,l^3 + (mt\,tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{8}\,Q\,l^2)\,x +$$
$$+\left[\,n\,(n-2)\,Q - 2\,[\,D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1\,]\,\right]\frac{l\,x^2}{4} +$$
$$+\,(n\,Q - \Sigma\,D_n)\,\frac{x^3}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (433).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass, wie zuvor $x = \frac{1}{2}\,l$, $\frac{dy}{dx} = tg\,w_n$ und $y = \delta_n$ gleichzeitige Werthe sind, und für die beiden letzteren die Relationen (429) und (430) zu benützen kommen. In den Gleichungen (431), (432) und (433) kann x von $\frac{1}{2}\,l$ bis l variiren, und für den Punct A_{n+1} wird gleichzeitig $x = l$, $\frac{dy}{dx} = tang\,\varphi_{n+1}$ und $y = o$. Der letzten Bemerkung gemäss erhält man aus den Relationen (432) und (433) überdiess

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_{n+1} = \frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{2}(2n-1\ ^2Q -$$
$$-2\left[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1\right] \quad . \quad (434)$$

und

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_n \quad = \tfrac{1}{12}(-5 + 16n - 12n^2)Q +$$
$$+\tfrac{2}{3}\left[D_n + 4D_{n-1} + 7D_{n-2} + \ldots + (3n-2)D_1\right] \quad . \quad (435).$$

Wird der Werth von $\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_n$ aus der letzten in die vorletzte Gleichung substituirt, so findet man nach gehöriger Reduction

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_{n+1} = \tfrac{1}{12}(1 - 8n + 12n^2)Q -$$
$$-\tfrac{2}{3}\left[2D_n + 5D_{n-1} + 8D_{n-2} + \ldots + (3n-1)D_1\right]. \quad (436)$$

und wird noch in der Gleichung (435) $(n+1)$ statt n gesetzt, so folgt

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_{n+1} = -\tfrac{1}{12}(1 + 8n + 12n^2)Q +$$
$$+\tfrac{2}{3}\left[D_{n+1} + 4D_n + 7D_{n\ 1} + \ldots + (3n+1)D_1\right]. \quad (437).$$

Aus der Vergleichung der Relationen (436) und (437) mit einander resultirt endlich die wichtige Bedingungsgleichung

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1+12n^2)Q \quad 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1)(438).$$

Von den Drücken auf die Stützen.

§. 208.

Abhängigkeit der Drücke unter einander. Die Gleichung (438) lehrt, wie man den Druck auf die $(n+1)^{te}$ Stütze finden kann, wenn man den Druck auf jede der vorhergehenden Stützen kennt. Ist, wie vorausgesetzt, N die Anzahl der Stützen, so kann in der citirten Gleichung der Zeiger n von 1 bis $(N-2)$ variiren, diese Gränzen jedoch nicht überschreiten, weil bei einer aufmerksamen Betrachtung des bei der Untersuchung eingeschlagenen Weges, wo von einem Tragfelde auf das zunächst angränzende geschlossen wurde, hervorgeht, dass die betreffenden Schlussfolgerungen auf die beiden Endpuncte keine Anwendung finden. Wenn daher der Druck D_{n+1} auf die $(n+1)^{te}$ Stütze mittelst der Gleichung (438) ausgedrückt werden will, so muss diese Stütze zwischen der ersten und letzten (N^{ten}) liegen. Es können daher statt n die Werthe 1, 2, 3,.., bis $(N-2)$ gesetzt werden. Macht man diese Substitutionen,

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
D_2 &= \ldots\ldots\ldots = \tfrac{13}{4}\,Q - 6D_1,\\
D_3 &= \tfrac{49}{4}\,Q - 6(D_2+2D_1) \ldots = -\tfrac{29}{4}\,Q + 24D_1,\\
D_4 &= \tfrac{109}{4}Q - 6(D_3+2D_2+3D_1) \ldots = \tfrac{127}{4}\,Q - 90D_1,\\
D_5 &= \tfrac{193}{4}Q - 6(D_4+2D_3+3D_2+4D_1) = -\tfrac{455}{4}\,Q + 336D_1,\\
D_6 &= \tfrac{301}{4}Q - 6(D_5+2D_4+3D_3+\\
&\qquad +4D_2+5D_1) = \tfrac{1717}{4}\,Q - 1254D_1,
\end{aligned}\right\} \quad (439)$$

u. s. w., so dass allgemein

$$\left.\begin{aligned}
D_{n+1} &= \ldots\ldots\ldots = a_n Q + b_n D_1 \text{ *)}\\
D_{N-1} &= \ldots\ldots\ldots = a_{N-2}\,Q + b_{N-2}\,D_1
\end{aligned}\right\}$$

gesetzt werden kann, wenn a und b mit den betreffenden Zeigern die beziehungsweisen Coefficienten der Grössen Q und D_1 vorstellen, deren Bestimmung in jedem besonderen Falle keiner Schwierigkeit unterliegt.

Die Gleichungen (439) lehren den Druck auf irgend eine der Stützen zu finden, wenn jener auf die erste Stütze bekannt ist. Uebrigens ist bei der Symmetrie, welche bei dem Träger in Absicht auf Anordnung und Anspruchsnahme von beiden Enden gegen die Mitte zu stattfindet,

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= D_N,\\
D_2 &= D_{N-1},\\
D_3 &= D_{N-2},\\
&\ldots\ldots\\
&\text{allgemein}\\
D_n &= D_{N-n+1}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (440),$$

indem die Drücke auf je zwei gleich weit von beiden Enden abstehenden Stützen gleich sein müssen. Hieraus folgt, dass die Zahlenreihe, welche durch die Werthe D_1, D_2, D_3, .. D_{N-1}, und D_N entsteht, symmetrisch gebildet sein, und bei einer ungeraden Stützenzahl das Mittelglied $D_{\frac{N+1}{2}}$, bei einer geraden Stützenzahl aber die zwei Mittelglieder $D_{\frac{N}{2}}$ und $D_{\frac{N}{2}+1}$ enthalten muss, dass daher die Summe

---

*) Anmerkung. Die Statthaftigkeit dieser Form lässt sich allgemein mittelst der in ähnlichen Fällen üblichen Methode dadurch zeigen, dass die Giltigkeit dieser Form für die n ersten Werthe der Drücke vorausgesetzt, und sodann für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Werth nachgewiesen, endlich aber dieses Resultat zur Schlussfolgerung vom 2. auf den 3., vom 3. auf den 4., vom 4. auf den 5. etc., benützt wird.

aller Drücke sich im ersten Falle mit

$$\Sigma D_N = 2(D_1 + D_2 + \ldots + D_{\frac{N-1}{2}}) + D_{\frac{N+1}{2}} = 2\Sigma D_{\frac{N}{2}-1} + D_{\frac{N+1}{2}}$$

im zweiten Falle aber mit

$$\Sigma D_N = 2(D_1 + D_2 + \ldots + D_{\frac{N}{2}}) = 2\Sigma D_{\frac{N}{2}} \quad (441)$$

darstellen lässt. Diese Eigenschaft kann bei der Aufsuchung der einzelnen Drücke zweckmässig benützt werden, indem man dabei die Drücke auf alle jenseits der Mitte des Trägers gelegenen Stützen nicht besonders zu berechnen nöthig hat.

§. 209.

Besondere Relation zwischen den Drücken auf drei unmittelbar auf einander folgende Stützen. Wird in der Gleichung (438)

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1 + 12n^2)Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1)$$

$(n-1)$ statt n gesetzt, und von ihr der so entstehende Ausdruck

$$D_n = \tfrac{1}{4}[1 + 12(n-1)^2]Q - 6[D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1]$$

abgezogen, so ergibt sich als Differenz die Gleichung

$$(D_{n+1} - D_n) = 3(2n-1)Q - 6\Sigma D_n.$$

Wird in dieser die Verwechslung von $(n-1)$ mit n wiederholt, und ebenfalls von ihr der so erhaltene Ausdruck

$$(D_n - D_{n-1}) = 3(2n-3)Q - 6\Sigma D_{n-1}$$

abgezogen, so resultirt aus der Differenz die **einfache und merkwürdige Relation**

$$D_{n+1} + 4D_n + D_{n-1} = 6Q \quad \ldots \quad (442).$$

Diese lehrt, den Druck auf eine Stütze zu finden, wenn die Drücke auf die zunächst vorhergehenden, oder zunächst nachfolgenden oder auch zunächst angränzenden zwei Stützen bekannt sind. Dabei ist aber nicht zu vergessen, dass die beiden Endstützen nicht in Betracht kommen dürfen, wesshalb einerseits $(n-1) > 1$ und andererseits $(n+1) < N$, daher gleichzeitig $n > 2$ und $N > 4$ sein muss, woraus folgt, dass die Gleichung (442) erst dann zur Anwendung kommen kann, wenn der Träger auf mehr als 4 Stützen ruht. Sonst gilt aber jene Gleichung allgemein für je drei unmittelbar auf

einander folgende Stützen, für jede Querschnitts-Form und für jedes Materiale des prismatischen Trägers.

§. 210.

Bestimmung des Druckes D_1 auf die 1. Stütze A_1. Nach den Gleichungen (439) lassen sich die sämmtlichen Drücke als Functionen des Druckes auf die erste Stütze darstellen. Es ist daher wichtig, diesen Druck D_1 kennen zu lernen. Behufs seiner Bestimmung kann man mehrere Methoden anwenden. Die vorzüglichsten darunter sind folgende zwei:

I. **Methode.** Man stelle zunächst die einzelnen Werthe der Drücke D_2, D_3, D_4 etc. für die erste Hälfte des Trägers, einschliesslich der für ein ungerades N vorhandenen Mittelstütze, mit Hilfe der Gleichungen (439) dar. Hiernach erhält man aufeinanderfolgend

$$\begin{aligned}
D_2 &= \tfrac{13}{4} Q - 6 D_1, \\
D_3 &= -\tfrac{29}{4} Q + 24 D_1, \\
D_4 &= \tfrac{127}{4} Q - 90 D_1, \\
D_5 &= -\tfrac{455}{4} Q + 336 D_1, \\
D_6 &= \tfrac{1717}{4} Q - 1254 D_1, \\
D_7 &= -\tfrac{6389}{4} Q + 4680 D_1, \\
D_8 &= \tfrac{23863}{4} Q - 17466 D_1, \\
D_9 &= -\tfrac{89039}{4} Q + 65184 D_1, \\
D_{10} &= \tfrac{332317}{4} Q - 243270 D_1 \text{ etc},
\end{aligned}$$

wobei man einschliesslich bis zu dem vorhandenen Mittelgliede $D_{\frac{N+1}{2}}$, oder bis zu dem ersten vorhandenen Mittelgliede $D_{\frac{N}{2}}$ zu gehen hat, je nachdem N eine ungerade oder eine gerade Zahl bezeichnet. Wird die Fortsetzung der obigen Werthe nothwendig, so kann dieselbe mit Benützung der Gleichung (442) ganz einfach geschehen, denn es ist allgemein

$$D_{n\,1} = 6 Q - 4 D_n - D_{n\,1},$$

also z. B. für $n = 10$

$$D_{11} = 6 Q - 4 D_{10} - D_9 = -\tfrac{1240205}{4} Q + 907896 D_1,$$

u. s. w.

Hat die Aufstellnng der nöthigen Werthe stattgefunden, so entwickle man die Summe aller Drücke in Uebereinstimmung mit einer der Gleichungen (441), je nachdem N ungerade oder gerade

ist, und setze diese Summe der Gleichung (425) gemäss dem Werthe $(N-1)Q$ gleich. Aus der so entstehenden Gleichung bestimme man sofort die Unbekannte D_1.

Ist z B. $N=8$, so findet man

$$\begin{aligned} D_1 &= \ldots\ldots D_1, \\ D_2 &= \tfrac{13}{4}Q - 6D_1, \\ D_3 &= -\tfrac{29}{4}Q + 24D_1, \\ D_4 &= \tfrac{127}{4}Q - 90D_1, \end{aligned}$$

$$\Sigma D_8 = 2(D_1+D_2+D_3+D_4) = \tfrac{111}{2}Q - 142D_1 = (N-1)Q = 7Q,$$

und hieraus

$$D_1 = \tfrac{97}{284}Q.$$

Berechnet man auf diese Weise den Druck auf die erste Stütze für Träger, welche auf 2, 3, 4, etc. Stützen ruhen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \text{für } N=2, \ldots D_1 &= \tfrac{1}{2}Q \ldots = 0{\cdot}5000.Q, \\ \text{„ } N=3, \ldots D_1 &= \tfrac{5}{16}Q \ldots = 0\,3125.Q, \\ \text{„ } N=4, \ldots D_1 &= \tfrac{7}{20}Q \ldots = 0{\cdot}3500.Q, \\ \text{„ } N=5, \ldots D_1 &= \tfrac{19}{56}Q \ldots = 0{\cdot}3393.Q, \\ \text{„ } N=6, \ldots D_1 &= \tfrac{26}{76}Q \ldots = 0\,3421.Q, \\ \text{„ } N=7, \ldots D_1 &= \tfrac{71}{208}Q \ldots = 0\,3413.Q, \\ \text{„ } N=8, \ldots D_1 &= \tfrac{97}{284}Q \ldots = 0{\cdot}3415.Q, \\ \text{„ } N=9, \ldots D_1 &= \tfrac{265}{776}Q \ldots = 0{\cdot}3415.Q, \\ \text{„ } N=10, \ldots D_1 &= \tfrac{362}{1060}Q \ldots = 0{\cdot}3415.Q, \end{aligned}\right\} \quad (443).$$

u. s. w.

II. Methode. Man setze die ebenfalls nach den Gleichungen (439) entwickelten Werthe der Drücke auf irgend zwei symmetrisch gelegene Stützen einander gleich, und bestimme aus der so entstehenden Gleichung die Unbekannte D_1. Da die beiden Endstützen nicht in Betracht gezogen werden dürfen, so kann diese Methode nur angewendet werden, wenn ausser diesen Endstützen noch zwei andere symmetrisch gelegene vorhanden sind, also $N>3$ ist.

Hat man z. B. wieder $N=8$, so ist wegen der bemerkten Symmetrie ausser der nicht zu berücksichtigenden Relation $D_1=D_8$ noch $D_2=D_7$, $D_3=D_6$ und $D_4=D_5$, sonach mit Rücksicht auf die unter (439) gegebenen Werthe

$$\begin{aligned} \tfrac{13}{4}Q - 6D_1 &= -\tfrac{6389}{4}Q + 4680D_1, \\ -\tfrac{29}{4}Q + 24D_1 &= \tfrac{1717}{4}Q - 1254D_1 \text{ und} \\ \tfrac{127}{4}Q - 90D_1 &= -\tfrac{455}{4}Q + 336D_1. \end{aligned}$$

Aus jeder von diesen drei Gleichungen erhält man, wie vorhin, für den Druck auf die erste Stütze

$$D_1 = \frac{97}{284} Q.$$

Es versteht sich übrigens von selbst, dass zur Bestimmung von D_1 nur nothwendig ist, eine einzige Gleichung aufzustellen und aufzulösen.

Sucht man nach dieser Methode den Druck D_1 für Träger, welche auf mehr als drei Stützen ruhen, so findet man ebenfalls die Resultate (443).

§. 211.

Bestimmung der Drücke auf die übrigen Stützen. Hat man den Druck D_1 auf die erste Stütze gefunden, so können auch die übrigen Drücke nach den Gleichungen (439) bestimmt werden. Dabei wird man von der Gleichung (442) eine zweckmässige Anwendung machen, wenn $n > 2$ geworden ist, indem man den Druck auf eine Stütze aus den bekannten Drücken auf die beiden vorhergehenden Stützen ableitet. Es ist übrigens nicht nothwendig, diese Entwicklung der Werthe für die Drücke auf alle Stützen auszudehnen, indem die Drücke auf die symmetrisch gelegenen Stützen einander gleich sind. Ist z. B. der Träger auf acht Stützen gelagert, so hat man wegen $N = 8$

nach §. 210 . . .	$D_1 = \ldots = \frac{97}{284} Q$	$= 0{\cdot}3415 \,.\, Q,$
nach den Gleichungen (439)	$D_2 = \frac{13}{4} Q - 6 D_1$	$= \frac{341}{284} Q = 1{\cdot}2007 \,.\, Q,$
	$D_3 = -\frac{29}{4} Q + 24 D_1$	$= \frac{269}{284} Q = 0{\cdot}9472 \,.\, Q,$
nach d. Gleich. (442)	$D_4 = 6Q - 4D_3 - D_2$	$= \frac{287}{284} Q = 1{\cdot}0106 \,.\, Q,$
nach den Gleichungen (440)	$D_5 = D_4 \ldots$	$= \frac{287}{284} Q = 1{\cdot}0106 \,.\, Q,$
	$D_6 = D_3 \ldots$	$= \frac{269}{284} Q = 0{\cdot}9472 \,.\, Q,$
	$D_7 = D_2 \ldots$	$= \frac{341}{294} Q = 1{\cdot}2007 \,.\, Q,$
	$D_8 = D_1 \ldots$	$= \frac{97}{384} Q = 0{\cdot}3415 \,.\, Q,$

also übereinstimmend

mit der Gleichung (425) . . . . $\Sigma D_8 = 7Q.$

Bestimmt man dergestalt die Drücke auf die Stützen für Träger, welche auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stellt man die betreffenden Coefficienten von Q zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$	$\frac{D_{10}}{Q}$
2	$\frac{1}{2}$ 0·5000	$\frac{1}{2}$ 0·5000	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{5}{16}$ 0·3125	$\frac{22}{16}$ 1·3750	$\frac{5}{16}$ 0·3125	—	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{7}{20}$ 0·3500	$\frac{23}{20}$ 1·1500	$\frac{23}{20}$ 1·1500	$\frac{7}{20}$ 0·3500	—	—	—	—	—	—
5	$\frac{19}{56}$ 0·3393	$\frac{68}{56}$ 1·2143	$\frac{50}{56}$ 0·8928	$\frac{68}{56}$ 1·2143	$\frac{19}{56}$ 0·3393	—	—	—	—	—
6	$\frac{26}{76}$ 0·3421	$\frac{91}{76}$ 1·1974	$\frac{73}{76}$ 0·9605	$\frac{73}{76}$ 0·9605	$\frac{91}{76}$ 1·1974	$\frac{26}{76}$ 0·3421	—	—	—	—
7	$\frac{71}{208}$ 0·3413	$\frac{250}{208}$ 1·2019	$\frac{196}{208}$ 0·9423	$\frac{214}{208}$ 1·0290	$\frac{196}{208}$ 0·9423	$\frac{250}{208}$ 1·2019	$\frac{71}{208}$ 0·3413	—	—	—
8	$\frac{97}{284}$ 0·3415	$\frac{341}{284}$ 1·2007	$\frac{269}{284}$ 0·9472	$\frac{287}{284}$ 1·0106	$\frac{287}{284}$ 1·0106	$\frac{269}{284}$ 0·9472	$\frac{341}{284}$ 1·2007	$\frac{97}{284}$ 0·3415	—	—
9	$\frac{265}{776}$ 0.3415	$\frac{932}{776}$ 1·2010	$\frac{734}{776}$ 0·9459	$\frac{788}{776}$ 1·0155	$\frac{770}{776}$ 0·9922	$\frac{788}{776}$ 1·0155	$\frac{734}{776}$ 0·9459	$\frac{932}{776}$ 1·2010	$\frac{265}{776}$ 0·3415	—
10	$\frac{362}{1060}$ 0·3415	$\frac{1273}{1060}$ 1·2009	$\frac{1003}{1060}$ 0·9462	$\frac{1075}{1060}$ 1·0142	$\frac{1057}{1060}$ 0·9972	$\frac{1057}{1060}$ 0·9972	$\frac{1075}{1060}$ 1·0142	$\frac{1003}{1060}$ 0·9462	$\frac{1273}{1060}$ 1·2009	$\frac{362}{1060}$ 0·3415

Der Gebrauch dieser Tabelle ist klar. Ruht z. B. der Träger auf fünf gleichweit von einander abstehenden Stützen, und ist jedes Tragfeld in der Mitte mit dem Gewichte von 56 Zentnern belastet, so wird unter Vernachlässigung des eigenen Gewichtes des Trägers nach der vorstehenden Tabelle wegen $N = 5$ und $Q = 56$

der Druck auf die 1. Stütze $D_1 = \frac{19}{56} Q = 19$ Ztr.

„ „ „ „ 2. „ $D_2 = \frac{68}{56} Q = 68$ „

„ „ „ „ 3. „ $D_3 = \frac{50}{56} Q = 50$ „

„ „ „ „ 4. „ $D_4 = \frac{68}{56} Q = 68$ „

und „ „ „ „ 5. „ $D_5 = \frac{19}{56} Q = 19$ „

daher in Uebereinstimmung mit der

Gleichung (425) . . . . . $\Sigma D_5 = 4\,Q = 224$ Ztr.

Auf eine zweckmässige Weise kann man sich die Drücke auf die Stützen mittelst Fig. 265 (Seite 372) anschaulich machen. Es sind nämlich daselbst die auf 2, 3, 4,... Stützen ruhenden Träger verzeichnet, und oberhalb einer jeden Stütze ist der Druck geschrieben, den dieselbe zu erleiden hat.

Eine andere graphische Versinnlichung kann dadurch bewerkstelligt werden, dass man die Drücke auf die Stützen als nach aufwärts wirkende Kräfte ansieht, und diese mittelst geraden Linien darstellt, deren Längen der Intensität jener Kräfte proportional sind.

§. 212.

Besondere Eigenschaften der Drücke.

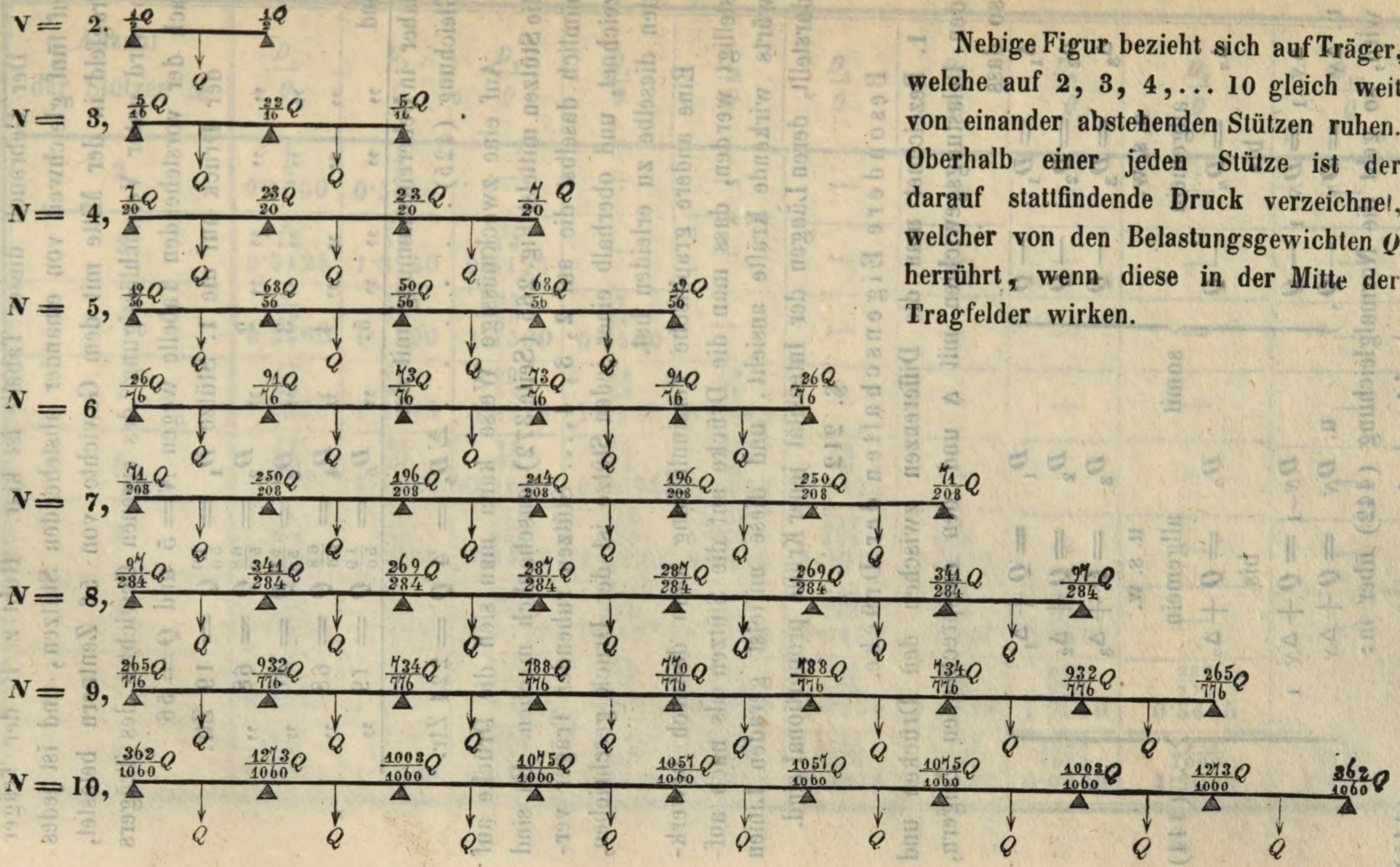
1. Bezeichnet man die Differenzen zwischen den Drücken und den Belastungsgewichten mit Δ und den entsprechenden Zeigern, so dass

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = D_1 - Q \\ \Delta_2 = D_2 - Q \\ \Delta_3 = D_3 - Q \\ \text{u. s. w.} \\ \text{allgemein} \\ \Delta_n = D_n - Q \\ \text{bis} \\ \Delta_{N-1} = D_{N-1} - Q \\ \text{u. } \Delta_N = D_N - Q, \end{array}\right\} \text{somit} \left\{\begin{array}{l} D_1 = Q + \Delta_1 \\ D_2 = Q + \Delta_2 \\ D_3 = Q + \Delta_3 \\ \text{u. s. w.} \\ \text{allgemein} \\ D_n = Q + \Delta_n \\ \text{bis} \\ D_{N-1} = Q + \Delta_{N-1} \\ \text{u. } D_N = Q + \Delta_N \end{array}\right\} . \quad (444)$$

wird, so geht die Normalgleichung (442) über in:

$$\Delta_{n+1} + 4\Delta_n + \Delta_{n-1} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (445)$$

Fig. 265.



Nebige Figur bezieht sich auf Träger, welche auf 2, 3, 4, ... 10 gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhen. Oberhalb einer jeden Stütze ist der darauf stattfindende Druck verzeichnet, welcher von den Belastungsgewichten Q herrührt, wenn diese in der Mitte der Tragfelder wirken.

Da diese Gleichung nur existiren kann, wenn ihre Glieder theils positiv, theils negativ sind, so folgt, dass die Drücke auf 3 unmittelbar auf einander folgende Stützen nicht alle zugleich grösser oder kleiner als Q sein können. Es muss daher gleichzeitig sein:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{entweder} & D_{n+1} > Q, \; D_n > Q \text{ und } & D_{n-1} < Q, \\
\text{oder} & D_{n+1} > Q, \; D_n < Q \;\; „ & D_{n-1} > Q, \\
\text{oder} & D_{n+1} > Q, \; D_n < Q \;\; „ & D_{n-1} < Q, \\
\text{oder} & D_{n+1} < Q, \; D_n > Q \;\; „ & D_{n-1} > Q, \\
\text{oder} & D_{n+1} < Q, \; D_n > Q \;\; „ & D_{n-1} < Q, \\
\text{oder} & D_{n+1} < Q, \; D_n < Q \;\; „ & D_{n-1} > Q.
\end{array}\right\} \quad . \quad (446).$$

2. Es ist klar, dass diejenigen Differenzen, welche zu gleich weit von beiden Enden abstehenden Stützen gehören, gleiche Werthe besitzen, dass also die Zahlenreihe der auf einander folgenden Differenzen Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc., bis Δ_{N-1} und Δ_N eine symmetrische Bildung hat.

Ist N eine ungerade Zahl, so hat diese Reihe das Mittelglied $\Delta_{\frac{N+1}{2}}$, und die beiden angränzenden Glieder sind einander gleich. In diesem Falle hat man

$$\Delta_{\frac{N+3}{2}} = \Delta_{\frac{N-1}{2}}.$$

Da nun zufolge der Relation (445) bezüglich der genannten drei Glieder

$$\Delta_{\frac{N+3}{2}} + 4\,\Delta_{\frac{N+1}{2}} + \Delta_{\frac{N-1}{2}} = 0$$

zu setzen ist, so erhält man

$$\frac{\Delta_{\frac{N+1}{2}}}{\Delta_{\frac{N-1}{2}}} = -\tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (447).$$

Ist hingegen N eine gerade Zahl, so hat die fragliche Reihe die zwei gleichen Mittelglieder $\Delta_{\frac{N}{2}}$ und $\Delta_{\frac{N}{2}+1}$, und es folgt

$$\frac{\Delta_{\frac{N}{2}+1}}{\Delta_{\frac{N}{2}}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (448).$$

3. Lenkt man die Aufmerksamkeit auf den allgemeinen Quotienten $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$, und benützt hierzu die Gleichung (445), so hat man

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_{n+1}}{-\frac{1}{4}\Delta_{n+1} - \Delta_{n+2}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}},$$

und wenn $(n+1)$ statt n geschrieben wird,

$$\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+3}}{\Delta_{n+2}}},$$

folglich durch die Wiederholung dieses Verfahrens

$$\frac{\Delta_{n+3}}{\Delta_{n+2}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+4}}{\Delta_{n+3}}}$$

$$\frac{\Delta_{n+4}}{\Delta_{n+3}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+5}}{\Delta_{n+4}}}$$

etc.

daher allgemein

$$\frac{\Delta_{n+p}}{\Delta_{n+p-1}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}}},$$

wo p jede solche ganze positive Zahl bedeuten kann, bei welcher die Endstütze ausser Betracht bleibt, und demgemäss der Bedingung $(n+p+1) < N$ entsprochen wird.

Werden die so gefundenen Werthe aufeinanderfolgend zurücksubstituirt, so nimmt der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ die Form

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} - \frac{1}{4} + \frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}},$$

also jene eines Kettenbruches an, welcher $(p+1)$ Glieder enthält. Derselbe kann daher mit mehr oder weniger Gliedern ausgedrückt werden, je nachdem man p wählt.

Liegt das Stützenpaar, auf welche sich der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ bezieht, in der ersten Hälfte des Trägers, und will man mit der

Gliederzahl im Kettenbruche so weit gehen, bis das letzte Glied $\frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}}$ mit einem der Werthe (447) und (448) übereinstimmt, so erhält man für ein ungerades N den $\left(\frac{N+1}{2} - n\right)$ gliedrigen Kettenbruch

$$\left.\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} - \frac{1}{4} + 1\right\} \quad \ldots \quad (449)$$

für ein gerades N aber den $\left(\frac{N}{2} + 1 - n\right)$ gliedrigen

$$\left.\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\} \quad \ldots \quad (450).$$

Den Relationen (449) und (450) gemäss ist bezüglich der ersten Hälfte des Trägers der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ stets negativ, und numerisch betrachtet kleiner, als die Einheit. In der Reihe Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. haben daher je zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder verschiedene Zeichen, und jedes Glied ist, numerisch betrachtet, kleiner als das zunächst vorhergehende, somit die Reihe selbst eine fallende mit Zeichenwechsel.

Hieraus folgt, dass die Drücke auf die Stützen D_1, D_2 D_3,... gegen die Mitte des Trägers regelmässig abwechselnd bald grösser bald kleiner als Q sind, und von diesem Werthe desto weniger differiren, je mehr man sich bei einer solchen Vergleichung jener Mitte nähert.

4. Stellt man sich vor, dass die Zahl der Stützen N fortwährend zunimmt, so wird für jeden Werth von n der Kettenbruch $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ ohne Ende fortlaufen, und sein Werth sich desto mehr der Gränze

$$lim.\left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.}$$

nähern, je grösser N genommen wird. Für diesen Gränzwerth, er werde mit q bezeichnet, hat man

$$q = lim. \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right) = (-2+\sqrt{3}) = -0{\cdot}267949\ ^*) \quad (451).$$

Der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ nähert sich daher desto mehr dem constanten Werthe q, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Ueberdiess hat man bei der Allgemeinheit des Zeigers n noch

$$q = lim. \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = lim. \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_3}\right) = lim. \left(\frac{\Delta_5}{\Delta_4}\right) = \text{etc.},$$

somit

$$lim. \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q,\ lim. \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_2}\right) = q^2,\ lim. \left(\frac{\Delta_5}{\Delta_2}\right) = q^3,\ \text{etc.},$$

woraus folgt

$$lim.\,\Delta_2 : lim.\,\Delta_3 : lim.\,\Delta_4 : lim\ \Delta_5 : \ldots = 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots$$

Es ist aber numerisch genommen

$$1 < q < q^2 < q^3 < \ldots,$$

also auch

$$lim.\,\Delta_2 < lim.\,\Delta_3 < lim.\,\Delta_4 < lim.\,\Delta_5 < \ldots$$

Dieser Betrachtung gemäss muss die Reihe der auf einander folgenden Gränzwerthe von Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, ... eine geometrische von dem Exponenten $q = (-2+\sqrt{3})$, sonach eine fallende mit Zeichenwechsel sein. Die Glieder derselben werden, numerisch genommen, immer kleiner und nähern sich desto mehr der Nulle, je weiter die bezügliche Stütze vom Ende des Trägers entfernt liegt.

Hieraus schliesst man, dass die Intensität des Druckes auf eine Stütze desto mehr dem Belastungsgewichte Q gleichkommt, je näher jene Stütze der Mitte des Trägers liegt, und je grösser die Gesammtzahl der Stützen N ist.

---

*) Es ist nämlich $q = \left.\begin{matrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{4+q}$,

also auch $q^2 + 4q + 1 = o$, und hieraus $q = (-2+\sqrt{3}) = -0{\cdot}267949$.

Mit dem fortschreitenden Wachsen von N nähern sich auch die Werthe der Drücke D_1, D_2, D_3,... gewissen Gränzen. Um zuerst den Gränzwerth von D_1, nämlich *lim.* D_1 zu finden, beachte man, dass nach den Gleichungen (439)

$$D_2 = \tfrac{13}{4} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } D_3 = -\tfrac{29}{4} Q + 24 D_1,$$

ferner nach den Gleichungen (444)

$$\Delta_2 = D_2 - Q = \tfrac{9}{4} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } \Delta_3 = D_3 - Q = \frac{+33}{4} Q + 24 D_1.$$

somit

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-11 Q + 32 D_1}{3 Q - 8 D_1},$$

und endlich

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{-11 Q + 32\, lim.\, D_1}{3 Q - 8\, lim.\, D_1}$$

resultirt.

Uebereinstimmend mit der Gleichung (451) ist ferner

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q = (-2+\sqrt{3}).$$

Werden die beiden für $lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)$ gefundenen Werthe einander gleich gesetzt, und sodann die erscheinende Unbekannte *lim.* D_1 bestimmt, so erhält man

$$lim.\, D_1 = \tfrac{1}{8}\left(\frac{11+3q}{4+q}\right) Q = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right) Q = 0{\cdot}341506\,.\,Q \quad (452).$$

Der Druck D_1 auf die 1. Stütze nähert sich daher desto mehr dem Werthe $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right) Q = 0{\cdot}341506\,.\,Q$, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Da den Gleichungen (439) gemäss die übrigen Drücke D_2, D_3, D_4 etc, von dem ersten Drucke D_1 abhängig sind, so findet man leicht auch die Gränzwerthe für diese übrigen Drücke. nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
lim.\, D_2 &= 1\,200962\,.\,Q \\
lim.\, D_3 &= 0.946153\,.\,Q \\
lim.\, D_4 &= 1{\cdot}014428\,.\,Q \\
lim.\, D_5 &= 0{\cdot}996134\,.\,Q \\
lim.\, D_6 &= 1.001036\,.\,Q \\
lim.\, D_7 &= 0{\cdot}999723\,.\,Q \\
lim.\, D_8 &= 1{\cdot}000074\,.\,Q \\
lim.\, D_9 &= 0{\cdot}999980\,.\,Q \\
lim.\, D_{10} &= 1{\cdot}000050\,.\,Q \\
lim.\, D_{11} &= 0{\cdot}999999\,.\,Q
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (453).$$

Sämmtliche Eigenschaften findet man bei der Betrachtung der im §. 211 gegebenen Tabelle in der That vorhanden.

Biegung.

§. 213.

Form der Biegungscurve. Dieselbe ist aus den Gleichungen (428) und (433) zu beurtheilen, welche nunmehr bestimmt erscheinen, weil die darin anfänglich unbekannten Werthe von $tg\,\varphi_n$ und von den Drücken mit Rücksicht auf die Gleichung (435) und den §. 211 bereits bekannt sind. Insbesondere wird der Werth von $tg\,\varphi_n$ die Curvenform anschaulich machen, weil er die Richtung der Tangente an jedem Stützpuncte angibt. Um diese tangentielle Richtung näher zu untersuchen, bemerke man, dass zunächst aus der Gleichung (434)

$$\frac{4\,mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(2n-1)^2 Q - 2\,[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)\,D_1].$$

folgt. Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern

$$D_n + 3\,D_{n-1} + 5\,D_{n-2} + \ldots + (2\,n-1)\,D_1 =$$

$$= [D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1] +$$

$$+ [D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + 3\,D_{n-3} + \ldots + (n-1)\,D_1],$$

und nach der Gleichung (438)

$$D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1 =$$

$$= \tfrac{1}{24}(1 + 12\,n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,D_{n+1};$$

daher, wenn man $(n-1)$ mit n verwechselt,

$$D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{24}(13 - 24n + 12n^2)Q - \tfrac{1}{6}D_n,$$

wonach man findet:

$$D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1 =$$
$$= \left(\frac{7 - 12n + 12n^2}{12}\right)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n-1} + D_n).$$

Benützt man dieses Resultat, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = -\tfrac{2}{3}Q + \tfrac{1}{3}(D_n + D_{n+1}),$$

oder, da nach den Relationen (444)

$$D_n = Q + \Delta_n \text{ und } D_{n+1} = Q + \Delta_{n+1}$$

zu setzen ist, auch in:

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{3}(\Delta_n + \Delta_{n+1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (454).$$

Um noch eine zweite Beziehung zwischen $tg\,\varphi_{n+1}$ und $tg\,\varphi_n$ zu erhalten, addire man die Gleichungen (435) und (436). Hiernach wird

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) =$$
$$= \tfrac{1}{3}(2n-1)Q - \tfrac{2}{3}(D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + \ldots + D_1).$$

Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern, nämlich ΣD_n, dem §. 209 gemäss

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n+1} - D_n),$$

somit findet man mit Benützung dieses Werthes

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{9}(D_{n+1} - D_n) = \tfrac{1}{9}(\Delta_{n+1} - \Delta_n) \quad . \quad (455).$$

Die Combinirung der Gleichungen (454) und (455) ergibt nunmehr ganz einfach

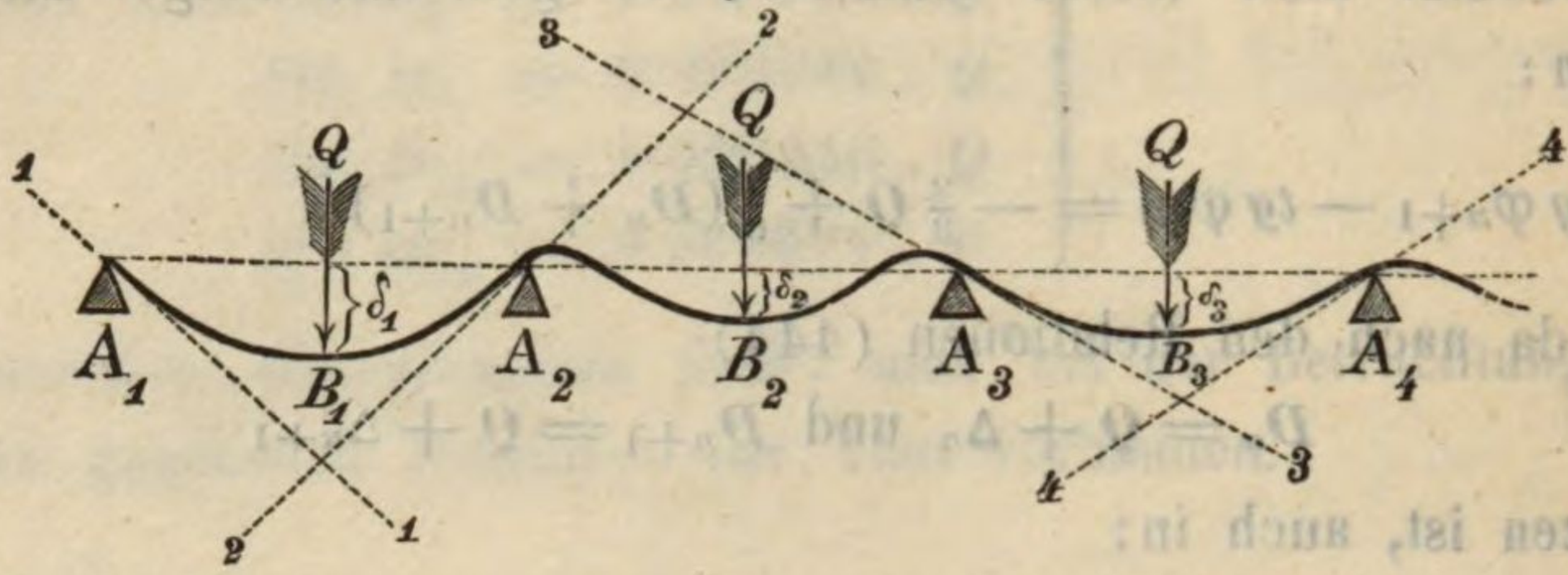
$$tg\,\varphi_n = -(2\Delta_n + \Delta_{n+1})\frac{l^2}{36mt} = -\Delta_n\left(2 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)\frac{l^2}{36mt} \quad . \quad (456).$$

Aus diesem Resultate schliesst man bezüglich der ersten Hälfte der Träger Folgendes:

1. Da nach dem §. 212 $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ negativ und numerisch kleiner als die Einheit ist, so wird $tg\,\varphi_n$ positiv oder negativ, d. h. der Winkel φ_n spitz oder stumpf, je nachdem Δ_n negativ oder positiv ist.

Indem nun nach dem §. 212 Δ_n für $n = 1, 3, 5$ etc. negativ, für $n = 2, 4, 6$ etc. aber positiv wird, so schliesst die Tangente der Biegungscurve mit dem Horizonte an jeder ungerade numerirten Stütze einen spitzen, an jeder gerade numerirten aber einen stumpfen Winkel ein, in so lange die Mitte des ganzen Trägers nicht erreicht wird. Siehe die Fig. 266.

Fig. 266.



2. Da die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} desto kleiner sind, je grösser n ist, so werden die Tangenten bei den Stützen desto mehr horizontal, und das Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} befindet sich desto mehr in dem Falle V (Fig. 259), je weiter diese Stützen von dem Trägerende entfernt liegen. Genau horizontal kann übrigens keine dieser Tangenten gehen, den Fall ausgenommen, wenn N eine ungerade Zahl ist, wo sodann eine Tangente, nämlich die an die Mittelstütze $A_{\frac{N+1}{2}}$ horizontal wird. Denn es ist allgmein nach der Gleichung (456)

$$tg\,\varphi_n = (-2\Delta_n - \Delta_{n+1})\frac{l^2}{36\,m\,t},$$

somit wegen der Gleichung (445)

$$-\Delta_{n+1} = 4\Delta_n + \Delta_{n-1},$$

auch

$$tg\,\varphi_n = (2\Delta_n + \Delta_{n-1})\frac{l^2}{36\,m\,t} = \Delta_{n-1}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)\frac{l^2}{18\,m\,t}.$$

Bei einem ungeraden N ist für die Mittelstütze insbesondere $n = \frac{N+1}{2}$, daher

$$tg\,\varphi_{\frac{N+1}{2}} = \Delta_{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{\Delta_{\frac{N+2}{2}}}{\Delta_{\frac{N-1}{2}}} + \tfrac{1}{2}\right)\frac{l^2}{18\,m\,t}$$

folglich wegen der Relation (447)

$$tg\,\varphi_{\frac{N+1}{2}} = o.$$

Das Vorhandensein dieser Eigenschaft ist übrigens aus Anlass der symmetrischen Bildung der ganzen Biegungscurve einleuchtend.

3. Die grösste Neigung der Tangenten findet dem Gesagten zufolge bei der 1. Stütze statt, und ihre Grösse ergibt sich aus der Gleichung

$$tg\,\varphi_1 = (8\,D_1 - Q)\,\frac{l^2}{48\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (457),$$

welche nämlich für $n = 1$ aus der Relation (445) abgeleitet wird. [Die Gleichung (456) ist zu diesem Zwecke nicht benützbar.] Hiernach findet man insbesondere für verschiedene N, wenn man unter Einem die entsprechenden Werthe für D_1 nach dem §. 210 und nach Gleichung (452) substituirt, und zwar für

$$\left.\begin{aligned}
N = 2 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = 3 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 3{\cdot}0000 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 3 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}5000 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 4 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{9}{5} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}8000 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 5 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{12}{7} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7143 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 6 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{33}{19} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7368 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 7 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{45}{26} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7308 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 8 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{128}{71} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7324 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 9 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{168}{97} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7320 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 10 \ldots\ & tg\,\varphi_1 = \tfrac{459}{265} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7321 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N = \infty,\ & lim.\,tg\,\varphi_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7321 \cdot \frac{Q\,l^2}{48\,m\,t}
\end{aligned}\right\} \quad (458).$$

Der für $N = 2$ gefundene Werth stimmt mit der Gleichung (73) überein, wenn man dabei den Werth für δ nach der Gleichung (72) berücksichtigt. Auch ist merkwürdig, dass unter sonst gleichen Umständen die kleinste Neigung der Tangente in A_1 für $N = 3$ Stützen stattfindet.

§. 214.

Biegung in der Mitte der Tragfelder (δ_n). Der Werth von δ_n folgt aus der Gleichung (430)

$$m\,t\,\delta_n = \tfrac{1}{2}\,m\,t\,tg\,\varphi_n\,l +$$

$$+\frac{l^3}{48}\left[(n-1)\,(3n-2)\,Q - D_n - 7\,D_{n-1} - 13\,D_{n-2} - (6n-5)\,D_1\right].$$

Es ist aber

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6n-5)\,D_1 =$$
$$= \left[D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + \ldots + D_1\right] +$$
$$+ 6\left[D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1\right],$$

und da nach dem vorigen §.

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\,Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n),\ \text{so wie}$$

$$D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1 = \tfrac{1}{8}(3 - 8n + 4n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\Delta_n$$

gesetzt werden kann, auch

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6n-5)\,D_1 =$$
$$= \left(\frac{7 - 20n + 12n^2}{4}\right)Q - \left(\frac{\Delta_{n+1} + 5\,\Delta_n}{6}\right).$$

Substituirt man diesen Werth, so wie jenen aus der Gleichung (456) für $tg\,\varphi_n$ in die obige Relation für δ_n, so reducirt sich dieselbe auf:

$$\delta_n = \left[Q - 2\,(\Delta_n + \Delta_{n+1})\right]\frac{l^3}{192\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad (459).$$

Aus dieser Gleichung kann, wenn bei der Betrachtung die Mitte des Trägers nicht überschritten wird, Folgendes geschlossen werden:

1. Da der Werth von $\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_n\left(1 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)$ mit Δ_n positiv und negativ wird, und das erstere für die gerade numerirten, das letztere aber für die ungerade numerirten Stützen eintritt, so leuchtet ein, dass die Biegung im 1., 3., 5. etc. Tragfelde grösser, im 2., 4., 6. etc. Tragfelde aber kleiner als $\frac{Q\,l^3}{192\,m\,t}$ ist.

2. Von diesem Werthe $\frac{Q\,l^3}{192\,m\,t}$ werden sich die Biegungen desto weniger entfernen, je weiter die betreffenden Tragfelder von den Enden des Trägers entfernt liegen.

Man hat nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 > \delta_3 > \delta_5 > \text{etc. und alle} > \dfrac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \\ \text{ferner} \\ \delta_2 > \delta_4 > \delta_6 > \text{etc. und alle} < \dfrac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \\ \text{endlich} \\ \delta_1 > \delta_2 < \delta_3 > \delta_4 < \delta_5 > \delta_6 < \text{etc.} \ldots . \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (460).$$

Dieses Verhalten findet man auch aus der Fig. (266) erklärlich.

3. Würden die Zahlen N und n ohne Ende wachsen, daher Δ_n und Δ_{n+1} nach dem §. 212 ohne Ende abnehmen, so wäre der Gränzwerth, welchem sich δ_n fortwährend nähert

$$\delta_\infty = \frac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (461),$$

also eben so gross, wie der Werth in der Formel (408) für den im §. 203 mit V bezeichneten Fall. In der That muss dieses Resultat zum Vorschein kommen, weil nach Inhalt des vorhergehenden §. bei dem unendlichen Wachsen von N und n das Tragfeld in einem Zustande anzunehmen ist, welcher sich jenem des Falles V ohne Ende nähert.

4. Nach Punct 2 befindet sich von allen Biegungen, die in der Mitte der Tragfelder stattfinden, die grösste in dem ersten und selbstverständlich auch in dem letzten Tragfelde. Diese besondere Biegung erhält man für $n = 1$ aus der Gleichung (430), da zu diesem Behufe die Gleichung (459) nicht benützbar ist. Hiernach hat man

$$m\,t\,\delta_1 = \tfrac{1}{2}\,m\,t\;tg\,\varphi_1\,l - \tfrac{1}{48}\,D_1\,l^3,$$

daher wegen der Relation (457),

$$\delta_1 = (6\,D_1 - Q)\,\frac{l^3}{96\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (462).$$

Insbesondere wird für verschiedene N, wenn man die entsprechenden Werthe von D_1 nach §. 210 und nach der Gleichung (452) substituirt, nämlich für

$$\left.\begin{array}{lll}
N = 2 \ldots & \delta_1 = & 2 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 2{\cdot}0000 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 3 \ldots & \delta_1 = & \frac{7}{8} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 0{\cdot}8750 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 4 \ldots & \delta_1 = & \frac{11}{10} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}1000 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 5 \ldots & \delta_1 = & \frac{29}{28} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0357 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 6 \ldots & \delta_1 = & \frac{40}{38} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0526 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 7 \ldots & \delta_1 = & \frac{109}{104} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0481 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 8 \ldots & \delta_1 = & \frac{149}{142} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0493 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 9 \ldots & \delta_1 = & \frac{407}{388} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0489 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = 10 \ldots & \delta_1 = & \frac{556}{530} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0491 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N = \infty, lim. & \delta_1 = & \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right) \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1{\cdot}0490 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t}
\end{array}\right\} (463).$$

Das Resultat für $N = 2$ stimmt mit der Formel (72), und für $N = 3$ mit der Formel $\delta = \frac{7}{768} \cdot \frac{Q l^3}{m t}$ im § 178 überein, wie man diess auch in der That erwarten musste, zumal im letzten Falle das Tragfeld in demselben Zustande sich befindet, wie wenn es bei der zweiten Stütze festgehalten und auf der ersten Stütze aufliegen würde. Dass von allen Biegungen im ersten Tragfelde unter sonst gleichen Umständen die kleinste für $N = 3$ Stützen vorhanden ist, steht im Zusammenhange mit der am Schlusse des vorigen §. bemerkten Eigenschaft.

§. 215.

Statische Kraftmomente. Der Werth des statischen Kraftmomentes in Bezug auf irgend eine Stelle in einem beliebigen (n^{ten}) Tragfelde, ist entweder aus der Gleichung (426) oder (431) zu bestimmen, je nachdem die betreffende Stelle in der ersten oder zweiten Hälfte des gewählten Tragfeldes liegt. Berücksichtigt man, dass nach Inhalt des vorigen §.

$$D_{n-1} + 2 D_{n-2} + \ldots + (n-1) D_1 = \tfrac{1}{8}(3 - 8n + 4n^2) Q - \tfrac{1}{6}\Delta_n,$$

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1) Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n), \text{ und}$$

$$\Sigma D_{n-1} = \tfrac{1}{2}(2n-3) Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_n - \Delta_{n-1})$$

gesetzt werden kann, so verwandeln sich die vorcitirten Gleichungen in folgende:

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = (\tfrac{1}{4}Q + \tfrac{1}{8}\Delta_n)\frac{l}{2} - \left(Q + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{3}\right)\frac{x}{2} \quad . \quad . \quad (464)$$

und

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -(\tfrac{1}{4}Q - \tfrac{1}{3}\Delta_n)\frac{l}{2} + \left(Q - \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{3}\right)\frac{x}{2} \quad . \quad . \quad (465).$$

Diese Kraftmomente sind mit x variabel. Da Behufs der Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente in Betracht kommen, und diese Werthe nach den Erörterungen im §. 127 nur an solchen Stellen vorhanden sein können, wo der Träger aufliegt, oder wo die Belastungsgewichte wirken, so müssen diese besonderen Stellen näher untersucht werden. Heisst man daher bezüglich des n^{ten} Tragfeldes das statische Kraftmoment an der Auflagestelle A_n allgemein $St.\,(A_n)$, und jenes an dem Mittelpuncte B_n allgemein $St.\,(B_n)$, so erhält man diese beiden Werthe aus der Gleichung (464) für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$, wie folgt:

$$St.\,(A_n) = (Q + \tfrac{4}{3}\Delta_n)\frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (466)$$

und $$St.\,(B_n) = -\left[Q - \tfrac{2}{3}(\Delta_n + \Delta_{n+1})\right]\frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (467).$$

Ueber diese Gleichungen ist zu bemerken:

1. Wie schon im §. 208 angeführt wurde, dürfen im Allgemeinen die erste und letzte Stütze nicht in Betracht kommen. Es ist daher die Anwendung der beiden Gleichungen (466) und (467)) an dieselbe Bedingung geknüpft, wornach einerseits $n > 1$, andererseits aber $(n+1) < N$ sein muss. Uebrigens sind die Werthe der statischen Kraftmomente für $n = 1$, nämlich für das erste Tragfeld leicht zu bestimmen; denn es ist offenbar das statische Kraftmoment in A_1

$$St.\,(A_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (468)$$

jenes in B_1 aber

$$St.\,(B_1) = -D_1\frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (469).$$

2. Um die statischen Kraftmomente für den Anfang und die Mitte eines jeden Tragfeldes zu bestimmen, sind in den Formeln (466) und

(467) zunächst die entsprechenden Werthe von n zu substituiren. Man gelangt dabei auf die Differenzen Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc., welche im Sinne der Gleichungen (444) durch die Drücke D_2, D_3, D_4 etc., und diese wieder nach den Gleichungen (439) in bestimmter Weise darzustellen sind. Hiernach findet man

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{für } n=2\ldots. & St.(A_2)= & \left(\quad Q-\quad 2D_1\right)\frac{l}{2} \\
 & St.(B_2)=-\left(\quad \tfrac{5}{4}Q-\quad 3D_1\right)\frac{l}{2} \\
\text{für } n=3\ldots. & St.(A_3)= & \left(-\tfrac{5}{2}Q+\quad 8D_1\right)\frac{l}{2} \\
 & St.(B_3)=-\left(-\tfrac{7}{2}Q+\quad 11D_1\right)\frac{l}{2} \\
\text{für } n=4\ldots. & St.(A_4)= & \left(\quad \tfrac{21}{2}Q-\quad 30D_1\right)\frac{l}{2} \\
 & St.(B_4)=-\left(\quad \tfrac{57}{4}Q-\quad 41D_1\right)\frac{l}{2} \\
\text{für } n=5\ldots. & St.(A_5)= & \left(-38Q+112D_1\right)\frac{l}{2} \\
 & St.(B_5)=-\left(-52Q+153D_1\right)\frac{l}{2} \\
\text{für } n=6\ldots. & St.(A_6)= & \left(\quad 143Q-418D_1\right)\frac{l}{2} \\
 & St.(B_6)=-\left(\quad \tfrac{781}{4}Q-571D_1\right)\frac{l}{2}
\end{array}\right\}(470),$$

u. s. w.,

wobei übrigens einleuchtet, dass für symmetrisch gelegene Stellen die bezüglichen Werthe einander gleich sein werden.

Für einen besonderen Fall erübrigt jetzt nur mehr, statt D_1 den entsprechenden Werth nach der Gesammtstützenzahl N mit Rücksicht auf den §. 210 zu substituiren. Wäre z. B. der Träger auf fünf Stützen gelagert, so hätte man wegen $N=5$ nach §. 210 $D_1=\frac{19}{56}Q$, somit nach den Relationen (468), (469) und (470)

$$St.(A_1) = 0$$

$$St.(B_1) = -\frac{19}{112} Q l$$

$$St.(A_2) = +\frac{18}{112} Q l$$

$$St.(B_2) = -\frac{13}{112} Q l$$

$$St.(A_3) = +\frac{12}{112} Q l$$

$$St.(B_3) = -\frac{13}{112} Q l$$

$$St.(A_4) = +\frac{18}{112} Q l$$

$$St.(B_4) = -\frac{19}{112} Q l$$

und $St.(A_5) = 0$.

3. Berechnet man nach dieser Methode die statischen Kraftmomente für die Auflagestellen und für die Mittelpuncte der Tragfelder nach der verschiedenen Stützenzahl N, und stellt die Resultate zusammen, so ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	Werthe der statischen Kraftmomente								
	den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfaag	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang
	des 1. Tragfeldes		des 2. Tragfeldes		des 3. Tragfeldes		des 4. Tragfeldes		des
	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5
2	0	$-\frac{1}{4}$ 0·2500	0	—	—	—	—	—	—
3	0	$-\frac{5}{32}$ −0·1562	$+\frac{6}{32}$ 0.1875	$-\frac{5}{32}$ −0·1562	0	—	—	—	—
4	0	$-\frac{7}{40}$ −0 1750	$+\frac{6}{40}$ 0·1500	$-\frac{4}{40}$ −0 1000	$+\frac{6}{40}$ 0·1500	$-\frac{7}{40}$ −0·1750	0	—	—
5	0	$-\frac{19}{112}$ −0·1697	$+\frac{18}{112}$ 0 1607	$-\frac{13}{112}$ −0·1160	$+\frac{12}{112}$ 0·1071	$-\frac{13}{112}$ −0·1160	$+\frac{18}{112}$ 0·1607	$-\frac{19}{112}$ −0·1697	0
6	0	$-\frac{26}{152}$ −0·1710	$+\frac{24}{152}$ 0·1579	$-\frac{17}{152}$ −0·1118	$+\frac{18}{152}$ 0·1184	$-\frac{20}{152}$ −0 1316	$+\frac{18}{152}$ 0 1184	$-\frac{17}{152}$ 0 1118	$+\frac{24}{152}$ 0·1579
7	0	$-\frac{71}{416}$ −0·1706	$+\frac{66}{416}$ 0 1586	$-\frac{47}{416}$ −0·1130	$+\frac{48}{416}$ 0·1154	$-\frac{53}{416}$ −0 1274	$+\frac{54}{416}$ 0 1298	$-\frac{53}{416}$ −0·1274	$+\frac{48}{416}$ 0·1154
8	0	$-\frac{97}{568}$ −0 1708	$+\frac{90}{568}$ 0 1585	$-\frac{64}{568}$ −0·1127	$+\frac{66}{568}$ 0·1162	$-\frac{73}{568}$ −0 1285	$+\frac{72}{568}$ 0·1268	$-\frac{70}{568}$ −0·1232	$+\frac{72}{568}$ 0·1268
9	0	$-\frac{265}{1552}$ −0 1708	$+\frac{246}{1552}$ 0·1585	$-\frac{175}{1552}$ −0·1128	$+\frac{180}{1552}$ 0·1160	$-\frac{199}{1552}$ −0·1282	$+\frac{198}{1552}$ 0 1276	$-\frac{193}{1552}$ −0·1243	$+\frac{192}{1552}$ 0 1237
10	0	$-\frac{362}{2120}$ 0 1708	$+\frac{336}{2120}$ 0 1585	$-\frac{239}{2120}$ −0·1128	$+\frac{246}{2120}$ 0 ·1161	$-\frac{272}{2120}$ −0·1283	$+\frac{270}{2120}$ 0·1274	$-\frac{263}{2120}$ −0·1241	$+\frac{264}{2120}$ 0·1246

Die Fortsetzung dieser Tabelle für $N > 10$ unterliegt keinem Anstande.

4. Die Gleichungen (466) und (467) lassen in Verbindung mit dem §. 212 erkennen, dass das statische Kraftmoment $St.(A_n)$ immer positiv, dabei aber für jede ungerade numerirte Stütze kleiner, für jede gerade numerirte aber grösser als $\frac{1}{8}Ql$ wird, von welchem Werthe sich dasselbe desto weniger unterscheidet, je grösser die Anzahl der Stützen ist, und je weiter die bezügliche Stütze A_n von den Enden des Trägers entfernt liegt. Man hat nämlich

$$St.(A_1) < St.(A_3) < St.(A_5) < \text{etc. und alle} < \tfrac{1}{8}Ql,$$

ferner

$$St.(A_2) > St.(A_4) > St.(A_6) > \text{etc. und alle} > \tfrac{1}{8}Ql,$$

wenn man bei dieser Vergleichung die Mitte des Trägers nicht überschreitet. Eben so ist das statische Kraftmoment $St.(B_n)$ in der Mitte eines (z. B. des n^{ten}) Tragfeldes stets negativ, und numerisch betrachtet für jedes ungerade numerirte Tragfeld grösser, für jedes gerade numerirte aber kleiner als $\frac{1}{8}Ql$, von welchem

in Theilen von Ql ausgedrückt für										
die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende
5. Tragfeldes		des 6. Tragfeldes		des 7. Tragfeldes		des 8. Tragfeldes		des 9. Tragfeldes	
B_5	A_6	B_6	A_7	B_7	A_8	B_8	A_9	B_9	A_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$-\frac{26}{152}$ -0.1710	0	—	—	—	—	—	—	—	—
$-\frac{47}{416}$ -0.1130	$+\frac{66}{416}$ 0.1586	$-\frac{71}{416}$ -0.1706	0	—	—	—	—	—	—
$-\frac{73}{568}$ -0.1285	$+\frac{66}{568}$ 0.1162	$-\frac{64}{568}$ -0.1127	$+\frac{90}{568}$ 0.1585	$-\frac{97}{568}$ -0.1708	0	—	—	—	—
$-\frac{193}{1552}$ -0.1243	$+\frac{198}{1552}$ 0.1276	$-\frac{199}{1552}$ -0.1282	$+\frac{180}{1552}$ 0.1160	$-\frac{175}{1552}$ -0.1128	$+\frac{246}{1552}$ 0.1585	$-\frac{265}{1552}$ -0.1708	0	—	—
$-\frac{266}{2120}$ -0.1255	$+\frac{264}{2120}$ 0.1246	$-\frac{268}{2120}$ -0.1241	$+\frac{270}{2120}$ 0.1274	$-\frac{272}{2120}$ -0.1283	$+\frac{246}{2120}$ 0.1161	$-\frac{239}{2120}$ -0.1128	$+\frac{336}{2120}$ 0.1585	$-\frac{362}{2120}$ -0.1708	0

Werthe sich dasselbe desto weniger unterscheidet, je grösser die Zahlen N und n sind. Man hat nämlich, ohne die Mitte des Trägers zu überschreiten, numerisch genommen

$St.(B_1) > St.(B_3) > St.(B_5) >$ etc. und alle $> \frac{1}{8} Ql$, ferner

$St.(B_2) < St.(B_4) < St.(B_6) <$ etc. und alle $< \frac{1}{8} Ql$.

Stellt man sich vor, dass N und n ohne Ende zunehmen, so nähern sich die Werthe von $St.(A_n)$ und $St.(B_n)$ fortwährend den Gränzen

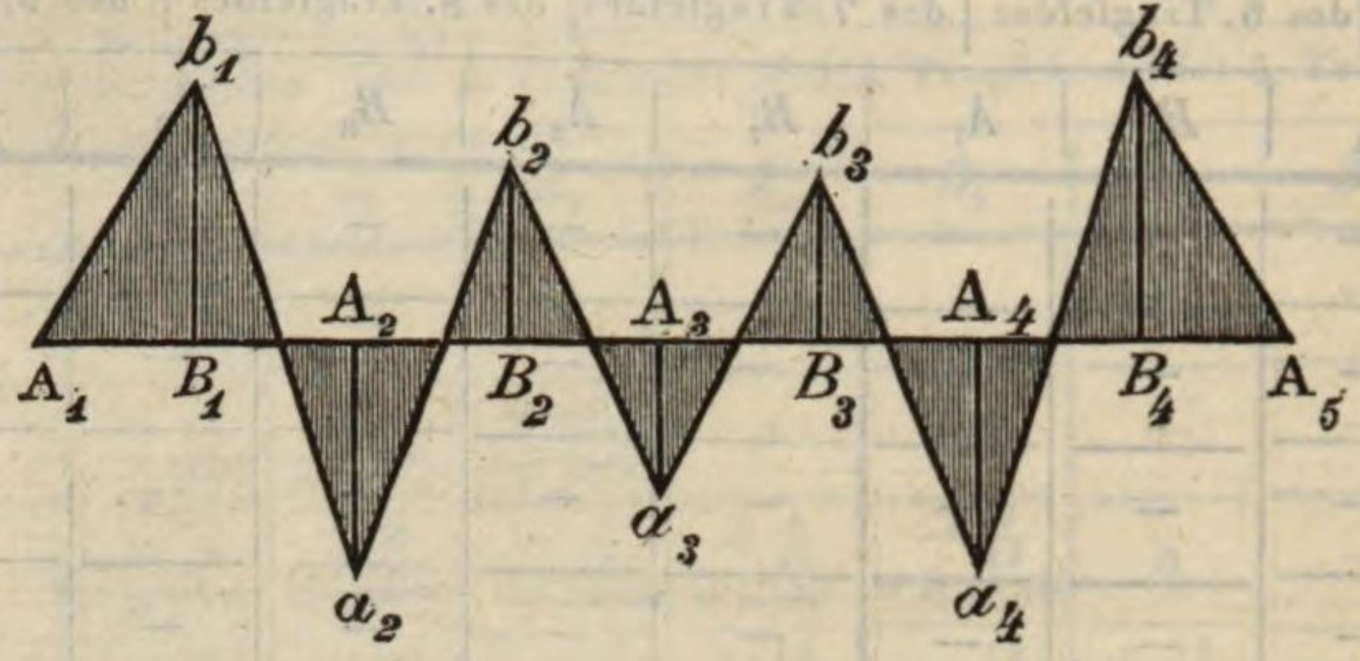
$$\left.\begin{aligned} St.(A_\infty) &= +\tfrac{1}{8} Ql \\ \text{und } St.(B_\infty) &= -\tfrac{1}{8} Ql \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (471).$$

Diese Werthe sind mit jenen gleich, welche die statischen Kraftmomente in dem mit V (Fig. 259) bezeichneten Falle annehmen, was mit den Bemerkungen im §. 213 ad 2 und im §. 214 ad 3 übereinstimmt.

5. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die allgemeinen Gleichungen (464) und (465) ausgedrückt sind, im Sinne des §. 127 graphisch dar, so erhält man eine mit der Fig. 172 analoge Zeichnung, welche die Wirkung der Kräfte in jedem ein-

zelnen Puncte der Längenaxe anschaulich macht. Ruhet z. B. der Träger auf fünf Stützen, so hat man bei der Construction dieser Zeichnung (Fig. 267) die Ordinaten in den Stützpuncten

Fig. 267.



A_2, A_3 und A_4 nach abwärts, die in der Mitte der Tragfelder, nämlich in B_1, B_2, B_3 und B_4 aber nach aufwärts zu verzeichnen, auf denselben die entsprechenden Werthe der statischen Kraftmomente nach irgend einem Masstabe aufzutragen, und die so erhaltenen Endpuncte der Ordinaten auf die angezeigte Weise zu verbinden. Hiernach ist in dem gewählten Beispiele

$$\overline{A_2 a_2} : \overline{A_3 a_3} : \overline{A_4 a_4} : \overline{B_1 b_1} : \overline{B_2 b_2} : \overline{B_3 b_3} : \overline{B_4 b_4} =$$

$$18\frac{Ql}{112} : 12\frac{Ql}{112} : 18\frac{Ql}{112} : 19\frac{Ql}{112} : 13\frac{Ql}{112} : 13\frac{Ql}{112} : 19\frac{Ql}{112} =$$

$$18 : 12 : 18 : 19 : 13 : 13 : 19.$$

Die Durchschnittspuncte der Verbindungslinien mit der Längenaxe bezeichnen diejenigen Stellen, wo die Wendepuncte der Biegungscurve liegen.

6. Dem Vorstehenden gemäss hat unter allen positiven Kraftmomenten $St.(A_2)$, und unter allen negativen Kraftmomenten $St.(B_1)$ den grössten numerischen Werth. Bezeichnet man diese beiden Werthe im Sinne des §. 124 mit $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, und benützt man die für $St.(A_2)$ und $St\ (B_1)$ gegebenen Relationen (469) und (470), so folgt, wenn der Kürze halber $\frac{D_1}{Q} = \gamma$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} R_1 z_1 &= (Q - 2D_1)\frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}(1-2\gamma)Ql \\ \text{und } R_2 z_2 &= D_1 \cdot \frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}\gamma\, Ql \end{aligned}\right\} . \quad (472).$$

Die betreffenden Werthe nach den verschiedenen Zahlen N sind in der 3. und 4. verticalen Spalte der vorstehenden Tabelle bereits enthalten, nur ist das Zeichen — in der 3. Spalte nicht mehr zu beachten.

Tragvermögen.

§. 216.

Allgemeine Formeln. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt nach Umständen entweder in A_2, wo die zweite Stütze sich befindet, oder in B_1, nämlich in der Mitte des ersten Tragfeldes. Dasselbe gilt auch für die symmetrisch gelegenen Stellen A_{N-1} und B_{N-1}. Bezeichnet man im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes in A_2 mit M_1 und jenes in B_1 mit M_2, das Tragvermögen eines Tragfeldes aber mit $Max.\ Q$, und berücksichtigt man die Bemerkungen im §. 124, so wie die Gleichungen (472), so hat man allgemein

$$\text{entweder } M_1 = (1-2\gamma)\frac{l}{2}\,.\,Max.\,Q$$

$$\text{oder } M_2 = \frac{\gamma l}{2}\,.\,Max.\,Q,$$

und hieraus

$$Max.\ Q = \left\{\begin{matrix}\text{entw. } \frac{2M_1}{(1-2\gamma)l} \\ \text{oder } \frac{2M_2}{\gamma l}\end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (473).$$

Sind nun 2, 3, 4 etc. Stützen vorhanden, und sucht man der Reihe nach die entsprechenden Tragfähigkeiten per Tragfeld, so erhält man mit Berücksichtigung der correspondirenden Werthe für γ, welche in der 2. verticalen Colonne der Tabelle im §. 211 enthalten sind, folgende besondere Resultate:

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{Für } N = 2, \; Max.\,Q = & 4 \cdot \frac{M_1}{l} & \\
\text{„ } N = 3, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{16}{3} \cdot \frac{M_1}{l} = 5{\cdot}3333 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{32}{5} \cdot \frac{M_2}{l} = 6{\cdot}4000 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 4, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{20}{3} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}6667 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{40}{7} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}7143 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 5, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{56}{9} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}2222 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{112}{19} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8947 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 6, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{76}{12} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3333 \, \frac{M'}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{76}{13} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8462 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 7, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{208}{33} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3111 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{416}{71} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8557 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 8, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{284}{45} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3030 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{568}{97} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8592 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{„ } N = 9, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{776}{123} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3089 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{1552}{265} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8566 \, \frac{M_2}{l} & \\
\text{für } N = 10, \; Max.\,Q = & \text{entw. } \frac{1060}{168} \cdot \frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3095 \, \frac{M_1}{l} & \\
 & \text{oder } \frac{1060}{181} \cdot \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8564 \, \frac{M_2}{l} &
\end{array}\right\} (474).
$$

Von den betreffenden Alternativwerthen ist stets der kleinere zu wählen.

§. 217.

Besondere Eigenschaften.

1. Bei zwei Stützen hat das Tragvermögen nur den Werth $\frac{4 M_2}{l}$, und der gefährliche Querschnitt ist in der Mitte des Trägers vorhanden.

2. Mit der Zunahme der Stützenzahl N nähert sich der Werth des Tragvermögens der Gränze

$$lim.\ Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } 4\,(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})\,\frac{M_1}{l} = 6{\cdot}3094\,\frac{M_1}{l} \\ \text{oder } 8\,(\sqrt{3}-1)\,\frac{M_2}{l} = 5{\cdot}8564\,\frac{M_2}{l} \end{array} \right\} . \quad (475).$$

3. Ist $M_1 = M_2 = M$, so gelten von den Alternativwerthen jene mit den kleineren numerischen Coefficienten. Der gefährliche Querschnitt liegt sodann für $N=3$ bei der zweiten Stütze, für jede übrige Stützenzahl aber stets in der Mitte des ersten Tragfeldes. Bezeichnet man die Werthe von *Max. Q* mit Zeigern, welche der Stützenzahl N entsprechen, so hat man insbesondere

$Max.\ Q_2 = 4.0000\,\frac{M}{l}$	$Max.\ Q_7 = 5{\cdot}8557\,\frac{M}{l}$
$Max.\ Q_3 = 5{\cdot}3333\,\frac{M}{l}$	$Max.\ Q_8 = 5{\cdot}8592\,\frac{M}{l}$
$Max.\ Q_4 = 5{\cdot}7143\,\frac{M}{l}$	$Max.\ Q_9 = 5{\cdot}8566\,\frac{M}{l}$
$Max.\ Q_5 = 5{\cdot}8947\,\frac{M}{l}$	$Max.\ Q_{10} = 5{\cdot}8564\,\frac{M}{l}$
$Max.\ Q_6 = 5{\cdot}8462\,\frac{M}{l}$	$Max.\ Q_\infty = 5{\cdot}8564\,\frac{M}{l}$.

Wenn daher Träger von einem bestimmten Querschnitte und Materiale auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stets dieselbe Entfernung der Tragstützen gilt, so ist in dem Falle $M_1 = M_2$ (§. 125 ad 1 und 2) das grösste Tragvermögen per Tragfeld für $N=5$, das kleinste hingegen für $N=2$ Stützen vorhanden. Das Verhältniss zwischen den Werthen dieses kleinsten und grössten Tragvermögens ist

$$Max.\ Q_2 : Max.\ Q_5 = 1 : 1{\cdot}4737.$$

Von diesem alleinigen Standpuncte aus betrachtet, würde es also beispielsweise vortheilhaft sein, den in Fig. 265 auf neun Stützen ruhenden continuirlichen Träger in zwei Hälften zu theilen, und die eine Hälfte auf den Stützen 1, 2, 3, 4 und 5, die andere Hälfte hingegen auf den Stützen 5, 6, 7, 8 und 9 ruhen zu lassen. Das Tragvermögen per Tragfeld würde in diesem Falle in dem Verhältnisse von

$$Max.\ Q_9 : Max.\ Q_5 = 1 : 1{\cdot}10065$$

gesteigert.

Obwohl dieser Vortheil nur unwesentlich ist, und andere Rücksichten es nicht wünschenswerth erscheinen lassen, den ununterbrochenen Zusammenhang des Trägers zu stören, so bleibt dieses Resultat nichts desto weniger merkwürdig, zumal es eine gewöhnliche Meinung ist, dass bei einer derartigen Vergleichung das Tragvermögen per Tragfeld mit der Zunahme der Stützen wachse.

4. Ist M_1 von M_2 verschieden, so kommt man zu analogen Resultaten. Wäre etwa $M_1 = \mu$ und $M_2 = 2\mu$, also $M_1 : M_2 = 1 : 2$, wie diess z. B. bei einem $\perp$ förmigen Träger aus Gusseisen sein kann, so hätte man den Gleichungen (474) zufolge, wenn man die Werthe für $Max.\ Q$ wieder mit Zeigern übereinstimmend mit der Stützenzahl bezeichnet,

$$Max.\ Q_2 = 8 \ . \ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_7 = 6{\cdot}3111\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_3 = 5{\cdot}3333\ \frac{\mu}{l} \qquad Max\ Q_8 = 6{\cdot}3130\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_4 = 6{\cdot}6667\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_9 = 6{\cdot}3089\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_5 = 6{\cdot}2222\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_{10} = 6{\cdot}3095\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_6 = 6{\cdot}3333\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_\infty = 6{\cdot}3094\ \frac{\mu}{l}.$$

Jetzt resultirt das grösste Tragvermögen für $N = 2$, das kleinste aber für $N = 3$ Stützen. Das Verhältniss zwischen dem entsprechenden kleinsten und grössten Werthe wird in diesem Falle

$$Max\ Q_3 : Max\ Q_2 = 1 : 1{\cdot}5.$$

Wäre der vorhin angenommene Querschnitt umgekehrt ($\top$), und nunmehr $M_1 = 2\mu$ und $M_2 = \mu$, so werden sich die Resultate verändern. In diesem Falle ist nämlich

$$Max.\ Q_2 = 4 \ . \ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_7 = 5{\cdot}8557\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_3 = 6{\cdot}4 \ . \ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_8 = 5{\cdot}8592\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_4 = 5{\cdot}7147\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_9 = 5{\cdot}8566\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_5 = 5{\cdot}8947\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_{10} = 5{\cdot}8564\ \frac{\mu}{l}$$

$$Max.\ Q_6 = 5{\cdot}8462\ \frac{\mu}{l} \qquad Max.\ Q_\infty = 5{\cdot}8464\ \frac{\mu}{l}$$

Man hat daher in diesem Falle gerade umgekehrt das grösste Tragvermögen per Tragfeld für $N = 3$, und das kleinste für

$N = 2$ Stützen. Auch wird das Verhältniss zwischen dem kleinsten und dem grössten Werthe ein anderes, nämlich

$$Max.\, Q_2 : Max.\, Q_3 = 1 : 1{\cdot}6.$$

5. Die grösste zulässige Biegung im ersten (und letzten) Tragfelde lässt sich in den verschiedenen Fällen durch Combinirung der betreffenden Werthe aus den Gleichungen (463) und (474) ohne Anstand bestimmen.

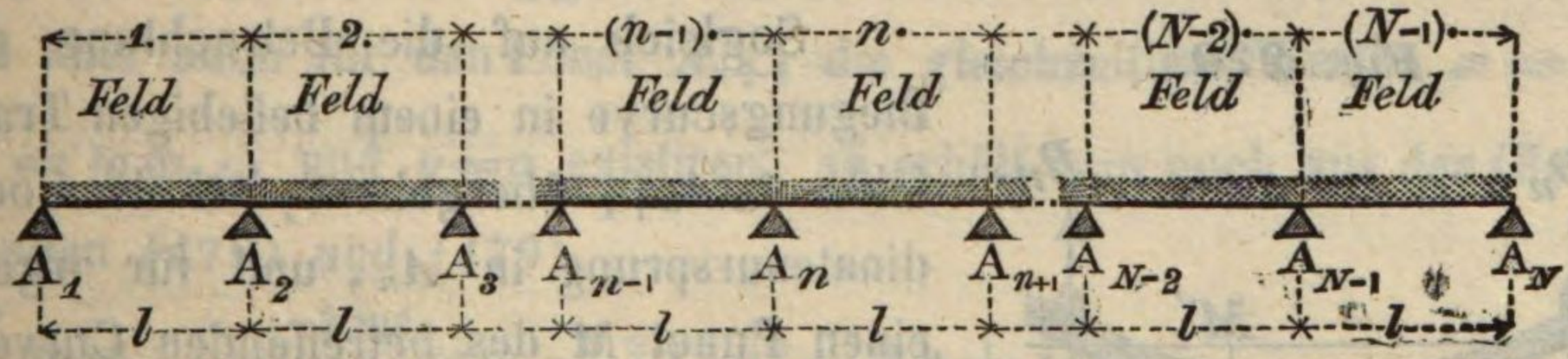
Achtes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn derselbe seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist.

§. 218.

Annahmen. In Uebereinstimmung mit dem Inhalte des §. 205 werde in diesem Kapitel ein auf N gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhender Träger (Fig. 268) betrachtet, von welchem

Fig 268.



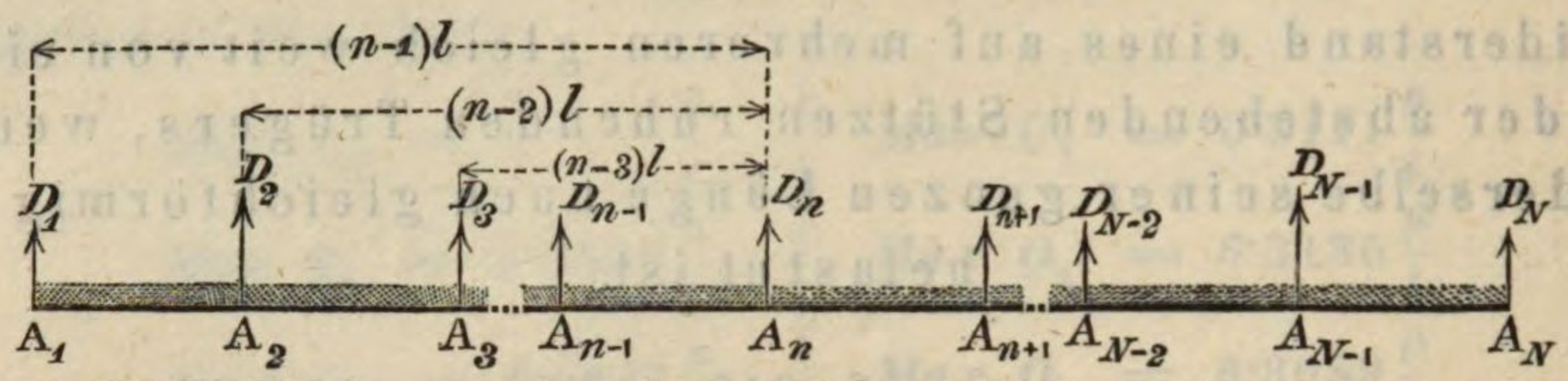
jedes Tragfeld die der Länge nach gleichförmig vertheilte Belastung Q zu tragen hat. Man setze analog, wie im §. 206 die Entfernung der Stützen von einander . . . . . $= l$,
das Biegungsmoment nach §. 53 . . . . . $= mt$,
betrachte die Längenaxe des Trägers als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, bei welchem die positiven Abscissen von A_1 gegen A_N, die positiven Ordinaten hingegen nach abwärts gezählt werden,
bezeichne ferner die Drücke auf die Stützen mit . . . . D,
die Biegungen in der Mitte zwischen denselben mit . . . δ
und die Winkel, welche die Tangenten der Biegungscurve an den Stützpuncten mit dem Horizonte bilden, mit . . . φ,

diese 3 Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern, so dass wieder D_n den Druck auf die n^{te} Stütze, φ_n den Winkel zwischen der Tangente und dem Horizonte daselbst, und δ_n die Biegung in der Mitte des n^{ten} Tragfeldes vorstellt.

§. 219.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Zur Erlangung der Kenntniss von den Bedingungen des Gleichgewichtes bei dem Träger denke man sich (Fig. 269) seine Stützen weggenommen, und an

Fig. 269.

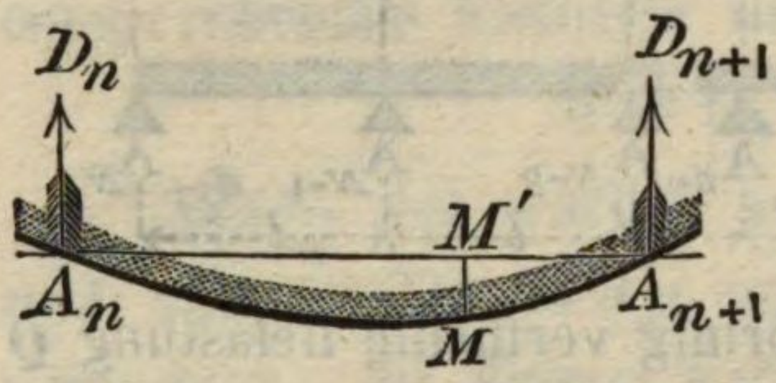


deren Statt Kräfte angebracht, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Hiernach muss vor Allem, wie im §. 207, die Relation

$$\Sigma D_N = (N-1)\,Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (476)$$

vorhanden sein.

Fig. 270.



Sogleich auf die Betrachtung der Biegungscurve in einem beliebigen Tragfelde $A_n A_{n+1}$ übergehend, sei der Coordinatenursprung in A_n, und für irgend einen Punct M des betreffenden Curventheils (Fig. 270) die Abscisse $\overline{A_n M'} = x$ und die Ordinate $\overline{M M'} = y$. Das statische Kraftmoment in Beziehung auf die gewählte Stelle M ist nach den Fig. 269 und 270

$$\tfrac{1}{2}\overline{A_1 M'}^2 . \frac{Q}{l} - [D_1 . \overline{A_1 M'} + D_2 . \overline{A_2 M'} + \ldots + D_n . \overline{A_n M'}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}[(n-1)\,l + x]^2 \frac{Q}{l} - \Big[D_n x + D_{n-1}(l+x) + \ldots$$

$$\ldots + [(n-1)\,l + x] D_1 \Big] =$$

$$= \Big[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1] \Big] \frac{l}{2} +$$

$$+ [(n-1)\,Q - \Sigma D_n]\, x + \tfrac{1}{2}\frac{Q}{l} x^2 ,$$

wenn man die Reduction auf ähnliche Weise, wie im §. 207, vornimmt.

Man hat jetzt nach der Normalgleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2}=\left[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\right]\frac{l}{2}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]x+\tfrac{1}{2}\frac{Qx^2}{l}\quad\ldots\quad(477)$$

und durch zweimalige Integration

$$mt\frac{dy}{dx}=mt\,tg\,\varphi_n+$$
$$+\left[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\right]\frac{lx}{2}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]\frac{x^2}{2}+\tfrac{1}{6}\frac{Qx^3}{l}\quad\ldots\quad(478),$$

so wie

$$mt\;y=mt\,tg\,\varphi_n x+$$
$$+\left[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\right]\frac{lx^2}{4}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]\frac{x^3}{6}+\frac{Qx^4}{24l}\quad\ldots\quad(479).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass für den Punct A_n gleichzeitig $x=o$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\varphi_n$ und $y=o$ werden muss. Nachdem aber auch für den Punct A_{n+1} die gleichzeitigen Werthe $x=l$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\varphi_{n+1}$ und $y=o$ existiren, so erhält man noch aus den Gleichungen (478) und (479)

$$\frac{4mt}{l^2}tg\,\varphi_{n+1}=\frac{4mt}{l^2}tg\,\varphi_n+\tfrac{2}{3}(3n^2-3n+1)Q-$$
$$-2[D_n+3D_{n-1}+5D_{n-2}+\ldots+(2n-1)D_1]\quad\ldots\quad(480)$$

und

$$\frac{4mt}{l^2}tg\,\varphi_n=\tfrac{1}{6}(-3+8n-6n^2)Q+$$
$$+\tfrac{2}{3}[D_n+4D_{n-1}+7D_{n-2}+\ldots+(3n-2)D_1]\quad\ldots\quad(481).$$

Endlich folgt die Biegung δ_n in der Mitte des Tragfeldes aus der Gleichung (479) für $x=\frac{1}{2}l$, welche in diesem Falle übergeht in

$$mt\,\delta_n=\tfrac{1}{2}mt\,tg\,\varphi_n l+$$
$$+\tfrac{1}{48}[(n-1)(3n-2)Q-D_n-7D_{n-1}-13D_{n-2}-\ldots$$
$$\ldots-(6n-5)D_1]l^3+\frac{Ql^3}{384}\quad\ldots\quad(482).$$

Wird der Werth von $\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_n$ aus der Gleichung (481) in die Gleichung (480) gesetzt, so findet man nach gehöriger Reduction

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_{n+1} = \tfrac{1}{6}(1 - 4n + 6n^2)\,Q -$$
$$- \tfrac{2}{3}[2D_n + 5D_{n-1} + 8D_{n-2} + \ldots + (3n-1)D_1]. \quad (483)$$

und wird jetzt in der Gleichung (481) $(n+1)$ statt n gesetzt, so hat man überdiess

$$\frac{4mt}{l^2} tg\,\varphi_{n+1} = -\tfrac{1}{6}(1 + 4n + 6n^2)\,Q +$$
$$+ \tfrac{2}{3}[D_{n+1} + 4D_n + 7D_{n-1} + \ldots + (3n+1)D_1]. \quad (484).$$

Die Relationen (483) und (484) mit einander verglichen, führen endlich auf die wichtige Bedingungsgleichung

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(1+6n^2)\,Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1) \quad (485).$$

Von den Drücken auf die Stützen.

§. 220.

Abhängigkeit der Drücke unter einander. Die Gleichung (485) lehrt, wie man den Druck auf die $(n+1)^{te}$ Stütze finden kann, wenn man den Druck auf jede vorhergehende Stütze kennt. Ist, wie vorausgesetzt, N die Anzahl der Stützen, so kann eben so, wie im §. 208, der Zeiger n von 1 bis $(N-2)$ variiren, darf jedoch diese Gränzen nicht überschreiten. Führt man diese Substitution durch, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
D_2 &= \ldots\ldots\ldots = \tfrac{7}{2}Q - 6D_1,\\
D_3 &= \tfrac{25}{2}Q - 6(D_2 + 2D_1) \ldots = -\tfrac{17}{2}Q + 24D_1,\\
D_4 &= \tfrac{55}{2}Q - 6(D_3 + 2D_2 + 3D_1) \ldots = \tfrac{73}{2}Q - 90D_1,\\
D_5 &= \tfrac{97}{2}Q - 6(D_4 + 2D_3 + 3D_2 + 4D_1) = -\tfrac{263}{2}Q + 336D_1,\\
D_6 &= \tfrac{151}{2}Q - 6(D_5 + 2D_4 + 3D_3 + \\
&\qquad + 4D_2 + 5D_1) = \tfrac{991}{2}Q - 1254D_1,
\end{aligned}\right\} (486)$$

u. s. w., so dass allgemein

$$\left.\begin{aligned}
D_{n+1} &= \ldots\ldots\ldots = a_n Q + b_n D_1 \text{ *)}\\
D_{N-1} &= \ldots\ldots\ldots = a_{N-2} Q + b_{N-2} D_1
\end{aligned}\right\}$$

gesetzt werden kann, wenn a und b mit den betreffenden Zeigern die Coefficienten von Q und D_1 bezeichnen. Uebrigens finden die Schluss-

*) Anmerkung. Wegen der Statthaftigkeit dieser Form siehe die Anmerkung zum §. 208.

bemerkungen im §. 208, so wie die dort vorkommenden Gleichungen (440) und (441) auch hier Anwendung.

§. 221.

Besondere Relation zwischen den Drücken auf drei unmittelbar auf einander folgende Stützen. Wird in der Gleichung (485)

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(1 + 6n^2)Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1)$$

$(n-1)$ statt n gesetzt, und von ihr der auf diese Weise entstehende Ausdruck

$$D_n = \tfrac{1}{2}[1 + 6(n-1)^2]Q - 6[D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1]$$

abgezogen, so ergibt sich als Differenz die Gleichung

$$(D_{n+1} - D_n) = 3(2n-1)Q - 6\Sigma D_n.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der im §. 209 gefundenen. Verfährt man mit ihr eben so, wie im erwähnten §., so findet man wieder die Normalgleichung (442), nämlich:

$$D_{n+1} + 4D_n + D_{n-1} = 6Q \quad \ldots\ldots \quad (487).$$

Es besteht daher zwischen den Werthen von drei aufeinander folgenden Drücken D_{n-1}, D_n und D_{n+1} das gleiche Gesetz, ob man den Fall des gegenwärtigen oder jenen des vorhergehenden Kapitels betrachtet; was jedenfalls merkwürdig ist.

Die am Schlusse des §. 209 erwähnte Beschränkung für die Anwendung der besagten Normalgleichung ist selbstverständlich auch hier giltig.

§. 222.

Bestimmung des Druckes D_1 auf die erste Stütze. Nach den Gleichungen (486) lassen sich sämmtliche Drücke als Functionen des Druckes auf die erste Stütze darstellen. Es ist daher wichtig, diesen Druck D_1 kennen zu lernen. Zur Bestimmung desselben kann man wieder dieselben zwei Methoden anwenden, welche im §. 210 erörtert worden sind.

I. Methode. Man stelle die einzelnen Werthe der Drücke D_2, D_3, D_4 etc. für die erste Hälfte des Trägers, einschliesslich der

etwa vorhandenen Mittelstütze, nach den Gleichungen (486) dar. Hiernach erhält man aufeinanderfolgend

$$\begin{aligned}
D_2 &= \tfrac{7}{2} Q - 6 D_1,\\
D_3 &= -\tfrac{17}{2} Q + 24 D_1,\\
D_4 &= \tfrac{73}{2} Q - 90 D_1,\\
D_5 &= -\tfrac{263}{3} Q + 336 D_1,\\
D_6 &= \tfrac{991}{2} Q - 1254 D_1,\\
D_7 &= -\tfrac{3689}{2} Q + 4680 D_1,\\
D_8 &= \tfrac{13777}{2} Q - 17466 D_1,\\
D_9 &= -\tfrac{51407}{2} Q + 65184 D_1,\\
D_{10} &= \tfrac{191863}{2} Q - 243270 D_1 \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Das weitere Verfahren ist wie im §. 210. Sei z. B. $N=8$, so findet man

$$\begin{aligned}
D_1 &= \ldots D_1,\\
D_2 &= \tfrac{7}{2} Q - 6 D_1,\\
D_3 &= -\tfrac{17}{2} Q + 24 D_1,\\
D_4 &= \tfrac{73}{2} Q - 90 D_1,
\end{aligned}$$

$$\Sigma D_8 = 2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) = 63 Q - 142 D_1 = (N-1)Q = 7Q,$$

und hieraus

$$D_1 = \tfrac{56}{142} Q = \tfrac{28}{71} Q.$$

Berechnet man auf diese Weise den Druck auf die erste Stütze für Träger, welche auf 2, 3, 4, etc. Stützen ruhen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\text{für } N = 2, \ldots D_1 &= \tfrac{1}{2} Q \ldots = 0{\cdot}5000 . Q,\\
\text{„ } N = 3, \ldots D_1 &= \tfrac{3}{8} Q \ldots = 0{\cdot}3750 . Q,\\
\text{„ } N = 4, \ldots D_1 &= \tfrac{4}{10} Q \ldots = 0{\cdot}4000 . Q,\\
\text{„ } N = 5, \ldots D_1 &= \tfrac{11}{28} Q \ldots = 0{\cdot}3929 . Q,\\
\text{„ } N = 6, \ldots D_1 &= \tfrac{15}{38} Q \ldots = 0\,3947 . Q,\\
\text{„ } N = 7, \ldots D_1 &= \tfrac{41}{104} Q \ldots = 0{\cdot}3942 . Q,\\
\text{„ } N = 8, \ldots D_1 &= \tfrac{56}{142} Q \ldots = 0{\cdot}3944 . Q,\\
\text{„ } N = 9, \ldots D_1 &= \tfrac{153}{388} Q \ldots = 0{\cdot}3943 . Q,\\
\text{„ } N = 10, \ldots D_1 &= \tfrac{209}{530} Q \ldots = 0{\cdot}3943 . Q,
\end{aligned}\right\} \quad (488).$$

u. s. w.

II. Methode. Man setze die ebenfalls aus den Gleichungen (486) entwickelten Werthe der Drücke auf zwei symmetrisch gelegene Stützen einander gleich, und bestimme aus der so ent-

stehenden Gleichung die Unbekannte D_1. Nur müssen dabei die Endstützen ausser Betracht bleiben. Hat man z. B. wieder $N=8$, so ist wegen der bemerkten Symmetrie $D_2 = D_7$, $D_3 = D_6$ und $D_4 = D_5$, sonach mit Rücksicht auf die Werthe unter (486)

$$\frac{7}{2}Q - 6D_1 = -\frac{3689}{2}Q + 4680D_1,$$
$$-\frac{17}{2}Q + 24D_1 = \frac{991}{2}Q - 1254D_1 \text{ und}$$
$$\frac{73}{2}Q - 90D_1 = -\frac{263}{2}Q + 336D_1.$$

Aus jeder dieser drei Gleichungen folgt übereinstimmend

$$D_1 = \frac{28}{71}Q.$$

Es ist übrigens nur nothwendig, eine einzige Gleichung aufzustellen und aufzulösen.

Berechnet man nach dieser Methode den Druck D_1 für Träger, welche auf mehr als drei Stützen ruhen, so findet man ebenfalls die Resultate (488).

§. 223.

Bestimmung der Drücke auf die übrigen Stützen. Hat man den Druck D_1 auf die erste Stütze gefunden, so können die übrigen Drücke nach den Gleichungen (486) und (487) leicht gefunden werden. Ist z. B. der Träger auf acht Stützen gelagert, so hat man wegen $N=8$

nach §. 222 . . .	$D_1 = \ldots\ldots = \frac{56}{142}Q = 0{\cdot}3944\,.\,Q,$	
nach den Gleichungen (486)	$D_2 = \frac{7}{2}Q - 6D_1 = \frac{161}{142}Q = 1{\cdot}1338\,.\,Q,$	
	$D_3 = -\frac{17}{2}Q + 24D_1 = \frac{137}{142}Q = 0{\cdot}9648\,.\,Q,$	
nach d. Gleich. (487)	$D_4 = 6Q - 4D_3 - D_2 = \frac{143}{142}Q = 1{\cdot}0070\,.\,Q,$	
nach den Gleichungen (440)	$D_5 = D_4 \ldots = \frac{143}{142}Q = 1{\cdot}0070\,.\,Q,$	
	$D_6 = D_3 \ldots = \frac{137}{142}Q = 0{\cdot}9648\,.\,Q,$	
	$D_7 = D_2 \ldots = \frac{161}{142}Q = 1{\cdot}1338\,.\,Q,$	
	$D_8 = D_1 \ldots = \frac{56}{142}Q = 0{\cdot}3944\,.\,Q,$	

also übereinstimmend
mit der Gleichung (476) . . . . $\Sigma D_8 = 7Q.$

Bestimmt man auf diese Weise die Drücke auf die Stützen für Träger, welche auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stellt man die Resultate zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$	$\frac{D_{10}}{Q}$
2	$\frac{1}{2}$ 0·5000	$\frac{1}{2}$ 0·5000	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{3}{8}$ 0·3750	$\frac{10}{8}$ 1·2500	$\frac{3}{8}$ 0·3750	—	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{4}{10}$ 0·4000	$\frac{11}{10}$ 1·1000	$\frac{11}{10}$ 1·1000	$\frac{4}{10}$ 0·4000	—	—	—	—	—	—
5 *)	$\frac{11}{28}$ 0·3929	$\frac{32}{28}$ 1·1428	$\frac{26}{28}$ 0·9286	$\frac{32}{28}$ 1·1428	$\frac{11}{28}$ 0·3929	—	—	—	—	—
6	$\frac{15}{38}$ 0·3947	$\frac{43}{38}$ 1·1316	$\frac{37}{38}$ 0·9737	$\frac{37}{38}$ 0·9737	$\frac{43}{38}$ 1·1316	$\frac{15}{38}$ 0·3947	—	—	—	—
7	$\frac{41}{104}$ 0·3942	$\frac{118}{104}$ 1·1346	$\frac{100}{104}$ 0·9616	$\frac{106}{104}$ 1·0192	$\frac{100}{104}$ 0·9616	$\frac{118}{104}$ 1·1346	$\frac{41}{104}$ 0·3942	—	—	—
8	$\frac{56}{142}$ 0·3944	$\frac{161}{142}$ 1·1338	$\frac{137}{142}$ 0·9648	$\frac{143}{142}$ 1·0070	$\frac{143}{142}$ 1·0070	$\frac{137}{142}$ 0·9648	$\frac{161}{142}$ 1·1338	$\frac{56}{142}$ 0·3944	—	—
9	$\frac{153}{388}$ 0.3943	$\frac{440}{388}$ 1·1340	$\frac{374}{388}$ 0·9639	$\frac{392}{388}$ 1·0103	$\frac{386}{388}$ 0·9949	$\frac{392}{388}$ 1·0103	$\frac{374}{388}$ 0·9639	$\frac{440}{388}$ 1·1340	$\frac{153}{388}$ 0·3943	—
10	$\frac{209}{530}$ 0·3943	$\frac{601}{530}$ 1·1340	$\frac{511}{530}$ 0·9642	$\frac{535}{530}$ 1·0094	$\frac{529}{530}$ 0·9981	$\frac{529}{530}$ 0·9981	$\frac{535}{530}$ 1·0094	$\frac{511}{530}$ 0·9642	$\frac{601}{530}$ 1·1340	$\frac{209}{530}$ 0·3943

*) Anmerkung. Der Uebersetzer des Navier'schen Werkes „Mechanik der Baukunst“ hat in seinen Zusätzen

Der Gebrauch dieser Tabelle ist klar, übrigens analog jenem der Tabelle im §. 211.

Auf eine zweckmässige Weise kann man sich die Drücke auf die Stützen mittelst der Figur 271 (Seite 404) anschaulich machen. Daselbst sind nämlich die auf 2, 3, 4,... Stützen gelagerten Träger verzeichnet, und bei jeder Stütze ist der Druck, den sie zu erleiden hat, darüber geschrieben.

Auch können diese Drücke als nach aufwärts wirkende Kräfte in graphischer Weise mittelst Linien dargestellt werden, deren Längen der Intensität jener Drücke proportional sind.

§. 224.

Besondere Eigenschaften der Drücke. Die besonderen Eigenschaften der Drücke, welche im §. 212 für den im 7. Kapitel angenommenen Fall abgeleitet worden sind, haben der Hauptsache nach auch im gegenwärtigen Falle zu gelten. Man bemerkt nämlich, dass die dort erwähnten Eigenschaften sich in der Wesenheit auf die Existenz der Normalgleichung (442) gründen, welche zeuge der Relation (487) auch in dem Falle des gegenwärtigen Kapitels vorhanden ist. Behält man daher die im §. 212 eingeführten Differenzen Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. zwischen den Drücken und den Belastungsgewichten Q bei, so können die in dem erwähnten §. unter 1, 2 und 3 angegebenen Eigenschaften unverändert hierher übertragen werden. Nur hinsichtlich der vierten Eigenschaft ergibt sich in so ferne eine Veränderung, als die Gränzwerthe für

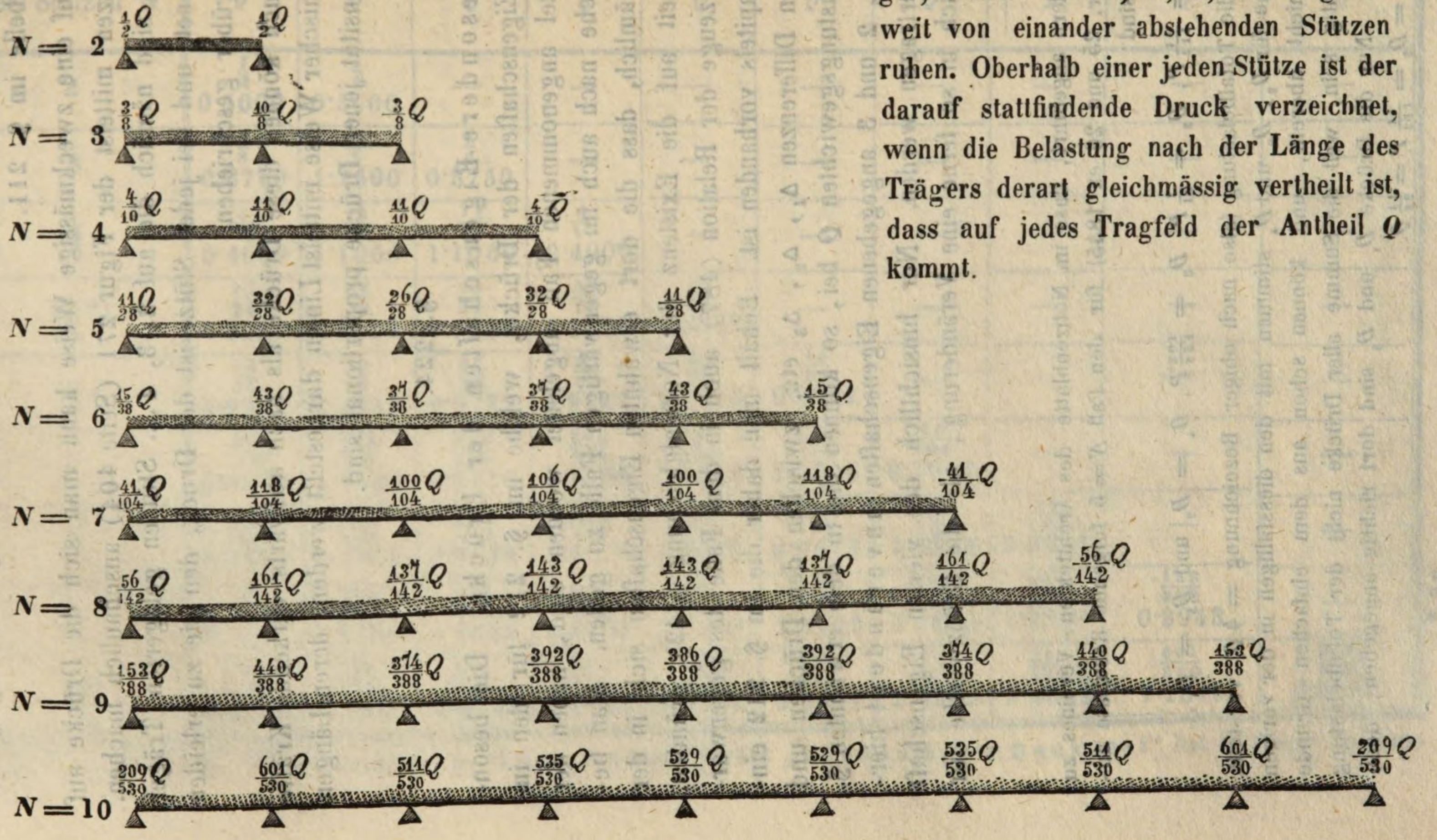
---

unter andern angeführt, dass im Notizenblatte des Architekten-Vereines zu Berlin (Nr. 25 und 26 ex 1845) für den Fall $N = 5$ folgende Resultate angegeben sind:

$$D_1 = \tfrac{11}{112} P,\ D_2 = \tfrac{1}{21} P,\ D_3 = \tfrac{103}{168} P,\ D_4 = D_2 \text{ und } D_5 = D_1,$$

wenn P die Totalbelastung (also nach obiger Bezeichnung $= 4\,Q$) vorstellt. Die Werthe für D_2, D_3 und D_4 stimmen mit den diessfälligen in der vorigen Tabelle nicht überein, und können schon aus dem einfachen Grunde nicht richtig sein, weil die Summe aller Drücke nicht der Totalbelastung gleich ist. Nur die Drücke D_1 und D_5 sind dort richtig angegeben, denn es ist $D_1 = D_5 = \tfrac{11}{112} P = \tfrac{11}{28} Q$.

Fig. 271.



Nebige Figur bezieht sich auf Träger, welche auf 2, 3, 4, ... 10 gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhen. Oberhalb einer jeden Stütze ist der darauf stattfindende Druck verzeichnet, wenn die Belastung nach der Länge des Trägers derart gleichmässig vertheilt ist, dass auf jedes Tragfeld der Antheil Q kommt.

die einzelnen Drücke bei dem fortwährenden Wachsen von N anders ausfallen. Man hat nämlich nach den Gleichungen (486)

$$D_2 = \tfrac{7}{2} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } D_3 = -\tfrac{17}{2} Q + 24 D_1,$$

ferner nach den Gleichungen (444)

$$\Delta_2 = D_2 - Q = \tfrac{5}{2} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } \Delta_3 = D_3 - Q = -\tfrac{19}{2} Q + 24 D_1,$$

somit

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-19 Q + 48 D_1}{5 Q - 12 D_1},$$

und sofort

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{-19 Q + 48\, lim.\, D_1}{5Q - 12\, lim.\, D_1}.$$

Uebereinstimmend mit der Gleichung (451) ist ferner

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q = (-2 + \sqrt{3}).$$

Werden die beiden für $lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)$ gefundenen Werthe einander gleich gesetzt, und sodann die erscheinende Unbekannte $lim.\, D_1$ bestimmt, so erhält man

$$lim.\, D_1 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{19 + 5q}{4 + q}\right) Q = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right) Q = 0{\cdot}394338\,.\,Q \quad (489).$$

Bei der gleichförmig vertheilten Belastung nähert sich daher der Druck D_1 auf die erste Stütze desto mehr dem Werthe $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right) Q = 0{\cdot}394338\,.\,Q$, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Da den Gleichungen (486) gemäss die übrigen Drücke D_2, D_3, D_4 etc, von dem ersten Drucke abhängen, so findet man leicht auch die Gränzwerthe für diese übrigen Drücke, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
lim.\, D_2 &= 1{\cdot}133975\,.\,Q \\
lim.\, D_3 &= 0.964102\,.\,Q \\
lim.\, D_4 &= 1{\cdot}009619\,.\,Q \\
lim.\, D_5 &= 0{\cdot}997423\,.\,Q \\
lim.\, D_6 &= 1.000691\,.\,Q \\
lim.\, D_7 &= 0{\cdot}999815\,.\,Q \\
lim.\, D_8 &= 1{\cdot}000049\,.\,Q \\
lim.\, D_9 &= 0{\cdot}999987\,.\,Q \\
lim.\, D_{10} &= 1{\cdot}000003\,.\,Q \\
lim.\, D_{11} &= 0{\cdot}999999\,.\,Q
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (490).$$

Alle hier erörterten Eigenschaften findet man bei der Betrachtung der im §. 223 erscheinenden Tabelle in der That vorhanden.

Biegung.

§. 225.

Form der Biegungscurve. Die Form der Biegungscurve ist aus der Gleichung (479) zu beurtheilen, welche nunmehr bestimmt erscheint, weil die darin anfänglich unbekannt gewesenen Werthe von $tg\,\varphi_n$ und von den Drücken mit Rücksicht auf die Gleichungen (481) und den §. 223 bereits bekannt sind. Insbesondere wird der Werth von $tg\,\varphi_n$ die Curvenform anschaulich machen, weil er die Richtung der Tangente an jedem Stützpuncte angibt. Um diese tangentielle Richtung näher zu untersuchen, bemerke man, dass zunächst aus der Gleichung (480)

$$\frac{4\,m\,t}{l^2}\,(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) =$$

$$= \tfrac{2}{3}\,(3n^2 - 3n + 1)\,Q - 2\,[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)\,D_1]$$

folgt. Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern

$$D_n + 3\,D_{n-1} + 5\,D_{n-2} + \ldots + (2\,n-1)\,D_1 =$$

$$= [D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1] +$$

$$+ [D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + 3\,D_{n-3} + \ldots + (n-1)\,D_1],$$

und nach der Gleichung (485)

$$D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1 =$$

$$= \tfrac{1}{12}\,(1 + 6\,n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,D_{n+1},$$

daher, wenn man $(n-1)$ mit n verwechselt,

$$D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{12}(7 - 12n + 6n^2)Q - \tfrac{1}{6}D_n,$$

wornach man findet:

$$D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1 =$$
$$= \left(\frac{2 - 3n + 3n^2}{3}\right)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n+1} + D_n).$$

Benützt man dieses Resultat, und nimmt man unter Einem auf die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} Rücksicht, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = -\tfrac{2}{3}Q + \tfrac{1}{3}(D_n + D_{n+1}) = \tfrac{1}{3}(\Delta_n + \Delta_{n+1}) \quad (491).$$

Eine zweite Relation zwischen $tg\,\varphi_{n+1}$ und $tg\,\varphi_n$ erhält man durch Addition der Gleichungen (481) und (483). Dadurch wird

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{3}(2n-1)Q - \tfrac{2}{3}(D_n + D_{n-1} + \ldots + D_1).$$

Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern, nämlich ΣD_n, dem §. 221 gemäss

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n+1} - D_n),$$

somit nach Benützung dieses Werthes

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{9}(D_{n+1} - D_n) = \tfrac{1}{9}(\Delta_{n+1} - \Delta_n) \quad (492).$$

Die Combinirung der Gleichungen (491) und (492) ergibt nunmehr ganz einfach

$$tg\,\varphi_n = -(2\Delta_n + \Delta_{n+1})\frac{l^2}{36mt} = -\Delta_n\left(2 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)\frac{l^2}{36mt} \quad (493).$$

Es ist bemerkenswerth, dass die obigen Gleichungen (491), (492) und (493) mit den im 7. Kapitel gefundenen (454), (455) und (456) gleichförmig sind.

Die Biegungscurve besitzt daher der Hauptsache nach dieselben Eigenschaften, welche im §. 213 bezüglich des dort untersuchten Falles erörtert wurden. Hiernach befindet sich das Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} desto mehr in dem mit VI (Fig. 259) bezeichneten Falle, je weiter diese Stützen von den Trägerenden entfernt liegen. Auch findet die grösste Neigung der Tangenten bei

der ersten Stütze statt, und ihre Grösse ergibt sich aus der Gleichung

$$tg\,\varphi_1 = (4\,D_1 - Q)\,\frac{l^2}{24\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (494),$$

welche nämlich für $n = 1$ aus der Gleichung (481) folgt. [Die Gleichung (493) ist hier nicht anzuwenden.] Insbesondere findet man nach jener Gleichung für verschiedene N, wenn man unter Einem die entsprechenden Werthe von D_1 nach §. 222 und nach Gleichung (489) substituirt, und zwar für

$$\left.\begin{array}{l}
N = 2 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 1\,0000 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 3 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{1}{2} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5000 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 4 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{3}{5} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}6000 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 5 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{4}{7} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5714 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 6 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{11}{19} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0.5789 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 7 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{15}{26} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5769 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 8 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{41}{71} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5775 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 9 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{56}{97} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5773 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 10 \ldots\ tg\,\varphi_1 = \frac{153}{265} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5774 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N = \infty, \quad tg\,\varphi_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} = 0{\cdot}5774 \,.\, \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t}
\end{array}\right\} \quad (495).$$

Der Werth für $N = 2$ stimmt mit der Gleichung (78) überein. Auch ist unter sonst gleichen Umständen die kleinste Neigung der Tangente für $N = 3$ Stützen in A_1 vorhanden und die numerischen Coefficienten von $\frac{Q\,l^2}{m\,t}$ betragen der Reihe nach zwei Drittel von jenen, welche man aus demselben Grunde im 7. Kapitel unter (458) zusammengestellt hat.

§. 226.

Biegung in der Mitte der Tragfelder. Der Werth dieser Biegung (δ_n) folgt aus der Gleichung (482)

$$mt\,\delta_n = \tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi_n\,l + \tfrac{1}{48}\,[(n-1)(3n-2)\,Q - D_n - 7\,D_{n-1} - 13\,D_{n-2} - \ldots - (6n-5)\,D_1]\,l^3 + \frac{Q\,l^3}{384}.$$

Es ist aber, wie im §. 214,

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6n-5)\,D_1 = [D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + \ldots + D_1] + 6\,[D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1],$$

ferner nach dem vorigen §.

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\,Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n), \text{ und}$$

$$D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1 = \tfrac{1}{12}(5 - 12n + 6n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,\Delta_n,$$

somit

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6n-5)\,D_1 = (2 - 5n + 3n^2)\,Q - \left(\frac{\Delta_{n+1} + 5\,\Delta_n}{6}\right).$$

Substituirt man diesen Werth, so wie jenen aus der Gleichung (493) für $tg\,\varphi_n$ in die obige Relation für δ_n, so reducirt sich dieselbe auf:

$$\delta_n = [Q - 4\,(\Delta_n + \Delta_{n+1})]\,\frac{l^3}{384\,mt} \quad \ldots \quad (496).$$

Hieraus kann, wenn bei der Betrachtung die Mitte des Trägers nicht überschritten wird, Folgendes geschlossen werden:

1. Aus derselben Ursache, wie im §. 214, ist die Biegung in den ungerade numerirten Tragfeldern grösser, in den gerade numerirten aber kleiner als $\frac{Q\,l^3}{384\,mt}$.

2. Von diesem Werthe werden sich die Biegungen desto weniger entfernen, je weiter die betreffenden Tragfelder von den Enden des Trägers entfernt sind.

Man hat nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1 > \delta_3 > \delta_5 > \ldots \text{ und alle } > \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \\ \text{ferner}\quad &\\ &\delta_2 > \delta_4 > \delta_6 > \ldots \text{ und alle } < \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \\ \text{endlich}\quad &\\ &\delta_1 > \delta_2 < \delta_3 > \delta_4 < \delta_5 > \delta_6 < \text{etc.}\ldots. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (497).$$

Dieses Verhalten ist analog mit jenem, welches sich auf den Fall im 7. Kapitel bezieht.

3. Würden die Zahlen N und n ohne Ende wachsen, daher in Gemässheit des §. 224 die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} ohne Ende abnehmen, so wäre der Gränzwerth, welchem sich δ_n fortwährend nähert

$$\delta_\infty = \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (498),$$

also eben so gross, wie der Werth in der Formel (412) für den im §. 203 mit VI bezeichneten Fall. In der That muss dieses Resultat zum Vorschein kommen, weil nach Inhalt des vorhergehenden §. bei dem unendlichen Wachsen von N und n das Tragfeld in einem Zustande anzunehmen ist, welcher sich jenem des Falles VI ohne Ende nähert.

4. Nach Punct 2 befindet sich von allen Biegungen, die in der Mitte der Tragfelder stattfinden, die grösste in dem ersten und selbstverständlich auch in dem letzten Tragfelde. Diese besondere Biegung erhält man für $n = 1$ aus der Gleichung (482), da zu diesem Behufe die Gleichung (496) nicht anzuwenden ist. Hiernach hat man

$$m\,t\,\delta_1 = \tfrac{1}{2}\,m\,t\,tg\,\varphi_1\,l - \tfrac{1}{48}\,D_1\,l^3 + \tfrac{1}{384}\,Q\,l^3,$$

daher wegen der Relation (494),

$$\delta_1 = (24\,D_1 - 7Q)\,\frac{l^3}{384mt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (499).$$

Insbesondere wird für verschiedene N, wenn man die entsprechenden Werthe für D_1 nach §. 222 und nach der Gleichung (489) substituirt, nämlich für

$$\left.\begin{aligned}
N=2\ldots\ \delta_1 &= 5\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 5{\cdot}0000\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=3\ldots\ \delta_1 &= 2\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}0000\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=4\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{13}{5}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}6000\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=5\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{17}{7}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4286\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=6\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{47}{19}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4737\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=7\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{32}{13}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4615\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=8\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{175}{71}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4648\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=9\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{239}{97}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4639\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=10\ldots\ \delta_1 &= \tfrac{653}{265}\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4642\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}\\
N=\infty,\ lim.\,\delta_1 &= (2\sqrt{3}-1)\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4641\ .\ \frac{Q\,l^3}{384mt}
\end{aligned}\right\}\ (500).$$

Das Resultat für $N=2$ stimmt mit der Formel (77), und für $N=3$ mit der Formel $\delta = \frac{1}{192}\cdot\frac{Q\,l^3}{m\,t}$ im §. 185 ad 2 überein, wie man diess auch in der That erwarten musste, zumal im letzten Falle das Tragfeld in demselben Zustande sich befindet, wie wenn es bei der zweiten Stütze festgehalten und auf der ersten Stütze aufliegen würde. Dass von allen Biegungen im ersten Tragfelde unter sonst gleichen Umständen die kleinste für $N=3$ Stützen vorhanden ist, steht im Zusammenhange mit der am Schlusse des vorigen §. bemerkten Eigenschaft.

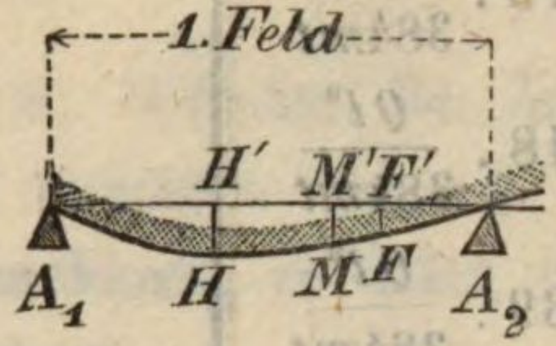
§. 227.

Statische Kraftmomente. Der Werth des statischen Kraftmomentes in Bezug auf irgend eine Stelle in einem beliebigen (n^{ten}) Tragfelde, ist aus der Gleichung (477) zu berechnen, welche nunmehr bestimmt erscheint, indem die Werthe der Drücke bekannt sind. Man kann bei den allgemeinen Betrachtungen auf eine ähnliche Weise zu Werke gehen, wie im §. 215. Demgemäss und mit Rücksicht auf die beiden vorhergehenden §§. 225 und 226 findet man Folgendes:

1) Das statische Kraftmoment an einem Stützpuncte A_n, welches mit $St.\,(A_n)$ bezeichnet wird, nähert sich desto mehr dem Werthe $\frac{1}{12}\,Q\,l$, und das Tragfeld $A_n\,A_{n+1}$ befindet sich desto mehr in dem mit VI bezeichneten Falle (Fig. 259), je grösser die Anzahl der Stützen N ist, und je weiter die bezügliche Stütze von den Enden des Trägers entfernt liegt *).

2. Die grössten numerischen Werthe für die positiven und negativen Kraftmomente sind in der Strecke des ersten (und letzten) Tragfeldes zu suchen. Das statische Kraftmoment für irgend einen Punct M (Fig. 272) im ersten Tragfelde findet man aus der Gleichung (477) für $n=1$. Wird jener Werth mit $St.\,(M)$ bezeichnet, so ist

Fig. 272.



$$St.\,(M) = -\,D_1\,x + \tfrac{1}{2}\,\frac{Q\,x^2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (501).$$

Da für die Abscisse des Wendepunctes F der Curve, d. i. für $x=\overline{AF'}$, das statische Kraftmoment verschwinden muss, so findet man allgemein

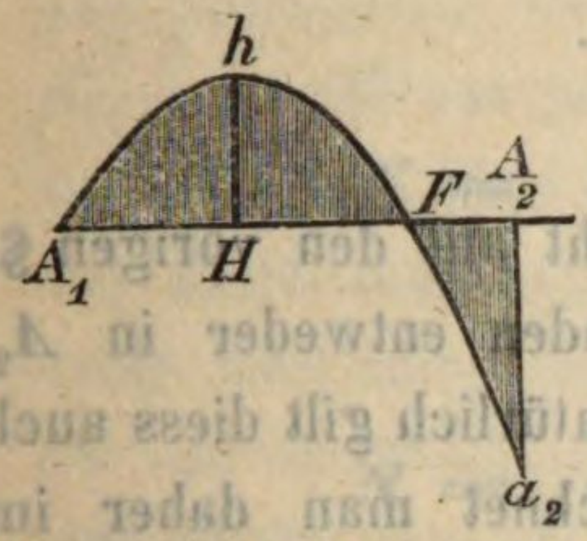
$$\overline{AF'} = 2\left(\frac{D_1}{Q}\right)l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (502).$$

Man beachte jetzt, dass man die Gleichung (501) der statischen Kraftmomente im Sinne des § 128 auf eine graphische Weise dar-

---

*) Ghega hat in seinem Werke „Ueber nordamerikanischen Brückenbau“ (Seite 62) angeführt, dass der Zustand eines solchen Tragfeldes ($An\,An+1$) nicht genau mit dem Falle übereinstimme, wo die beiden Enden des Tragfeldes fest vermauert sind. Diese Anomalie ist in der That vorhanden, wenn man für den erwähnten letzten Fall (VI) das herkömmliche Resultat $\frac{1}{16}\,Q\,l$ vor Augen behält. Allein, wie man bereits in der Anmerkung zum §. 199 auseinander gesetzt hat, ist dieses Resultat $\frac{1}{16}\,Q\,l$ unrichtig, und dafür $\frac{1}{12}\,Q\,l$ zu setzen. Wird diese Verbesserung eingeführt, so verschwindet die beobachtete Anomalie. Indessen ist nicht zu übersehen, dass bei einer solchen Vergleichung keineswegs die Identität der beiderseitigen Zustände erwartet werden darf, indem diese eigentlich nur bei dem fortwährenden Wachsen von N und n immer näher kommen, ohne jemals vollkommen gleich zu werden.

Fig. 273.



stellen kann, wobei x die Abscissen, und $St.(M)$ die Ordinaten repräsentiren. Geschieht diess, so kommt man auf die Fig. 273. Die Curve daselbst ist eine Parabel, welche durch den Wendepunct F geht. Ihre Axe $\overline{Hh}$ liegt vertical, und es ist

$$\overline{A_1H} = \overline{HF} = \tfrac{1}{2}\overline{A_1F} = \left(\frac{D_1}{Q}\right)l \quad . \quad . \quad (503).$$

Ferner ist der grösste numerische Werth von den positiven Kraftmomenten durch die Ordinate $\overline{A_2a_2}$, von den negativen hingegen durch die Ordinate $\overline{Hh}$ repräsentirt. Hiernach findet die grösste Anspruchsnahme an einer der Stellen A_2 und H, oder an beiden zugleich statt. Die Lage der Stelle H ergibt sich aus der Gleichung (503), und zwar ist für

$N=2, \overline{A_1H} = \frac{1}{2}l = 0{\cdot}5000\,l$	$N=7, \overline{A_1H} = \frac{41}{104}l = 0\,3942\,l$
$N=3, \overline{A_1H} = \frac{3}{8}l = 0\,3750\,l$	$N=8, \overline{A_1H} = \frac{56}{142}l = 0{\cdot}3944\,l$
$N=4, \overline{A_1H} = \frac{4}{10}l = 0{\cdot}4000\,l$	$N=9, \overline{A_1H} = \frac{153}{388}l = 0{\cdot}3943\,l$
$N=5, \overline{A_1H} = \frac{11}{28}l = 0{\cdot}3929\,l$	$N=10, \overline{A_1H} = \frac{209}{530}l = 0{\cdot}3943\,l$
$N=6, \overline{A_1H} = \frac{15}{38}l = 0{\cdot}3947\,l$	$N=\infty, \overline{A_1H} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right)l = 0{\cdot}3943\,l$

(504).

Heisst man die beiden grössten numerischen Werthe der positiven und negativen statischen Kraftmomente in Uebereinstimmung mit dem §. 124, $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, so hat man den ersten aus der Gleichung (501) für $x=l$, den letzten aber aus derselben Gleichung für $x=\overline{A_1H}=\left(\frac{D_1}{Q}\right)l$, und zwar ohne Rücksicht auf das Zeichen, zu bestimmen. Führt man diese Substitutionen aus, so erhält man, wenn man der Kürze halber $\frac{D_1}{Q}=\gamma$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} R_1 z_1 &= (\tfrac{1}{2}Q - D_1)l = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{D_1}{Q}\right)Ql = (\tfrac{1}{2}-\gamma)\,Ql \\ \text{und} \\ R_2 z_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{D_1^2}{Q}\right)l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D_1}{Q}\right)^2 Ql = \tfrac{1}{2}\gamma^2 Ql \end{aligned}\right\} \quad (505).$$

Tragvermögen.

§. 228.

Allgemeine Formeln. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt nach Umständen entweder in A_2 oder in H, oder an beiden Stellen zugleich. Natürlich gilt diess auch für die symmetrisch gelegenen Stellen. Bezeichnet man daher im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes in A_2 mit M_1, und in H mit M_2, das Tragvermögen aber mit $Max.\,Q$, und berücksichtigt man die Bemerkungen im §. 124, so wie die Gleichungen (505), so hat man allgemein

$$\text{entweder } M_1 = (\tfrac{1}{2} - \gamma)\, l \;.\; Max.\,Q$$
$$\text{oder } \quad M_2 = \tfrac{1}{2}\gamma^2 l \quad .\; Max.\,Q$$

und hieraus

$$Max.\,Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{2 M_1}{(1-2\gamma) l} \\ \text{oder } \dfrac{2 M_2}{\gamma^2 l} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (506).$$

Sind nun 2, 3, 4, etc. Stützen vorhanden und sucht man der Reihe nach die entsprechenden Tragfähigkeiten per Tragfeld, so erhält man mit Berücksichtigung der correspondirenden Werthe für γ, welche in der zweiten verticalen Colonne der Tabelle im §. 223 enthalten sind, folgende besondere Resultate:

$$
\left.\begin{array}{lll}
N = 2, \; Max.\,Q = & & 8\,\frac{M_2}{l} \\
N = 3, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 8\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 14{\cdot}2222\,\frac{M_2}{l} \\
N = 4, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 10\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}5\,\frac{M_2}{l} \\
N = 5, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9\;3333\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}9587\,\frac{M_2}{l} \\
N = 6, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}5000\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8356\,\frac{M_2}{l} \\
N = 7, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}4545\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8685\,\frac{M_2}{l} \\
N = 8, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}4667\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8571\,\frac{M_2}{l} \\
N = 9, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}4634\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8621\,\frac{M_2}{l} \\
N = 10, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}4643\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8614\,\frac{M_2}{l} \\
\cdots\cdots\cdots & & \\
N = \infty, \; Max.\,Q = & \text{entw.} & 9{\cdot}4641\,\frac{M_1}{l} \\
 & \text{oder} & 12{\cdot}8616\,\frac{M_2}{l}
\end{array}\right\} \quad (507).
$$

Von den Alternativwerthen ist stets der kleinere zu wählen.

§. 229.

Besondere Eigenschaften.

1. Bei zwei Stützen hat das Tragvermögen nur den Werth $\frac{8\,M_1}{l}$, und der gefährliche Querschnitt ist in der Mitte des Trägers vorhanden.

2. Ist $M_1 = M_2 = M$, so gelten von den Alternativwerthen jene mit den kleineren numerischen Coefficienten. Der gefährliche Querschnitt liegt sodann von $N = 3$ Stützen angefangen stets bei der zweiten Stütze. Bezeichnet man die Werthe von *Max. Q* mit Zeigern, welche der Stützenzahl N entsprechen, so hat man

$$\left.\begin{array}{l|l} Max.\,Q_2 = 8 \cdot \frac{M}{l} & Max.\,Q_7 = 9{\cdot}4545 \cdot \frac{M}{l} \\ Max.\,Q_3 = 8 \cdot \frac{M}{l} & Max.\,Q_8 = 9{\cdot}4667 \cdot \frac{M}{l} \\ Max.\,Q_4 = 10 \cdot \frac{M}{l} & Max.\,Q_9 = 9{\cdot}4634 \cdot \frac{M}{l} \\ Max.\,Q_5 = 9{\cdot}3333 \cdot \frac{M}{l} & Max.\,Q_{10} = 9{\cdot}4643 \cdot \frac{M}{l} \\ & \cdots\cdots \\ Max.\,Q_6 = 9{\cdot}5 \cdot \frac{M}{l} & Max.\,Q_\infty = 9{\cdot}4641 \cdot \frac{M}{l} \end{array}\right\} \quad . \quad (508).$$

Wenn daher Träger von einem bestimmten Querschnitte und Materiale auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stets dieselbe Entfernung der Tragstützen gilt, so ist in dem Falle $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) das grösste Tragvermögen per Tragfeld bei $N = 4$, das kleinste Tragvermögen hingegen bei $N = 2$ und $N = 3$ Stützen vorhanden, in welchen beiden letzten Fällen gleiche Werthe zum Vorschein kommen. Das Verhältniss zwischen den Werthen dieses kleinsten und grössten Tragvermögens ist.

$$Max.\,Q_2 : Max.\,Q_3 : Max.\,Q_4 = 1 : 1 : 1{\cdot}25.$$

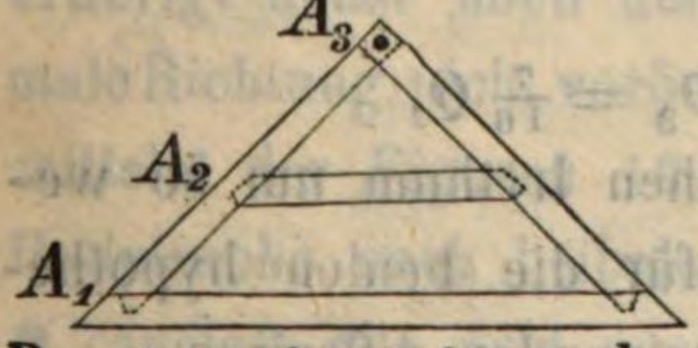
3. Ist M_1 von M_2 verschieden, so gelangt man auch hier, wie im §. 217, zu analogen Schlussfolgerungen.

Anhang zum 7. und 8. Kapitel.

Bemerkungen für die Praxis. Bei den Betrachtungen in den vorigen zwei Kapiteln wurde vorausgesetzt, dass der auf mehreren Stützen ruhende Träger seiner ganzen Länge nach

aus einer ununterbrochenen Materie bestehe, und dass die einzelnen Stützpuncte unverrückbar seien. Es ist daher in einem vorkommenden Falle zu überlegen, inwieferne diese Bedingungen erfüllt werden können. Was die letzte Bedingung betrifft, so kann dieselbe in der Regel auf eine genügende Weise erreicht werden. Nicht so die erste. Die Annahme der Ununterbrochenheit der Materie des Trägers ist oft von der Wahrheit zu weit entfernt, als dass man dieselbe gelten lassen kann. Manchmal ist der Träger aus mehreren Theilen zusammengesetzt, manchmal ist er an mehreren Stellen durchlöchert, eingeschnitten u. s. w. Man hat sodann den Einfluss dieser Umstände auf das Verhalten des Trägers einer Schätzung zu unterziehen. Diese wird sich durch passende Combinirung der Resultate, welche auf die Ununterbrochenheit der Materie Bezug nehmen, mit der practischen Anschauung, welche sich auf den jedesmal vorliegenden Fall bezieht, ergeben. Dafür lassen sich keine eigentlichen Regeln aufstellen. Es werden sich jedoch immer Anhaltspuncte finden lassen, welche solche Abschätzungen ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums ermöglichen können. Wird z. B. der Dachsparren $A_1 A_3$ (Fig. 274) der Betrachtung unterzogen, so ist, abgesehen von seiner schiefen Lage, zunächst der Fall der Unterstützung eines Trägers $A_1 A_3$ an den drei Puncten A_1, A_2 und A_3 vorhanden. Wäre nur der Sparren von A_1 bis A_3 ein vollkommenes und homogenes Prisma, und die Hypothese der Unverrückbarkeit der drei Stützpuncte zulässig, so hätte man unter der Voraussetzung einer gleichförmig vertheilten Belastung, wenn der Stützpunct A_2 in der Mitte zwischen A_1 und A_3 liegt, nach der Tabelle im §. 223 für den Druck auf den Stützpunct

Fig. 274.



$$A_1 \ldots D_1 = \tfrac{3}{8} Q$$
$$A_2 \ldots D_2 = \tfrac{10}{8} Q$$
$$\text{und } A_3 \ldots D_3 = \tfrac{3}{8} Q.$$

Q bezeichnet die von jeder Sparrenhälfte $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ zu tragende Belastung, und es ist sowohl die Wirkung dieser, als auch jene der Drücke normal auf die Sparrenrichtung zu verstehen. Die gefundenen Resultate können jedoch nicht dem practisch vorliegenden Falle genügen. Es hat nämlich der Sparren keineswegs die prismatische Form, denn diese ist durch die Verschneidungen an den beiden Enden und durch das Zapfenloch in der Mitte unterbro-

chen. Da das statische Kraftmoment in der Gegend der Enden des Sparrens sehr klein ist, so leuchtet ein, dass die erwähnten Verschneidungen diejenigen Resultate, welche ohne deren Berücksichtigung sich ergeben, nicht wesentlich stören werden, wenn dieselben nur überhaupt der gewünschten Solidität der Verbindung entsprechen. Eben so wird man einen erheblichen Fehler nicht begehen, wenn man die Unterstützungspuncte in der Ueberzeugung als unausweichbar gelten lässt, dass die Praxis genügende Mittel besitzt, um diese Puncte gehörig zu fixiren. Es handelt sich also eigentlich nur um die Abschätzung des Einflusses, welchen das Zapfenloch in der Mitte A_2 haben kann. Zu diesem Behufe beachte man, dass die fraglichen Drücke die Werthe

$$D_1 = \tfrac{1}{2}Q,\ D_2 = Q \text{ und } D_3 = \tfrac{1}{2}Q$$

annehmen, wenn jede Sparrenhälfte für sich, also zwischen beiden in A_2 keine Verbindung vorhanden wäre. Man kennt jetzt die Resultate für zwei Zustände, von welchen zwar keiner der wahre, jedoch zuzugeben ist, dass dieser zwischen beide fallen muss. Lässt man daher die Wahrheit in der Mitte liegen, und nimmt demgemäss an, es sei eigentlich

$$D_1 = \tfrac{7}{16}Q,\ D_2 = \tfrac{18}{16}Q \text{ und } D_3 = \tfrac{7}{16}Q,$$

so wird man in diesem Falle einen gefährlichen Irrthum um so weniger zu besorgen haben, als die Resultate für die beiden hypothetischen Gränzzustände selbst nicht viel von einander differiren.

Ist man einmal so weit gelangt, so unterliegt die Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens nach der gegebenen Anleitung keinem Anstande.

Was die Combinirung der im 7. und 8. Kapitel erörterten Fälle, wenn nämlich Belastungen in der Mitte der Tragfelder sich concentriren, und ausserdem eine gleichförmige vertheilte Last vorhanden ist, anbelangt, so bietet dieselbe gleichfalls keine Schwierigkeiten dar.

Dritter Abschnitt.

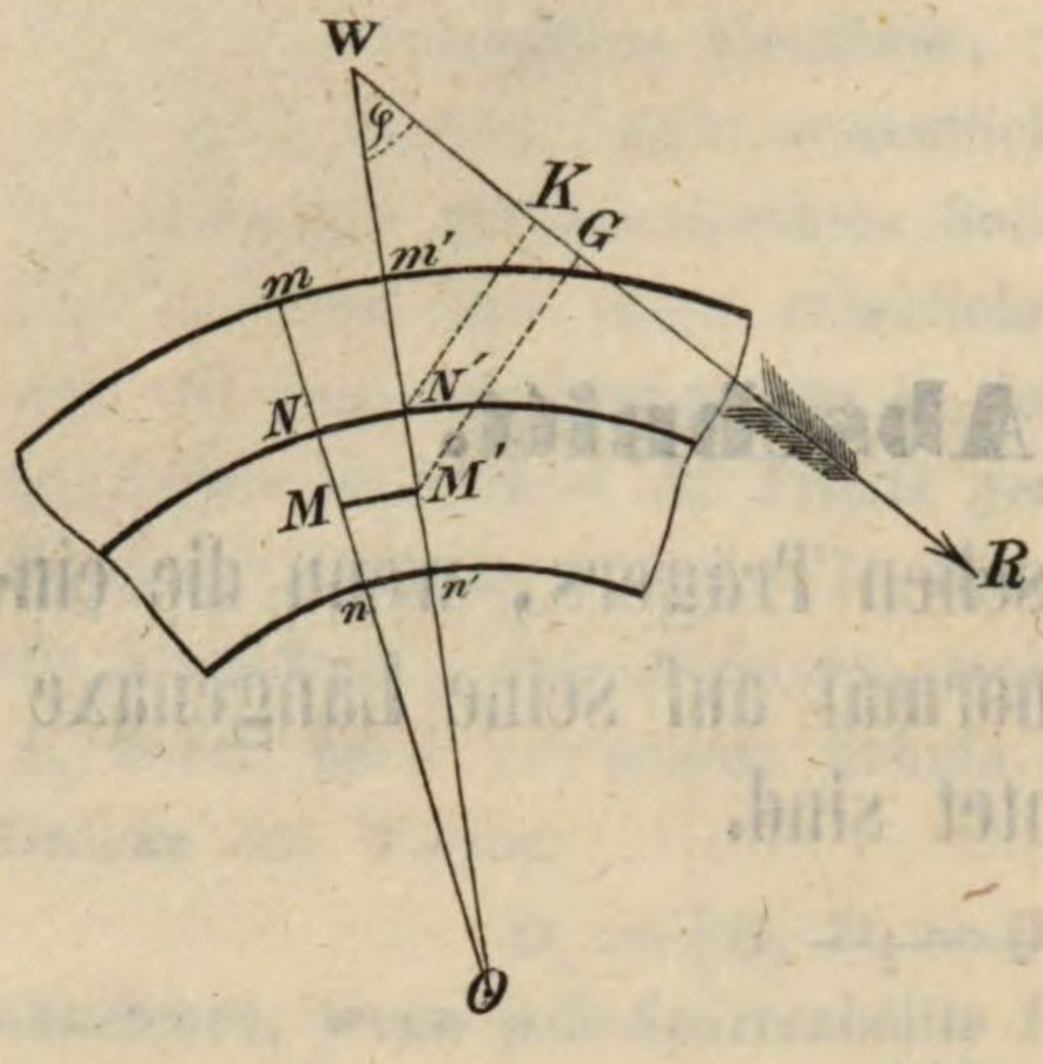
Widerstand eines prismatischen Trägers, wenn die einwirkenden Kräfte nicht normal auf seine Längenaxe gerichtet sind.

§. 230.

Vorerinnerung. Bisher hat man den Widerstand eines prismatischen Trägers unter der Voraussetzung behandelt, wenn die einwirkenden Kräfte normal auf seine Längenaxe gerichtet sind. Es erübrigt daher noch die Untersuchung solcher Fälle, wo jene normale Richtung nicht vorhanden ist. Es leuchtet ein, dass auch dann die mittelst der Figuren 19, 20 und 21 gewählte Anschauungsweise der Hauptsache nach beibehalten werden kann, wenn nur die Resultirende R (anstatt wie dort normal auf die Längenaxe) in die entsprechende schiefe Richtung gebracht wird. Doch ist die Zerlegung der Resultirenden in die zwei Componenten R_1 und R_2 (Fig. 21), beziehungsweise parallel zu dem Querschnitte und normal auf diesen, beizubehalten, so dass dieselben eben so, wie in den Gleichungen (28) und (29) durch die Relationen $R_1 = R \cos\varphi$ und $R_2 = R \sin\varphi$ ausgedrückt sind, wenn der Winkel φ auch hier die Neigung der Resultirenden R gegen die Richtung des Querschnittes mn anzeigt. Nur entspricht jener Winkel nicht mehr, wie in der Fig. 39, der Gleichung $tang\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, und er darf auch nicht, wie dort, als durchgehends klein angesehen werden, indem er je nach Umständen alle Werthe von 0 bis 360^0 annehmen kann. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen kann man sich erlauben, die auf die Biegung Bezug nehmenden allgemeinen Resultate aus dem zweiten Abschnitte ersten Hauptstückes in ihrer Wesenheit hierher zu übertragen.

§. 231.

Fig. 275.



Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichtes. Dem vorigen §. zu Folge und unter Beibehaltung der im zweiten Abschnitte des ersten Hauptstückes gewählten Bezeichnungen ist die Fig. 275 auf folgende Weise zu verstehen: In mn und $m'n'$ sind zwei unendlich nahe Querschnitte, NN' ist die durch ihre Schwerpuncte gehende Längenaxe, und MM' zeigt die Lage der neutralen Schichte an, während R die Resultirende der einwirkenden Kräfte vorstellt, die in Bezug auf den Querschnitt mn in Betracht zu kommen haben. Ferner hat man

$mn = h$	$MO = \varrho$	die Spannung per □″ in m . $= s$,
$Mm = h_1$	$NO = \varrho'$	die Pressung per □″ in n . $= p$,
$Mn = h_2$	$N'K = z$	und das Trägheitsmoment des
$Nm = h'$	$M'G = Z$	Querschnittes in Bezug auf die
$Nn = h''$	$N'W = w$	durch seinen Schwerpunct parallel
$MN = e$		zur neutralen Schichte gehende
		Axe . . . . . $t = fd^2$

zu setzen, und sofort von den Gleichungen

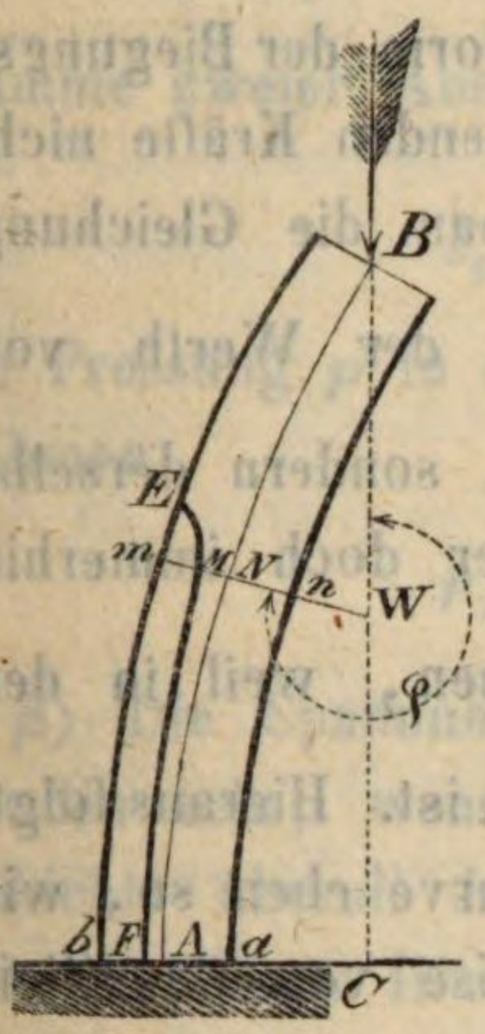
$$\left.\begin{array}{l|l|l} e = \dfrac{d^2}{w} = \dfrac{d^2 \sin\varphi}{z} & \varrho = \dfrac{mt}{Rz} & \text{und} \\ h_1 = h' + e & \varrho' = \varrho + e & \dfrac{s}{h_1} = \dfrac{p}{h_2} = \dfrac{m}{\varrho} \\ h_2 = h'' - e & \varrho' = \dfrac{d^2}{z}\left(\dfrac{mf}{R} + \sin\varphi\right) & \end{array}\right\} (509)$$

Gebrauch zu machen.

Ungeachtet diese Gleichungen aus dem ersten Hauptstücke anzuwenden sind, so erhalten doch die Endresultate zuweilen eine andere Gestalt als dort. So kommt z. B. hinsichtlich der neutralen Schichte zu bemerken:

1. Wenn, wie in der Fig. 276, für einen Querschnitt mn der Durchschnittspunct W auf der concaven Seite der Biegung liegt, so

Fig. 276.



wird $\varphi > 180^o$, daher e mit $\sin\varphi$ negativ, was anzeigt, dass sodann die neutrale Schichte, nicht zwischen N und n, sondern zwischen N und m fällt.

2. Es kann geschehen, dass

$$e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} = \frac{d^2}{w}$$

für keinen Querschnitt verschwindet, daher auch die neutrale Schichte nirgends durch den Schwerpunct des Querschnittes gehen wird. Dieser Fall tritt z. B. bei dem Ständer (Fig. 276) ein. Es ist nämlich daselbst

$$e = \overline{MN} = \frac{d^2}{\overline{NW}},$$

wo $\overline{NW}$ nie ∞, also e nie Null werden kann, so dass die neutrale Schichte EMF nirgends mit der Längenaxe zusammentrifft.

3. In manchen Fällen existirt keine neutrale Schichte. Gesetzt, es wäre in dem gewählten Falle (Fig. 276) für jeden Querschnitt

$$e = \frac{d^2}{w} > \overline{Nm} = h',$$

so würde die krumme Linie, welche die Lage der neutralen Schichte vorzustellen hätte, ausserhalb des Ständers fallen, also eine solche eigentlich nicht vorhanden sein. Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe h wäre z. B., wenn die Biegung $\overline{AC} = \delta$ in der Höhenrichtung h stattfindet, somit $t = \frac{1}{12} f h^2$ und $d^2 = \frac{1}{12} h^2$ zu setzen ist,

$$e = \overline{AF} = \frac{d^2}{\delta} = \frac{h^2}{12\,\delta},$$

wesshalb wegen $h' = \frac{1}{2} h$ die obige Ungleichung auf die Bedingung

$$\delta < 6\,h$$

führt, bei welcher sowohl in dem Querschnitte $a\,b$, als auch in den anderen Querschnitten keine neutralen Fasern vorkommen, zumal in jedem anders gelegenen Querschnitt $m\,n$

$$\overline{NW} = w < \overline{AC} = \delta \text{ und } \overline{MN} > \overline{AF}$$

anzunehmen ist. Jene Bedingung aber ist in der Praxis in der Regel vorhanden.

§. 232.

Biegungscurve. Zur Bestimmung der Form der Biegungscurve in einem solchen Falle, wenn die einwirkenden Kräfte nicht normal auf die Längenaxe gerichtet sind, hat man die Gleichung $\varrho' = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + sin\varphi\right)$ zu benützen. Obwohl der Werth von $sin\,\varphi$ nicht als klein angenommen werden darf, sondern derselbe sogar bis zur Höhe 1 gelangen kann, so wird er doch immerhin gegen die Grösse $\frac{mf}{R}$ vernachlässigt werden können, weil in den gewöhnlichen Fällen diese letzte bedeutend grösser ist. Hieraus folgt, dass man Behufs der Aufsuchung der Biegungscurve eben so, wie in den bisher betrachteten Fällen annäherungsweise von der Gleichung $\varrho = \varrho' = \frac{mt}{Rz}$ Gebrauch machen, somit auch die Relationen (47), (48) und (49) benützen kann, wenn nur das statische Kraftmoment Rz dem betreffenden Falle angepasst wird. Dieses Verfahren ist offenbar gleichbedeutend mit jenem, welches sich ergäbe, wenn man die neutrale Schichte und die Längenaxe des Prismas zusammenfallen liesse.

§. 233.

Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragvermögen. Auf die Betrachtungen im §. 74 zurückkehrend, und in Berücksichtigung des in diesem Abschnitte bereits Gesagten leuchtet ein, dass die Fig. 72 auch in denjenigen Fällen massgebend sein kann, wo die Resultirende R nicht, wie dort, normal auf die Längenaxe gerichtet ist. Es werden nämlich die gegebenen Gleichungen (92)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h'\,Rz}{t} + \frac{R\,sin\,\varphi}{f} \\ \text{und } p &= \frac{h''\,Rz}{t} - \frac{R\,sin\,\varphi}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (510)$$

in solchen Fällen ebenfalls stattfinden, wenn nur statt R, z, φ die richtigen Werthe substituirt werden. Demgemäss und mit Beziehung auf den §. 74 kann für jeden Querschnitt mn (Fig. 275) Folgendes behauptet werden:

α) Die Spannung s, welche in m vorwaltet, besteht aus der Summe zweier Anspruchsnahmen, nämlich

$$s_1 = \frac{h' R z}{t} \text{ und } s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f};$$

die Pressung p in n hingegen aus der Differenz zweier Anspruchsnahmen

$$p_1 = \frac{h'' R z}{t} \text{ und } s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f}.$$

β) Die Spannung s_1 und die Pressung p_1 würden allein vorhanden sein, wenn die durch die Biegung entstehende neutrale Schichte überall durch den Schwerpunct des Querschnittes gehen, also in dieser Hinsicht von dem Einflusse der Componenten R_2 (Fig. 72) abstrahirt würde.

γ) Die Anspruchsnahme s_2 wird durch die Componente R_2 hervorgerufen und besteht in einer Spannung oder Pressung, je nachdem $s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f}$ positiv oder negativ ist. Die Componente R_2 erzeugt nämlich für sich allein betrachtet nach Umständen eine Spannung oder eine Pressung, welche man sich gleichmässig über den Querschnitt f vertheilt vorzustellen hat.

Diese Bemerkungen führen zur Ueberzeugung, dass man bei der Berechnung der Anspruchsnahme des Materiales die ad β und γ erwähnten Wirkungen abgesondert behandeln darf, wodurch ein Anhaltspunct geboten ist, eine solche Untersuchung auf eine einfache Weise durchzuführen. Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei dem Umstande, als s_2 bald eine Spannung, bald eine Pressung vorstellt, jede der eigentlichen Anspruchsnahmen in m und n, nämlich sowohl s als auch p bald aus einer Summe, bald aus einer Differenz jener Theile bestehen, und letztere auch Null oder negativ werden kann, so dass zuweilen s und p gleichzeitig Spannungen, oder gleichzeitig Pressungen sein können.

Wird diese Anschauung festgehalten, so ergeben sich zur Bestimmung der Lage des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens folgende Regeln:

1. Man suche die Biegungscurve nach §. 232 unter der Voraussetzung auf, dass die neutrale Axe überall durch den Schwerpunct

des Querschnittes geht. Diese Biegungscurve wird sich der Wahrheit hinreichend annähern.

2. Man suche sodann für einen beliebig gelegenen Querschnitt die Spannung s_1 und die Pressung p_1 in denjenigen Fasern, welche von der neutralen Axe am entferntesten liegen.

3. Hierauf suche man die in jenen Fasern entstehende Anspruchsnahme s_2, welche zufolge der Componenten $R_2 = R \sin \varphi$ zu berücksichtigen ist.

4. Man setze endlich nach der Relation (510) $s = s_1 + s_2$ und $p = p_1 - s_2$, und untersuche, an welchen Stellen des Prismas die grössten numerischen Werthe von s und p eintreten. Diese Stellen werden die Lage des gefährlichen Querschnittes entscheiden.

5. Die gefundenen grössten numerischen Werthe für s und p dürfen die Elasticitätsgränzen nicht überschreiten, sondern höchstens erreichen. Diese Bedingung ist geeignet, auf die grössten zulässigen offensiven Kräfte und sofort auf das Tragvermögen zu schliessen.

Nach dieser Methode hat man bereits im §. 74 ein Beispiel behandelt, nur sind dort die Werthe von s_2 so gering ausgefallen, dass sie fast durchgehends vernachlässigt werden konnten. Eine solche Vernachlässigung darf jedoch nicht immer eintreten, wenn die Resultirende R eine schiefe Richtung gegen die Längenaxe hat, denn die Kraft s_2 kann manchmal so bedeutend sein, dass sie sogar die Anspruchsnahmen s_1 und p_1 übertrifft.

Erstes Kapitel.

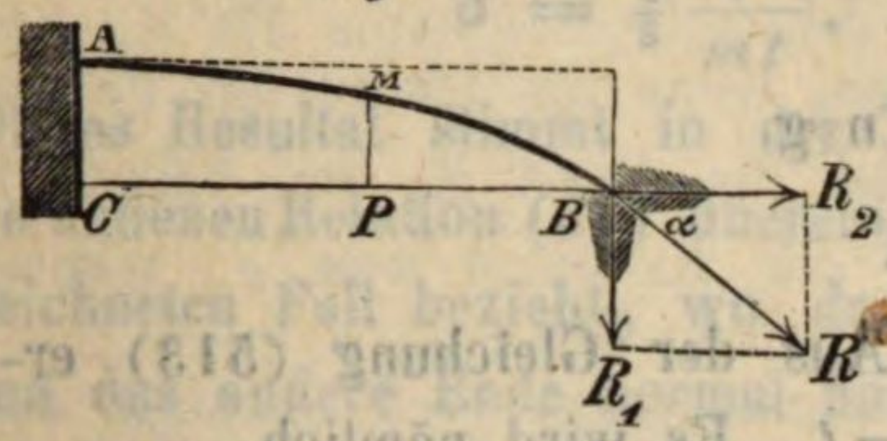
Widerstand eines Trägers, welcher an einem Ende festgehalten, und am andern Ende von zwei Kräften in Anspruch genommen wird, von denen die eine in der Richtung der Längenaxe, die andere aber normal darauf wirkt.

§. 234.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Es sei der Träger AB, Fig. 277, an einem Ende festgehalten, am andern

Ende aber von den Kräften R_1 und R_2 in Anspruch genommen, von denen vor Eintritt der Biegung R_2 in der Richtung der Längenaxe, R_1 aber normal auf derselben wirkend war. Diese beiden Kräfte haben offenbar eine Resultirende R, die mit der ursprünglichen geraden Richtung der Längenaxe einen stumpfen Winkel einschliesst.

Fig. 277.



Es sei in Folge der Biegung die Längenaxe aus ihrer geraden Richtung in die Biegungscurve AB übergegangen, jedoch die Biegung so klein, dass noch immer nahezu die Kraft R_1 parallel zu einem beliebigen Querschnitt in M, die Kraft R_2 aber normal auf denselben wirkend angesehen werden kann. Man nehme ferner Behufs der anzustellenden Untersuchung B als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, und die zur ursprünglichen Längenaxe parallele Gerade BC als Abscissenaxe an, so dass für die gewählte Stelle in M die Abscisse $\overline{BP} = x$ und die Ordinate $\overline{MP} = y$ wird. Endlich setze man die Coordinaten für die Wurzel A, nämlich $\overline{BC} = l$ und $\overline{AC} = \delta$, wobei l sehr nahe die Länge des Trägers AB und δ seine Biegung vorstellt. Nimmt man jetzt im Sinne des §. 232 an, dass AB die Lage der neutralen Schichte selbst wäre, so kann man im Geiste der Gleichung (47) unter Vernachlässigung des eigenen Trägergewichtes die Bedingungsgleichung aufstellen:

$$-mt\frac{d^2y}{dx^2} = R_1 x - R_2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (511)^*).$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{R_1}{mt} = n$ und $\frac{R_2}{mt} = q$, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = nx - qy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (512).$$

Das Integral hiervon, zugleich die Gleichung der Biegungscurve, ist

$$y = \frac{n}{q}\left[x - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (513),$$

---

*) $mt\frac{d^2y}{dx^2}$ ist hier negativ zu nehmen, weil die positiven Ordinaten oberhalb der Abscissenaxe liegen, während dieselben bei der Bildung der Gleichung (47) unterhalb der genannten Axe angenommen worden sind.

wenn $e = 2{\cdot}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und bedacht wird, dass für den Punct B die Coordinaten x und y verschwinden müssen.

Biegung.

§. 235.

Allgemeine Gleichung. Aus der Gleichung (513) erhält man die Biegung $y = \delta$ für $x = l$. Es wird nämlich

$$\delta = \frac{n}{q}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{l\sqrt{q}} - e^{-l\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right], \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (514)$$

Z. B. Es befinde sich eine schmiedeeiserne Stange in dem Falle Fig. 277. Dieselbe sei horizontal, und ihr Querschnitt ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h. Es sei ferner

$b = 1\frac{1}{2}''$	$R_1 = 2$ Ztr.	und es werde von
$h = 2''$	$R_2 = 400$ Ztr.	dem eigenen Ge-
$l = 100''$	$m = 250000$	wichte abstrahirt.

Nach diesen Daten findet man

$f = bh = 3\square''$	$n = \frac{R_1}{mt} = 0{\cdot}000008$	$2l\sqrt{q} = 8$
$t = \frac{1}{12}fh^2 = 1$	$q = \frac{R_2}{mt} = 0{\cdot}0016$	und
$mt = 250000$	$\sqrt{q} = 0{\cdot}04$	$e^{2l\sqrt{q}} = e^8 = 2982,$

also die Biegung

$$\delta = \frac{1}{200}\left[100 - 25 \,.\, \frac{2981}{2983}\right] = 0{\cdot}375 \text{ Zoll.}$$

§. 236.

Näherungsformeln. I. Sind die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{2l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise

$$\delta = \tfrac{1}{3}\frac{R_1 l^3}{m t}\left(1 - \tfrac{2}{5} q l^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (515)\ *)$$

setzen. Ist insbesondere $R_2 = o$, also auch $q = o$, so erhält man

$$\delta = \tfrac{1}{3}\frac{R_1 l^3}{m t}.$$

Dieses Resultat stimmt in der That mit der im ersten Hauptstücke gefundenen Relation (61) überein, welche sich auf den dort mit I bezeichneten Fall bezieht, wo das eine Ende des Prismas festgehalten und das andere Ende normal auf die Längenaxe belastet erscheint.

Betrachtet man z. B. wieder die vorige schmiedeeiserne Stange, und nimmt $R_2 = 2$ Zentner an, während man die übrigen Daten beibehält, so ist $q = \frac{R_2}{m t} = 0{\cdot}000008$, und $\frac{2}{5} q l^2 = 0{\cdot}032$, also klein genug, um die Anwendung der angenäherten Formel (515) zu rechtfertigen, nach welcher man findet:

$$\delta = \tfrac{1}{3}\frac{R_1 l^3}{m t}\left(1 - \tfrac{2}{5} q l^2\right) = \tfrac{8}{3}\left(1 - 0{\cdot}032\right) = 2''{\cdot}584.$$

Vernachlässigt man auch das Glied $\frac{2}{5} q l^2$, so wird $\delta = 2\frac{2}{3}''$, also ein von der Wahrheit noch immer nicht wesentlich abweichendes Resultat.

II. Sind die Werthe von l und R_2 gross genug, damit $\left\{\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right\}$ sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich

---

*) Es ist allgemein

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + \ldots,$$

also auch

$$e^{2l\sqrt{q}} = 1 + 2 l q^{\frac{1}{2}} + 2 l^2 q + \tfrac{4}{3} l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3} l^4 q^2 + \tfrac{4}{15} l^5 q^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

und hiernach

$$\delta = \frac{p}{q}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \frac{2 l q^{\frac{1}{2}} + 2 l^2 q + \tfrac{4}{3} l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3} l^4 q^2 + \tfrac{4}{15} l^5 q^{\frac{5}{2}} + \ldots}{2 + 2 l q^{\frac{1}{2}} + 2 l^2 q + \tfrac{4}{3} l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3} l^4 q^2 + \ldots}\right] =$$

$$= \frac{p l}{q}\left[1 - \frac{1 + l q^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3} l^2 q + \tfrac{1}{3} l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{15} l^4 q^2 + \ldots}{1 + l q^{\frac{1}{2}} + l^2 q + \tfrac{2}{3} l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{3} l^4 q^2 + \ldots}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{3} p l^3 \left[\frac{1 + l q^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{5} l^2 q + \ldots}{1 + l q^{\frac{1}{2}} + l^2 q + \ldots}\right] = \tfrac{1}{3}\frac{R_1 l^3}{m t}\left(1 - \tfrac{2}{5} q l^2 + \ldots\right).$$

erlauben, diesen Bruch mit der Einheit selbst zu verwechseln. Dann ist näherungsweise

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}\left(l - \frac{1}{\sqrt{q}}\right) = \frac{R_1}{R_2} l\left(1 - \frac{1}{l\sqrt{q}}\right) = \frac{R_1}{R_2}\left(l - \sqrt{\frac{mt}{R_2}}\right) \quad (516).$$

Diese Formel kann Anwendung finden, wenn die Länge des Prismas im Vergleiche zum Querschnitte, und die Kraft R_2 im Vergleiche zur Kraft R_1 so gross sind, dass der Exponent von e, nämlich $2l\sqrt{q} = 2l\sqrt{\frac{R_2}{mt}}$, die Zahl 5 überschreitet, wie diess in dem Beispiele am Schlusse des §. 235 der Fall gewesen ist.

Tragvermögen.

§. 237.

Allgemeine Relation.

Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct M ist mittelst der Gleichung (511) ausgedrückt. Bezeichnet man dasselbe dem §. 233 gemäss mit Rz, so hat man

$$Rz = R_1 x - R_2 y = R_2\left(\frac{R_1}{R_2} x - y\right),$$

und mit Rücksicht auf den Werth (513) für y

$$Rz = \frac{R_1}{\sqrt{q}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\} = R_1\sqrt{\frac{mt}{R_2}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\}.$$

Nach den in der Fig 275 angenommenen Bezeichnungen und nach dem §. 233 ist die Spannung der Fasern in m

$$s_1 = \frac{h' Rz}{t} = h' R_1\sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\}$$

und die Pressung in n

$$p_1 = \frac{h'' Rz}{t} = h'' R_1\sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\},$$

welche Anspruchsnahmen in Folge der Biegung stattfinden.

Nach dem §. 233 bringt aber auch die Kraft R_2 in sämmtlichen Fasern des Querschnittes in M eine Spannung hervor, die per $\square''$ mit $s_2 = \frac{R_2}{f}$ auszudrücken ist. Man hat daher als die eigentliche Spannung in m (Fig. 275)

$$s = s_1 + s_2 = h' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} \right\} + \frac{R_2}{f},$$

und als die eigentliche Pressung in n

$$p = p_1 - s_2 = h'' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} \right\} - \frac{Rz}{f}.$$

Wird in dem letzten Ausdruck das zweite Glied grösser als das erste, somit p negativ, so findet in n gleichfalls eine Spannung statt. Jedenfalls aber nehmen die beiden Werthe für s und p mit x zu, sie werden daher für $x = l$ am grössten, wonach der gefährliche Querschnitt an dem festgehaltenen Ende A anzunehmen kommt. Dort sind die Anspruchsnahmen in den äussersten Fasern

$$\left.\begin{aligned} s &= h' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left\{ \frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1} \right\} + \frac{R_2}{f} \\ \text{und} \quad p &= h'' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left\{ \frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1} \right\} - \frac{R_2}{f} \end{aligned}\right\} \quad (517).$$

Soll nun die Elasticitätsgränze weder bei der Ausdehnung noch bei der Zusammendrückung überschritten werden, so darf höchstens $s = a$ oder $p = r$ werden.

Setzt man der Kürze wegen $\left\{ \frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1} \right\} = c$, und nennt man die grösste zulässige Verticalkraft, also das Tragvermögen, $Max. R_1$, so ist bei Erreichung einer oder beider der Elasticitätsgränzen

$$\text{entweder} \quad a = c h' \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\, Max. R_1 + \frac{R_2}{f}$$

$$\text{oder} \quad r = c h'' \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\, Max. R_1 - \frac{R_2}{f}$$

und sofort das Tragvermögen

$$Max. R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \left(\frac{af - R_2}{cfh'} \right) \sqrt{\frac{R_2 t}{m}} \\ \text{oder} \left(\frac{rf + R_2}{cfh''} \right) \sqrt{\frac{R_2 t}{m}} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (518),$$

von diesen Alternativwerthen aber der kleinere zu nehmen.

Z. B. Man suche das Tragvermögen von der im §. 235 betrachteten

schmiedeeisernen Schiene mit Rücksicht auf die dortigen Daten; nur lasse man die Kraft R_1 unbestimmt, indem man das Maximum derselben zu berechnen hat. Da der Querschnitt ein Rechteck ist, so befindet sich die durch den Schwerpunct gehende Axe in der halben Höhe, und es ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$. Nimmt man die grösste zulässige Spannung a und die gleichnamige Pressung r je mit 200 Zentnern an, so hat man in die Formeln (518) folgende Werthe zu substituiren:

$$a = r = 200,\ R_2 = 400,\ f = 3,\ h' = h'' = 1,\ t = 1,\ m = 250000,$$

$$c = \left[\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right] = \left(\frac{e^{s} - 1}{e^{s} + 1}\right) = \frac{2981}{2983},\ \text{daher nahe} = 1,$$

und man erhält für das Tragvermögen

$$Max.\ R_1 = 2{\cdot}668 \text{ Zentner.}$$

Augenscheinlich ist in diesem Falle der erste der beiden Alternativwerthe (518) der kleinere.

Die erste der beiden Formeln (518) zeigt übrigens, dass für $R_2 = af$ kein Tragvermögen vorhanden ist. Diess erklärt sich dadurch, dass sodann der Zug R_2 in der Richtung der Längenaxe allein schon genügt, die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung zu erreichen.

§. 238.

Näherungsformeln.

1. Sind wie im §. 236 ad 1 die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{2l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man näherungsweise

$$Max.\ R_1 = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{at}{l\,h'}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af}\right)\right] \\ \text{oder } \frac{rt}{l\,h''}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3mt} + \frac{1}{rf}\right)\right] \end{array}\right\}. \quad (519)\ ^*)$$

setzen.

---

*) Es ist

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} + 1}{e^{2l\sqrt{q}} - 1}\right) = \frac{2 + 2lq^{\frac{1}{2}} + 2l^2q + \frac{4}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}l^4q^2 + \ldots}{2lq^{\frac{1}{2}} + 2l^2q + \frac{4}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}l^4q^2 + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{lq^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1 + lq^{\frac{1}{2}} + l^2q + \frac{2}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \ldots}{1 + lq^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}l^2q + \frac{1}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \ldots}\right) = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{mt}{R_2}}\left(1 + \frac{1}{3}l^2q + \ldots\right),$$

also auch

Für $R_2 = 0$ wird insbesondere

$$Max.\, R_1 = \begin{cases} \text{entw.} \dfrac{a\,t}{l\,h'} \\ \text{oder} \dfrac{r\,t}{l\,h''} \end{cases}$$

übereinstimmend mit der Relation (106) im ersten Hauptstücke, wie diess auch zu erwarten war, nachdem für $R_2 = 0$ offenbar der vorliegende Fall in den dort behandelten übergeht.

Um auch die Anwendung der Formeln (519) auf ein Beispiel zu zeigen, sei wie im §. 236 für die daselbst betrachtete schmiedeeiserne Stange $t = 1$, $l = 100$, $h' = h'' = 1$, $R_2 = 2$, $f = 3$, $m = 250000$ und $a = r = 200$. Mit diesen Werthen findet aus der ersten der beiden Alternativformeln, welche den kleineren Werth gibt, $Max.\, R_1 = 2{\cdot}046$ Ztr. Für $R_2 = 0$ fände man $Max.\, R_1 = 2$ Ztr., also nahezu dasselbe Resultat.

II. Sind, wie im §. 236 ad II, die Werthe von l und q gross genug, damit $c = \left\{\dfrac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right\}$ sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich erlauben, $c = 1$ zu setzen, und das Tragvermögen aus den Alternativ-Relationen

$$Max.\, R_1 = \left\{\begin{matrix} \text{entw.} \left(\dfrac{af - R_2}{fh'}\right)\sqrt{\dfrac{R_2\,t}{m}} \\ \text{oder} \left(\dfrac{rf + R_2}{fh''}\right)\sqrt{\dfrac{R_2\,t}{m}} \end{matrix}\right\}. \quad . \quad (520).$$

zu bestimmen.

So ist diese Näherungsmethode für das Beispiel im §. 237 unbedenklich zulässig. Man findet hiermit $Max.\, R_1 = 2\frac{2}{3} = 2{\cdot}667$ Ztr., also nur um $0{\cdot}001$ von dem genaueren Werthe verschieden.

$$\left(\frac{af - R_2}{cfh'}\right)\sqrt{\frac{R_2\,t}{m}} = \left(\frac{af - R_2}{fh'}\right)\frac{t}{l}\,(1 + \tfrac{1}{3}l^2 q + \ldots) =$$

$$= \frac{at}{lh'}\left(1 - \frac{R_2}{af}\right)(1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{l^2 R_2}{mt} + \ldots) = \frac{at}{lh'}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af}\right) + \right]$$

und ebenso

$$\left(\frac{rf + R_2}{cfh''}\right)\sqrt{\frac{R_2\,t}{m}} = \frac{rt}{lh''}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3mt} + \frac{1}{rf}\right) + \right].$$

In dem untersuchten Falle dieses Kapitels wird in der Regel der erste Alternativwerth

$$Max.\ R_1 = \left(\frac{af - R_2}{fh'}\right)\sqrt{\frac{R_2 t}{m}}$$

massgebend sein, und man sieht, dass das Tragvermögen unter sonst gleichen Umständen mit dem Zuge R_2 variirt. Dasselbe wird am grössten für $\frac{d(Max.\ R_1)}{dR_2} = 0$, d. h. für

$$R_2 = \tfrac{1}{3} af,$$

und ist sodann

$$Max.\ R_1 = \tfrac{2}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{h'}\sqrt{\frac{aft}{m}} = \tfrac{2}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{afd}{h'}\sqrt{\frac{a}{m}} \quad (521),$$

wenn man $t = fd^2$ setzt.

Dieses Resultat ist wichtig. Es zeigt, dass es am vortheilhaftesten ist, wenn der Zug R_2 den dritten Theil der grössten zulässigen Spannung (af) ausmacht.

Für ein Rechteck ist $h' = \frac{1}{2}h$, $d^2 = \frac{1}{12}h^2$ und $f = bh$, daher

$$Max.\ R_1 = \tfrac{2}{9} abh\sqrt{\frac{a}{m}} = \tfrac{2}{9} af\sqrt{\frac{a}{m}} \quad . \quad . \quad (522).$$

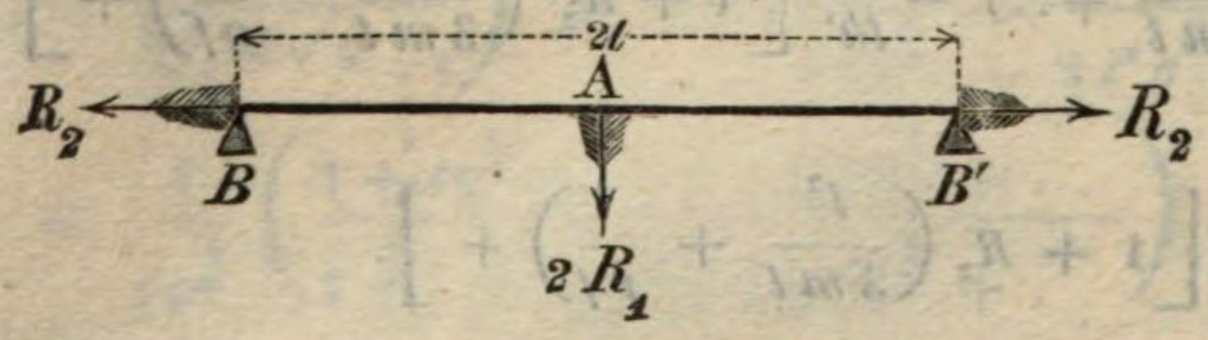
Nach Substitution der speciellen Werthe aus dem vorigen Beispiele findet man insbesondere $Max.\ R_1 = \frac{8}{3}\sqrt{2} = 3{\cdot}771$ Zentner, wenn der Bedingung gemäss $R_2 = \frac{1}{3} af = 200$ Zentner ist. Wird der Zug R_2 anders gewählt, entweder grösser oder kleiner, so wird jedenfalls das Tragvermögen verringert. Auch hat man für das vortheilhafteste Verhältniss zwischen den beiden einwirkenden Kräften

$$Max.\ R_1 : R_2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{m}} : 1 = 1 : 37{\cdot}5\sqrt{2} = 1 : 53{\cdot}03.$$

§. 239.

Anwendung auf den Fall Fig. 278. Liegt das Prisma horizontal auf zwei Stützen, und man belastet es nicht nur in der Mitte, sondern zieht auch seine Enden auseinander, so lässt sich dieser Fall auf jenen in der Fig. 277 zurückführen, wenn man

Fig. 278.



die Länge des Prismas in der Fig. 278 mit $2l$ und die Last in der Mitte mit $2R_1$ bezeichnet.

Wird von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, so kann man von den in diesem Kapitel gegebenen Formeln Gebrauch machen, und falls der im §. 237 gegebene Werth von c der Einheit nahe genug kommt, behaupten, es sei in einem solchen Falle am zweckmässigsten,

1. den Horizontalzug R_2 so zu wählen, dass zufolge des §. 238 das Verhältniss

$$R_1 : R_2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,\frac{d}{h'}\sqrt{\frac{a}{m}} : 1$$

stattfindet, und

2. den Querschnitt dreimal so gross zu machen, als er für den alleinigen Zug R_2 nothwendig wäre, um nämlich die Bedingung $R_2 = \frac{1}{3}af$ oder $f = \frac{3R_2}{a}$ zu entsprechen.

Diese Regeln können Anwendung finden bei der Spannung von eisernen Schliessen.

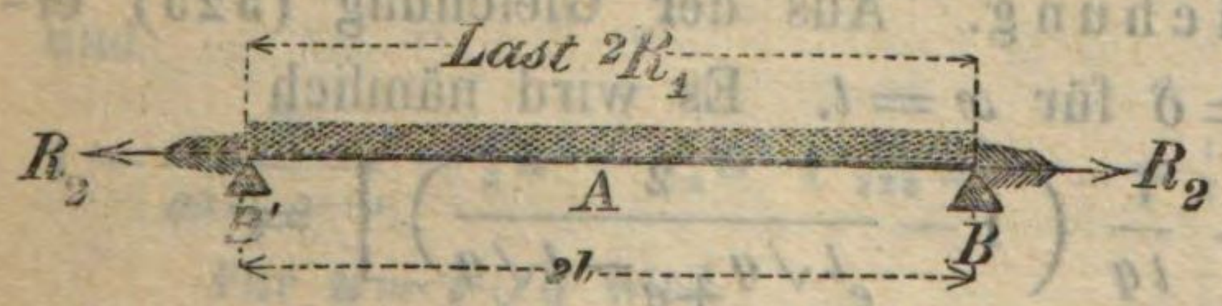
Zweites Kapitel.

Widerstand eines prismatischen Trägers, welcher seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist, wenn derselbe auf beiden Enden aufliegt, und diese letzteren auseinandergezogen werden.

§. 240.

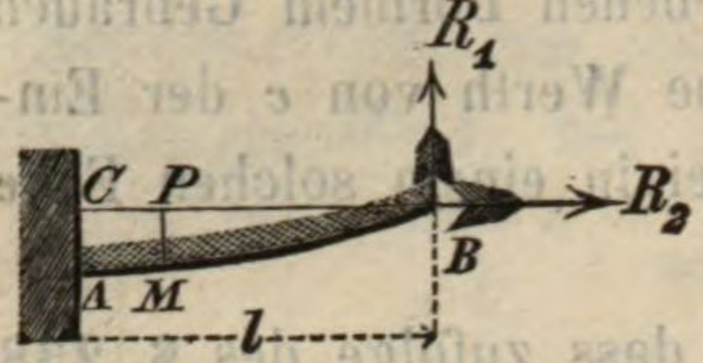
Bedingungen des Gleichgewichtes. Dieser Fall ist in der Fig. 279 dargestellt. Ist die ganze Belastung $2R_1$, so erleidet jede Stütze den Druck R_1. Werden daher die Stützen weggenommen, und an deren Statt den Drücken gleiche Kräfte nach aufwärts wirkend angebracht, so tritt keine Störung des Gleichgewichtes ein. In der Mitte A muss wegen der Symmetrie

Fig. 279.



der Anordnung die Tangente an die Biegungscurve horizontal gehen. Hiernach lässt sich der in Rede stehende Fall auf den in der Fig. 280 angezeigten zurückführen, wo der halbe Träger AB in A festgehalten, und am Ende B von den Kräften R_1 und R_2 in Anspruch genommen wird, während zwischen A und B die gleichmässig vertheilte Belastung R_1 sich befindet.

Fig. 280.



Es sei nun AB die Biegungscurve, B der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, wo die Abscissen von B gegen C und die Ordinaten nach abwärts gezählt werden, und man setze für eine beliebige Stelle M, $\overline{BP} = x$ und $\overline{MP} = y$, für den Punct A aber $\overline{BC} = l$ und die Biegung $\overline{AC} = \delta$.

In Gemässheit des §. 232 hat man jetzt

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -R_1 x + \tfrac{1}{2}\,\frac{R_1 x^2}{l} + R_2 y \quad . \quad (523)$$

und wenn man der Kürze wegen $\frac{R_1}{mt} = n$ und $\frac{R_2}{mt} = q$ setzt, auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n\left(-x + \frac{x^2}{2l}\right) + qy \quad . \quad . \quad . \quad (524).$$

Das Integrale hiervon, zugleich die Gleichung der Biegungscurve, ist

$$y = \frac{n}{q}\left[x - \frac{x^2}{2l} + \frac{1}{lq}\left(\frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} - 1\right)\right] \quad (525),$$

wo $e = 2{\cdot}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und zu beachten ist, dass für den Punct B die Coordinaten x und y verschwinden müssen.

Biegung.

§. 241.

Allgemeine Gleichung. Aus der Gleichung (525) erhält man die Biegung $y = \delta$ für $x = l$. Es wird nämlich

$$\delta = \frac{n}{q}\left[\tfrac{1}{2}l - \frac{1}{lq}\left(1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{R_1}{2R_2}\left[l - \frac{2mt}{R_2 l}\left(1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] = \quad (526).$$

Z. B. Es befinde sich eine schmiedeeiserne Schliesse in dem Falle wie in der Fig. 279. Ihr Querschnitt sei ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h, und es sei insbesondere

$b = 1\frac{1}{2}''$ | R_1 das eigene Gewicht der halben Schiene $= 1\frac{1}{2}$ Ztr.,
$h = 2''$ | $R_2 = 400$ Ztr.
$l = 200''$ | $m = 250000.$ | Hiernach hat man

$f = bh = 3\square''$ | $n = \frac{R_1}{mt} = 0{\cdot}000006$ | $l\sqrt{q} = 8$

$t = \frac{1}{12} f h^2 = 1$ | $q = \frac{R_2}{mt} = 0{\cdot}0016$ | $e^{l\sqrt{q}} = e^8 = 2982$

$mt = 250000$ | $\sqrt{q} = 0{\cdot}04$ | $e^{-l\sqrt{q}} = e^{-8} = \frac{1}{2982}$

somit

$$\delta = \frac{3}{1600}\left[200 - \frac{2}{0{\cdot}32}\left(1 - \frac{2}{2982 + \frac{1}{2982}}\right)\right] = 0''{\cdot}363.$$

§. 242.

Näherungsformeln.

I. Sind die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise setzen:

$$\delta = \frac{5}{24}\frac{R_1 l^3}{mt}\left(1 - \frac{61}{150} q l^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (527)^*)$$

---

*) Es ist allgemein

$$e^u + e^{-u} = 2\left[1 \quad \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + \ldots\right],$$

somit

$$\frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + \ldots} = 1 - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{5}{24}u^4 - \tfrac{61}{720}u^6 + \ldots,$$

und

$$1 - \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{5}{24}u^4 + \tfrac{61}{720}u^6 - \ldots = \tfrac{1}{2}u^2\left(1 - \tfrac{5}{12}u^2 + \tfrac{61}{360}u^4 - \ldots\right).$$

Für $u = l\sqrt{q}$ wird

$$1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} = \tfrac{1}{2}q l^2\left(1 - \tfrac{5}{12}q l^2 + \tfrac{61}{360}q^2 l^4 - \ldots\right),$$

Für $R_2 = o$ wird auch $q = o$, und man erhält insbesondere

$$\delta = \frac{5}{24}\,\frac{R_1 l^3}{m t} = \frac{5}{384}\cdot\frac{(2R_1)(2l)^3}{mt},$$

übereinstimmend mit der im ersten Hauptstücke gefundenen Relation (77), welche sich auf den Fall bezieht, wo die gleichmässig belastete Schiene bloss an beiden Enden aufliegen würde.

II. Ist $e^{l\sqrt{q}}$ gross genug, um $\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}$ gegen die Einheit vernachlässigen zu dürfen, so kann man sich erlauben, von der annäherungsweisen Formel

$$\delta = \frac{R_1}{2R_2}\left(l - \frac{2mt}{R_2 l}\right) = \frac{R_1}{2R_2} l\left(1 - \frac{2}{q l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (528)$$

Gebrauch zu machen. Diese Formel kann Anwendung finden, wenn die Länge der Schiene im Vergleiche zum Querschnitte, und die Kraft R_2 im Vergleiche zu R_1 gross ist, wie diess in dem Beispiele des vorigen §. der Fall war.

Wird die Belastung per Längeneinheit der Schiene mit g bezeichnet, so hat man $R_1 = g l$ und hiermit

$$\delta = \frac{g}{2R_2}\left(l^2 - \frac{2mt}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (529),$$

Hat die Schiene nur ihr eigenes Gewicht zu tragen, und ist dasselbe $= \gamma$ Zentner per Cubikzoll, so wird noch $g = f\gamma$, daher

$$\delta = \frac{f\gamma}{2R_2}\left(l^2 - \frac{2mt}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (530).$$

wo f die Querschnittsfläche der Schiene ist.

---

und in Folge dessen nach der Formel (526)

$$\delta = \frac{R_1}{2R_2}\left[l - l\left(1 - \tfrac{5}{12} q l^2 + \tfrac{61}{360} q^2 l^4 - ..\right)\right] =$$

$$= \frac{R_1}{2R_2}\left[\tfrac{5}{12} q l^3 - \tfrac{61}{360} q^2 l^5 + ..\right] = \tfrac{5}{24}\frac{R_1 l^3}{mt}\left(1 - \tfrac{61}{150} q l^2 + ..\right).$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von $q l^2$, so ist annäherungsweise

$$\delta = \tfrac{5}{24}\,\frac{R_1 l^3}{mt}\left(1 - \tfrac{61}{150} q l^2\right).$$

Tragvermögen.

§. 243.

Allgemeine Relation. Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct M ist mittelst der Gleichung (523) ausgedrückt. Bezeichnet man dasselbe dem §. 233 gemäss mit Rz, so hat man

$$Rz = -R_1 x + R_2 y + \tfrac{1}{2}\frac{R_1 x^2}{l},$$

und mit Rücksicht auf den Werth (525) für y

$$Rz = -\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{mt}{l}\left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] \quad (531).$$

Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass die Curve AB nach aufwärts gekrümmt ist, ohne dass dasselbe weiter in Betracht zu kommen hat.

Nach den in der Figur 275 angenommenen Bezeichnungen und dem §. 233 würde an der Stelle M die Spannung der äussersten Fasern an der convexen Seite der Krümmung

$$s_1 = \frac{h' Rz}{t} = \frac{m h' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right],$$

die Pressung der äussersten Fasern an der concaven Seite der Krümmung aber

$$p_1 = \frac{h' Rz}{t} = \frac{m h' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right]$$

sein, wenn die Länge des Prismas neutral geblieben wäre. Nach dem §. 233 bringt aber auch der Zug R_2 in sämmtlichen Fasern des Querschnittes eine Spannung hervor, die per $\square'$ mit $s_2 = \frac{R_2}{f}$ zu bemessen ist. Durch Combination dieser Resultate findet man nunmehr bezüglich des gewählten Querschnittes in M, die grösste Spannung

$$s = (s_1 + s_2) = \frac{m h' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] + \frac{R_2}{f},$$

und die grösste Pressung

$$p = (p_1 - s_2) = \frac{m h' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{l-\sqrt{q}}}\right] - \frac{R_2}{f}.$$

Diese Werthe für s und p wachsen in numerischer Hinsicht

mit x, und werden für $x = l$ am grössten, wornach der gefährliche Querschnitt an der Stelle A (Fig. 280) liegen muss. In diesem besonderen Querschnitte sind die Anspruchsnahmen in den äussersten Fasern

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{mh' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] + \frac{R_2}{f} \\ \text{und } p &= \frac{mh'' R_1}{l R_2}\left[1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] - \frac{R_2}{f} \end{aligned}\right\} \quad (532).$$

Sollen die Elasticitätsgränzen weder bei der Ausdehnung, noch bei der Zusammendrückung überschritten werden, so darf höchstens $s = a$ oder $p = r$ sein. Setzt man daher

$$1 - \left(\frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right) = c,$$

und nennt man die grösste zulässige Belastung, d. i. das Tragvermögen $Max.\, R_1$, so ist bei Erreichung der einen oder der andern Elasticitätzgränze

$$\text{entweder } a = \frac{m h' c}{l R_2}\, Max.\, R_1 + \frac{R_2}{f}$$

$$\text{oder } r = \frac{m h'' c}{l R_2}\, Max.\, R_1 - \frac{R_2}{f},$$

und hieraus

$$Max.\, R_1 = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } (af - R_2)\ \frac{R_2 l}{mcfh'} \\ \text{oder } (rf + R_2)\ \frac{R_2 l}{mcfh''} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (533)$$

von diesen Alternativwerthen aber stets der kleinere auszuwählen.

Für das im §. 241 gewählte Beispiel ist $f = 3\ \square''$, $R_2 = 400$ Ztr., $l = 200''$, $m = 250000$, $h' = h'' = \frac{1}{2}h = 1''$, und wegen $l\sqrt{q} = 8$

$$c = 1 - \left(\frac{2}{e^8 + e^{-8}}\right), \text{ daher nahe } = 1.$$

Sei noch $a = 200$ Zentner, so erhält man aus der ersten Alternative, welche augenscheinlich den kleineren Werth gibt,

$$Max.\, R_1 = 21\tfrac{1}{3} \text{ Zentner},$$

und das Tragvermögen per Längeneinheit (Zoll) ist hiernach

$$g = \frac{Max.\, R_1}{l} = \tfrac{8}{75} \text{ Zentner}.$$

Für $R_2 = af$ ist gar kein Tragvermögen vorhanden. Diess

erklärt sich dadurch, dass sodann der Zug R_2 in der Richtung der Längenaxe allein schon genügt, um die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung zu erreichen.

§. 244.

Näherungsformeln.

I. Sind — wie im §. 242 ad I — die Werthe von R_2 und l so klein, dass sich $e^{l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise setzen

$$Max.\,R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{2at}{lh'}\left[1+R_2\left(\frac{5}{12}\dfrac{l^2}{mt}-\dfrac{1}{af}\right)\right] \\ \text{oder } \dfrac{2rt}{lh''}\left[1+R_2\left(\frac{5}{12}\dfrac{l^2}{mt}+\dfrac{1}{rf}\right)\right] \end{array} \right\} \quad (534)^*).$$

Für $R_2 = 0$ erhält man insbesondere

$$Max.\,R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{2at}{lh'} \\ \text{oder } \dfrac{2rt}{lh''}, \end{array} \right. \quad \text{folglich } Max.\,(2R_1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{8at}{(2l)h'}, \\ \text{oder } \dfrac{8rt}{(2l)h''}, \end{array} \right.$$

übereinstimmend mit der Relation (109) im ersten Hauptstücke, wie diess zu erwarten war, da für $R_2 = 0$ der in der Figur 279 dargestellte Fall in den dortigen Fall IV (Fig. 64) übergeht.

Für die früher gewählte Durchzugschiene und für $R_2 = 2$ Ztr. wäre z. B. $Max.\,R_1 = 2{\cdot}026$, für $R_2 = 0$ aber $Max.\,R_1 = 2$ Ztr.

---

*) Nach der Anmerkung zum §. 242 ist

$$c = 1 - \left(\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}\right) = \tfrac{1}{2}ql^2\left[1-\tfrac{5}{12}ql^2+\ldots\right] \text{ und}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{2}{ql^2}\left[1+\tfrac{5}{12}ql^2+\ldots\right] = \frac{2mt}{R_2 l^2}\left(1+\tfrac{5}{12}ql^2+\ldots\right),$$

somit einerseits

$$(af-R_2)\,\frac{R_2 l}{mcfh'} = \left(\frac{af-R_2}{fh'}\right)\cdot\frac{2t}{l}\,(1+\tfrac{5}{12}ql^2+\ldots) =$$

$$= \frac{2at}{lh'}\left(1-\frac{R_2}{af}\right)(1+\tfrac{5}{12}\frac{R_2 l^2}{mt}+\ldots) = \frac{2at}{lh'}\left[1+R_2\left(\tfrac{5}{12}\frac{l^2}{mt}-\frac{1}{af}\right)+\right]$$

und andererseits

$$(rf+R_2)\,\frac{R_2 l}{mcfh''} = \frac{2rt}{lh''}\left[1+R_2\left(\tfrac{5}{12}\frac{l^2}{mt}+\frac{1}{rf}\right)+\right],$$

woraus sich die angenäherten Gleichungen (534) ergeben.

II. Sind — wie im §. 542 ad II — die Werthe von l und q gross genug, damit c sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich erlauben, $c = 1$ selbst zu setzen, und das Tragvermögen aus den Alternativ-Relationen

$$Max.\, R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \left(\frac{af - R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h} \\ \text{oder } \left(\frac{rf + R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h''} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (535)$$

zu bestimmen.

So ist z. B. diese Näherungsmethode bei der oben betrachteten Schiene für $R_2 = 400$ Ztr. zulässig.

In diesem Falle II wird in der Regel der erste Alternativwerth massgebend sein, nämlich

$$Max.\, R_1 = \left(\frac{af - R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h'}.$$

Man bemerkt, dass hier das Tragvermögen mit dem Zuge R_2 variirt, und am grössten wird für

$$\frac{d\,(Max.\, R_1)}{d\,R_2} = 0, \text{ d. h. für } R_2 = \tfrac{1}{2} af.$$

Dasselbe wird sodann

$$Max.\, R_1 = \tfrac{1}{4} \frac{a^2 f l}{m h'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (536).$$

Dieses Resultat ist wichtig. Es zeigt, dass es unter den bezeichneten Umständen vortheilhaft ist, wenn der Zug R_2 die Hälfte von der grössten zulässigen Spannung af ausmacht.

Ex. Für die oben betrachtete Durchzugschiene ist $f = bh$, und $h' = \frac{1}{2} h$, also

$$Max.\, R_1 = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{m} b l.$$

Die betreffenden speciellen Werthe substituirt zeigen, dass das grösste Tragvermögen $Max.\, R_1 = 24$ Ztr. dann vorhanden ist, wenn der Bedingung gemäss der Horizontalzug $R_2 = \frac{1}{2} af = 300$ Ztr. ist. Wird dieser Zug anders gewählt, entweder grösser oder kleiner, so wird jedenfalls das Tragvermögen vermindert.

Auch hat man für das Verhältniss zwischen den beiden einwirkenden Kräften

$$Max.\, R_1 : R_2 = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{m} b l : \tfrac{1}{2} a b h = 1 : \frac{hm}{al},$$

also in dem speciellen Falle $= 1 : 12\frac{1}{2}$.

Bei der Anwendung dieser Formeln muss man sich jedoch versichern, ob c in der That der Einheit nahe kommt, was dann der Fall sein wird, wenn der Exponent von e, nämlich $l\sqrt{q}$, nicht kleiner als 6 ist, wie in dem obigen Beispiele.

§. 245.

Regeln für die practische Anwendung von Schliessen.

Die Resultate dieses Kapitels führen zu nützlichen Regeln, welche bei der Anwendung von Schliessen zu beachten sind.

Man setze (Fig. 279)

die Länge der horizontal liegenden Schiene . . . $= 2l = L$,
den beiderseitigen Horizontalzug . . . . . $= R_2$,
das eigene Gewicht der Schiene . . . . . $= G$,
das Gewicht der Längeneinheit derselben . . . . $= g = \frac{G}{L}$,
das Gewicht der cubischen Einheit aber . . . . . $= \gamma$,
den Schienenquerschnitt . . . . . $= f$,
den Abstand des Schwerpunctes dieses Querschnittes von den untersten Fasern . . . . . $= h'$,
jenen von den obersten Fasern . . . . . $= h''$,
die ganze verticale Höhe . . . . . $(h' + h'') = h$,
das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct gehende horizontale Axe $= t = fd^2$,
die grösste zulässige Spannung, welcher das Schienenmaterial ausgesetzt werden kann . . . . . $= a$,
und den Modul der Längenveränderung desselben . . . $= m$.

Hat die Schiene bloss ihr eigenes Gewicht zu tragen, so ist

$$R_1 = \tfrac{1}{2}G = \tfrac{1}{2}gL = \tfrac{1}{2}\gamma f L,$$

und

$$u = l\sqrt{q} = l\sqrt{\frac{R_2}{mt}} = \tfrac{1}{2}L\sqrt{\frac{R_2}{mfd^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{d}\sqrt{\frac{R_2}{mf}} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{d}\sqrt{\frac{s_2}{m}},$$

wo s_2 den horizontalen Zug per $\square''$ Querschnitt bedeutet, und der Werth von $l\sqrt{q}$ wieder mit u bezeichnet ist. Auch wird der in diesem Kapitel angegebene Werth für c

$$c = 1 - \frac{2}{(e^u + e^{-u})}.$$

Diess vorausgesetzt, ist Folgendes zu bemerken:

1. Das eigene Gewicht der Schiene darf nie das Tragvermögen überschreiten. Dieses letztere ist in der Regel nach der ersten Alternative aus der Relation (533) zu bestimmen. Man hat also wegen

$$G \leqq Max.\, 2R_1$$

$$G \leqq (af - R_2)\ \frac{R_1 L}{mh'cf},$$

$$\gamma f L \leqq (a - s_2)\ \frac{s_2 f L}{mch'},$$

und hieraus die Bedingung

$$\gamma \leqq (a - s_2)\ \frac{s_2}{mh'c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (537).$$

Ist z. B. eine schmiedeeiserne Schiene von 1000 Zollen Länge mit einem rechteckigen Querschnitte, dessen Breite $b = 1''$ und Höhe $h = 4''$ beträgt, versehen, und das Eisen von der Beschaffenheit, dass man $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztr., $a = 180$ Ztr. und $m = 250000$ setzen kann, so muss wegen $h' = \frac{1}{2}h = 2''$, und $d^2 = \frac{1}{12}h^2 = \frac{4}{3}$ für jeden Horizontalzug die Bedingung

$$1250\,c \leqq (180 - s_2)\,s_2$$

vorhanden sein, wenn $u = \frac{1}{2}\sqrt{3\,s_2}$ und $c = 1 - \frac{2}{(e^u + e^{-u})}$ bedeutet. Erreicht u den Werth 6, so kann man c mit der Einheit verwechseln.

2. Die Biegung in der Mitte der Schiene, welche durch das eigene Gewicht hervorgebracht wird, ist nach der Formel (526) für jeden Horizontalzug

$$\delta = \frac{R_1}{2R_2}\, l \left[1 - \frac{2mt}{R_2 l^2}\, c\right],$$

daher wegen $R_1 = \frac{1}{2} f L \gamma$, $R_2 = s_2 f$, $l = \frac{1}{2} L$ und $\frac{2mt}{l^2 R_2} = \frac{2}{u^2}$ auch

$$\delta = \frac{1}{8}\frac{\gamma L^2}{s_2}\left(1 - \frac{2c}{u^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (538).$$

Für die in dem vorigen Beispiel gegebenen speciellen Werthe erhält man

$$\delta = \frac{625}{2s_2}\left(1 - \frac{8c}{3s_2}\right).$$

3. Verlangt man, dass bei der gespannten Schiene das grösstmögliche Tragvermögen vorhanden ist, so hat man im Sinne der Gleichung (536) den Horizontalzug $R_2 = \frac{1}{2} af$, daher $s_2 = \frac{1}{2} a$ zu wählen, wenn $c = 1$ anzunehmen erlaubt ist. In dem gewählten Beispiele hat man für $s_2 = \frac{1}{2} a = 90$ Ztr., $u = \frac{3}{2}\sqrt{30} = 8{\cdot}2$, daher ist c sehr nahe die Einheit. Da übrigens der Werth von $s_2 = 90$ Ztr. der allgemeinen Bedingung

$$1250\, c \gtrless (180 - s_2)\, s_2$$

Genüge leistet, so ist der proponirte Horizontalzug unbedenklich zulässig. Bei diesem Horizontalzuge ist die Biegung

$$\delta \quad \frac{625}{2 s_2}\left(1 - \frac{8\, c}{3 s_2}\right) = 3{\cdot}37 \text{ Zoll},$$

jener Horizontalzug aber

$$R_2 = f s_2 = 360 \text{ Ztr.}$$

Wird der Horizontalzug anders gewählt, so vermindert sich das Tragvermögen.

4. Es ist oft wünschenswerth, den Horizontalzug so zu wählen, dass die Durchbiegung der Schiene ein Minimum wird. Zu diesem Behufe muss man s_2 so gross, als es angeht, nehmen, und das eigene Gewicht der Schiene das Tragvermögen erreichen lassen, welche Bedingung offenbar auf die Gleichung

$$\gamma = (a - s_2)\, \frac{s_2}{m h' c}$$

führt. Ist c nahe gleich der Einheit, so erhält man

$$s_2 = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 m \gamma h'}{a^2}}\right).$$

Für das vorige Beispiel ist $s_2 = 0{\cdot}96\, a = 172{\cdot}8$ Ztr., somit

$$R_2 = f s_2 = 691{\cdot}2 \text{ Ztr.},$$

und diese Resultate sind brauchbar, weil wegen $u = 11{\cdot}4$ der Werth von c der Einheit sehr nahe kommt. Die Biegung selbst wird

$$\delta = \frac{625}{2 s_2}\left(1 - \frac{8}{3 s_2}\right) = 1{\cdot}78 \text{ Zoll},$$

und sie ist die kleinste, welche unter den angegebenen Umständen möglich ist, wenn die Sicherheit nicht gefährdet werden soll. Das Tragvermögen ist jedoch nicht so gross, wie unter den ad 3 bezeichneten Umständen, sondern bedeutend geringer. Es genügt jedoch, weil die Schiene noch immer ihr eigenes Gewicht mit Sicherheit tragen kann.

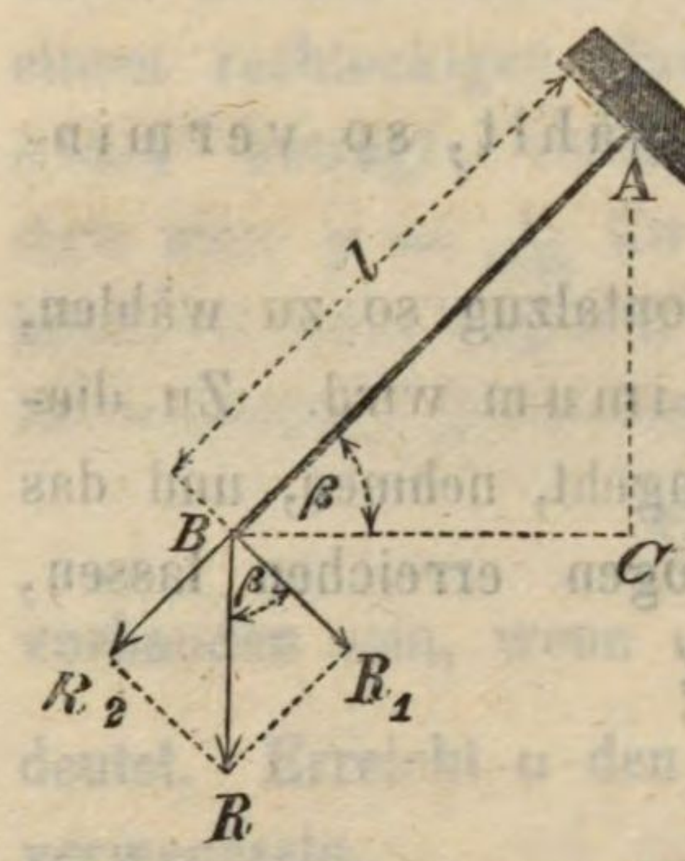
Die Fälle in der Praxis, wo c nahe der Einheit kommt, treten bei langen Schienen und bei grossen Horizontalzügen ein, sie sind also gerade die wichtigeren.

Hat die Schiene ausser dem eigenen Gewichte noch eine andere gleichförmige Belastung zu tragen, so ist Behufs der Durchführung der nöthigen Untersuchung statt g nur das entsprechende Totalgewicht per Längeneinheit zu setzen.

Anhang zum 1. und 2. Kapitel.

Wird (Fig. 281) ein schief gelagerter Träger AB an einem Ende festgehalten, und am andern Ende B mit der Belastung R beansprucht, so befindet sich derselbe in dem im 1. Kapitel betrachteten Falle, wenn man für die Componenten von R die Werthe $R_1 = R\cos\beta$ und $R_2 = R\sin\beta$ substituirt. Unter dieser Bedingung kann man von den dort gegebenen Formeln Gebrauch machen. Selbstverständlich ist dann auch betreffenden Orts $Max.R_1 = \cos\beta\ (Max.\ R)$ und zugleich $R_2 = \sin\beta\ (Max.\ R)$ zu setzen, und hiernach die Bestimmung von $Max.R$ zu veranlassen. In den meisten vorkommenden Fällen wird man in der Regel von den genäherten Formeln (519) Gebrauch machen können. Lässt man den ersten Alternativwerth als den kleineren gelten, was gewöhnlich der Fall ist, so erhält man

Fig. 281.



$$\cos\beta\ (Max.\ R) = \frac{at}{lh'}\left[1 + \sin\beta\left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af}\right) Max.\ R\right],$$

und hieraus

$$Max.\ R = \frac{at}{h'l\cos\beta}\left\{\frac{1}{1 - \frac{at}{lh'}\,tg\,\beta\left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af}\right)}\right\},$$

endlich näherungsweise

$$Max.\ R = \frac{at}{h'l\cos\beta}\left[1 + \frac{l}{h'}\,tg\,\beta\left(\frac{1}{3}\frac{a}{m} - \frac{d^2}{l^2}\right)\right]. \quad (539).$$

Der Factor $\frac{at}{h'l\cos\beta}$ vor der Klammer bedeutet offenbar das Tragvermögen in dem Falle, wenn der Träger die Lage und Länge

von BC hätte, wo BC die horizontale Projection der wirklichen Trägerlänge ist. Das eigentliche Tragvermögen $Max.\ R$ ist also nach Umständen bald kleiner, bald grösser als der erwähnte Werth $\frac{at}{h' l \cos\beta}$, kann übrigens auch eben so gross sein. Diess hängt davon ab, ob $\frac{1}{3}\frac{a}{m} > $ oder $<$ oder $= \frac{d^2}{l^2}$ ist.

Uebrigens ist der Gebrauch der Formel (539) an die Bedingung geknüpft, dass das 2. Glied in den Klammern, nämlich $\frac{l}{h'} tg\beta\left(\frac{1}{3}\frac{a}{m} - \frac{d^2}{l^2}\right)$ im Vergleiche zur Einheit nicht beträchtlich ist. Ist dieses Glied so klein, dass es ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden kann, so wird annäherungsweise $Max.\ R = \frac{at}{h' l \cos\beta}$, also das Tragvermögen beinahe so gross, wie wenn der Träger horizontal gelegen, und seine Länge mit der horizontalen Projection BC übereinstimmend wäre. In den meisten Fällen der Praxis wird diese Berechnungsweise hinreichend genau sein.

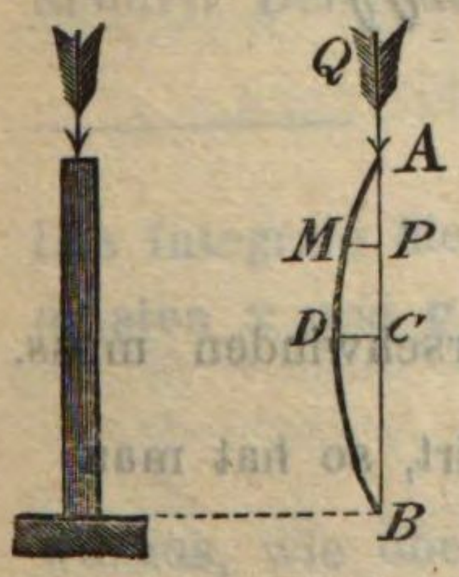
Drittes Kapitel.

Widerstand eines verticalen Ständers, dessen oberes Ende belastet und dessen unteres Ende unterstützt ist. (Fig. 282.)

§. 246.

Biegungscurve. Wäre das Material vollkommen homogen, und die Belastung über den Querschnitt gleichmässig vertheilt, so würde der Ständer bloss eine Zusammendrückung in der Richtung der Längenaxe erfahren, diese letztere aber ihre geradlinige Form beibehalten, wie diess auch in den Abschnitten des ersten Hauptstückes angenommen worden ist. Diese Bedingungen sind indessen nicht immer in genügender Weise vorhanden. Sodann ist zu besorgen, dass eine Ausbiegung der Längenaxe erfolgt. Die Untersuchung des Gleichgewichtes in diesem Falle bildet den Gegenstand dieses Kapitels.

Fig. 282.



Zu diesem Behufe sei ADB die Biegungscurve, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem derart bezogen wird, dass in A der Coordinatenursprung ist, von wo aus die Abscissen vertical nach abwärts und die Ordinaten horizontal gezählt werden. Dabei wird angenommen, dass die Endpuncte A und B auch nach der Biegung in derselben Verticalen liegen.

Man setze jetzt für irgend einen Punct M der Curve

die Abscisse AP . . . . . $= x$,
und die Ordinate MP . . . . . $= y$,
ferner die Höhe des Ständers AB . . . . . $= l$,
seine grösste Ausbiegung CD . . . . . $= \delta$,
seinen Querschnitt . . . . . $= f$,
den Modul der Längenveränderung des Materiales . . . $= m$
und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch den Schwerpunct desselben normal auf die Biegungsrichtung gezogene Axe . . . . . $= t$.

Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct M ist Qy, daher hat man in Gemässheit des §. 232

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = -Qy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (540).$$

Das Integrale dieser Differentialgleichung ist

$$y = \delta \sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{mt}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (541)^*),$$

zugleich die Gleichung der Biegungscurve.

---

*) Setzt man $\frac{dy}{dx} = u$, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{u\,du}{dy}, \text{ somit } mt\frac{u\,du}{dy} = -Qy$$

und hiernach

$$u^2 = \frac{Q}{mt}(\delta^2 - y^2),$$

wenn man beachtet, dass für $y = \delta$ die Grösse u verschwinden muss. Substituirt man wieder statt u den Werth $\frac{dy}{dx}$ und reducirt, so hat man

$$\sqrt{\frac{Q}{mt}}\,dx = \frac{dy}{\sqrt{\delta^2 - y^2}}.$$

In der Gleichung (541) muss für $x = l$ die Ordinate $y = 0$, daher auch $sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{mt}}\right) = 0$ werden, falls δ nicht selbst Null ist. Diess kann nur für $l\sqrt{\frac{Q}{mt}} = i\pi$ geschehen, wenn $\pi = 3{\cdot}1415926$, nämlich das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises, i aber eine der auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... ist.

Hiernach hat man

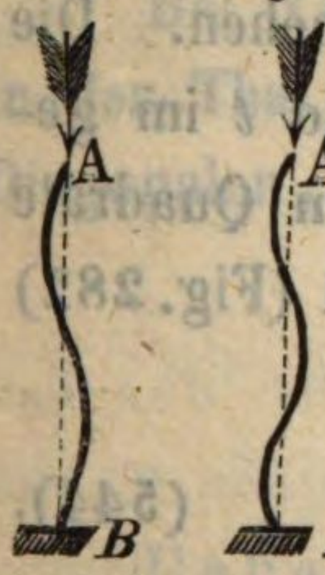
$$Q = \frac{i^2 \pi^2 m t}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (542)$$

und

$$y = \delta \, sin\left(\frac{i \pi x}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (543).$$

Der Werth von i ist im Allgemeinen unbestimmt. Er bezieht sich auf die nähere Gestalt der Biegungscurve. So z. B. hat diese für $i = 1$ die Gestalt Fig. 282, für $i = 2$ jene der Fig. 283, für $i = 3$ jene der Fig. 284, u. s. w., wornach die Zahl der Wendepuncte der Curve stets durch $(i - 1)$ ausgedrückt erscheint. Merkwürdig bleibt es übrigens, dass, wie auch der Werth von i sein mag, die Biegung δ ihrer Grösse nach nicht berechnet werden kann.

Fig. 283. *Fig.* 284



Für diese Wahrnehmung lässt sich wohl eine Erklärung geben. In der Gleichung (540) bedeutet nämlich das erste Glied $mt\frac{d^2y}{dx^2}$ das statische Moment des Widerstandes von Seite des Materiales, das andere aber, nämlich $-Qy$, das statische Moment der wirkenden Belastung. Mit der Zunahme der Biegung, also auch mit

---

Das Integrale hiervon ist mit Rücksicht auf die Bedingung, dass die Coordinaten x und y zugleich verschwinden,

$$x\sqrt{\frac{Q}{mt}} = arc.\ sin\left(\frac{y}{d}\right),$$

woraus, wie oben folgt

$$y = \delta \, sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{mt}}\right).$$

jener von y, wachsen beide Glieder gleichmässig, so dass, wenn bei einer gewissen Biegung Gleichgewicht bestanden hat, das letztere auch bei einer grösseren Biegung nicht gestört wird, vorausgesetzt, dass die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Es kann sich also bei verschiedenen Biegungen unter sonst gleichen Umständen der Ständer im Gleichgewichte befinden, und die Kenntniss von dem Stattfinden des letzteren ist nicht genügend, um auf die Grösse der Biegung zurück zu schliessen.

§. 247.

Grösse der Last Q, welche eine Biegung hervorbringen kann. Richtung der Biegung. Nach der Relation (542) ist allgemein

$$Q = \frac{i^2 \pi^2 m t}{l^2}$$

diejenige Last, welche den Ständer in der gebogenen Form erhalten kann. Durch eine kleinere Last kann diess nicht geschehen. Die obige Belastung ist mit i variabel, und nimmt mit m und t im geraden und einfachen Verhältnisse zu, hingegen mit dem Quadrate der Ständerhöhe ab. Der ungünstigste Fall findet für $i = 1$ (Fig. 282) statt, und für diesen ist

$$Q = \frac{\pi^2 m t}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (544).$$

Zur Bestimmung von t ist die Kenntniss nöthig, in welcher Richtung die Ausbiegung erfolgt. Im Allgemeinen ist diejenige Richtung als massgebend anzunehmen, für welche das Trägheitsmoment t des Querschnittes am kleinsten wird. Wäre z. B. der Querschnitt ein Rechteck, und dessen kleinere Seite h, die grössere aber b, so wird die Biegung nach der Richtung der kleineren Seite h zu wählen, somit $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$, und hiernach

$$Q = \frac{\pi^2}{12} \frac{m b h^3}{l^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{m f h^2}{l^2}$$

zu setzen sein. Es ist nämlich in diesem Falle das Trägheitsmoment $t = \frac{1}{12} b h^3$ das kleinste von allen, welche sich auf die verschiedenen Biegungsrichtungen beziehen (§. 120 ad 1). Differiren die Seiten b und h nur wenig von einander, so ist es bei der grösseren oder geringeren Ungleichförmigkeit in der Materie auch wohl mög-

lich, dass die Biegung nicht in der Richtung der kleineren Seite eintritt.

Die Betrachtungen in den §§. 117 bis inclusive 122 finden hier insoferne zweckmässige Anwendung, als es sich um die Bestimmung der Biegungsrichtung handelt. Dabei hat man nämlich im Querschnitte des Ständers die Drehungsaxe so zu wählen, dass in Bezug auf dieselbe das Trägheitsmoment am kleinsten wird, sodann aber normal auf diese Drehungsaxe die Biegungsrichtung anzunehmen. Nach den §§. 120 und 121 gibt es unzählige Figuren, bei welchen das Trägheitsmoment t constant bleibt, wie auch die fragliche Drehungsaxe durch den Schwerpunct gezogen wird.

Hat daher der Ständer eine solche Querschnittsform (z. B. ein Quadrat), so ist seine Biegung in jeder Richtung gleich wahrscheinlich, und diese wird lediglich von Zufälligkeiten bestimmt.

Bei Versuchen mit Stäben quadratischen Querschnittes erfolgte in der That die Biegung ohne Unterschied bald in der Richtung der Diagonalen, bald in jener der Seiten.

Tragvermögen.

§. 248.

Unbestimmte Gleichung für das Tragvermögen. Behält man ausser den Bezeichnungen in diesem Kapitel noch jene im §. 233 bei, und beachtet man, dass in dem vorliegenden Falle $Rz = Qy$, und nahezu $R_2 = Q$ gesetzt werden kann, wenn, wie vorausgesetzt ist, es sich nur um eine kleine Ausbiegung handelt, so hat man für jeden beliebig gelegenen Querschnitt M (Fig. 282) die Anspruchsnahme in den äussersten Fasern, und zwar an der convexen Seite

$$s = \frac{h' Qy}{t} - \frac{Q}{f} = Q\left(\frac{h'y}{t} - \frac{1}{f}\right),$$

an der concaven aber

$$p = \frac{h'' Qy}{t} + \frac{Q}{f} = Q\left(\frac{h''y}{t} + \frac{1}{f}\right).$$

Die grössten Anspruchsnahmen finden für den grössten Werth von y, d. i. für $y = \delta$ statt, und der gefährliche Querschnitt liegt an

der Stelle D, wo jene Biegung δ vorhanden ist. An dieser Stelle darf für das Tragvermögen ($Max.\ Q$) höchstens $s = a$ oder $p = r$ werden. Man hat daher

$$\text{entweder } a = Max.\ Q\left(\frac{h'\,\delta}{t} - \frac{1}{f}\right)$$

$$\text{oder } r = Max.\ Q\left(\frac{h''\,\delta}{t} + \frac{1}{f}\right),$$

und hieraus das Tragvermögen, da $t = f\,d^2$ ist,

$$Max.\ Q = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \dfrac{af}{\left(\dfrac{h'\,\delta}{d^2} - 1\right)} \\ \text{oder } \dfrac{rf}{\left(\dfrac{h''\,\delta}{d^2} + 1\right)}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (545).$$

Von diesen Alternativwerthen gilt der kleinere, welcher in der Regel der zweite sein wird. Die Anwendung dieser Methode setzt jedoch die Ausbiegung δ als bekannt voraus. Da indessen diese Ausbiegung nicht berechnet werden kann, so lässt sich die Bestimmung des Tragvermögens auf die obige Weise nicht durchführen.

§. 219.

Zuhilfenahme practischer Resultate für die Bestimmung des Tragvermögens. Um der im vorigen §. sich ergebenen Unbestimmtheit in Betreff des Tragvermögens zu entgehen, erübrigt nichts anders, als geeignete Erfahrungsresultate zu benützen. Nur zwei Anhaltspuncte sind durch die Theorie geboten. Es dient nämlich die Formel (544) als erster Anhaltspunct, da in dem Falle, als die Belastung dieser Formel gemäss die Grösse $Q = \frac{\pi^2 m t}{l^2}$ erreicht, ein Ausbiegen des Ständers zu besorgen ist. Indem nun die Grösse dieser Ausbiegung unbestimmt bleibt, so kann dieselbe auch so weit gehen, dass die Sicherheit gefährdet wird. Diese Möglichkeit vor Augen gehalten, führt zu dem Schlusse, dass die grösste zulässige Belastung, nämlich das Tragvermögen $Max.\ Q$ jedenfalls kleiner, als der nach der Formel (544) berechnete Werth anzunehmen ist. Man kann daher setzen

$$Max.\ Q < \frac{\pi^2 m t}{l^2}.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe h, wenn $h < b$ ist, hat man insbesondere wegen $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$,

$$Max\ Q < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{f h^2}{l^2} \text{ und hieraus } \frac{Max.\ Q}{f} < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{h^2}{l^2}.$$

Auch ist $\frac{Max.\ Q}{f}$ die grösste zulässige Pressung per $\square''$ Querschnitt. Bezeichnet man dieselbe mit r', und setzt man unter Einem $l = n h$, so erhält man

$$r' < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{1}{n^2} \quad \ldots\ldots\ (546).$$

In Anbetracht dieser Relation ist es möglich, dass die grösste zulässige Pressung per $\square''$, wenigstens bei hohen Ständern, sich durch die Gleichung

$$r' = \frac{C}{n^2} \quad \ldots\ldots\ (547)$$

genau genug ausdrücken lasse, wenn $C < \frac{\pi^2 m}{12}$ einen der Materialgattung und den Umständen entsprechenden Coefficienten bezeichnet. Hiernach wäre $Max. Q = \frac{Cf}{n^2}$.

Die Zahl $n = \frac{l}{h}$ zeigt an, wie oft die kleinere Seite des Querschnittes in der Ständerhöhe enthalten ist. Es folgt übrigens daraus nicht, dass das Tragvermögen gerade auf die bezeichnete Weise von n abhängen müsse. Diese Abhängigkeit könnte auch eine andere sein, ohne dass der Relation (546) widersprochen würde. Ob die oben gewählte Form annehmbar ist, hat die Erfahrung zu entscheiden. Diese lehrt nun, dass man die Gleichung (547) gelten lassen könne, wenn $n > 20$ ist, indem sodann die nach ihr berechneten Belastungen jene aus der Erfahrung abgeleiteten nicht übertreffen. Ist hingegen $n < 20$, so darf die obige Formel nicht mehr angewendet werden, weil sodann die nach ihr berechneten Belastungen zu gross würden. In solchen Fällen tritt der Nachtheil des Ausbiegens des Ständers desto mehr in den Hintergrund, und es wird das Tragvermögen r' per $\square'$ desto mehr dem Werthe r für kurze Stücke (siehe erstes Hauptstück) nahe gerückt, je kleiner n ist. Für $n = 1$ hat der Ständer die Würfelform, in welchem Falle man $r' = r$ setzen kann. Aus dieser Bemerkung ergibt sich der zweite Anhalts-

punct zur Beurtheilung. Es leuchtet ein, dass die Werthe von r' abnehmen, wenn man n zunehmen lässt. Diese Abnahme ist je nach dem Materiale eine verschiedene. Nach den bisherigen Erfahrungen kann man Folgendes annehmen:

1. Für Holzmaterialien. Rondelet schliesst aus seinen Versuchen, dass man

für $n = 12$, $r' = \frac{5}{6} r$	für $n = 48$, $r' = \frac{1}{6} r$
„ $n = 24$, $r' = \frac{1}{2} r$	„ $n = 60$, $r' = \frac{1}{12} r$
„ $n = 36$, $r' = \frac{1}{3} r$	„ $n = 72$, $r' = \frac{1}{24} r$,

setzen darf, wenn für $n = 1$, $r' = r$ ist.

Um aus diesen Daten auch Zwischenwerthe für r' zu finden, kann man die Werthe von n als Abscissen und jene von r' als Ordinaten einer Curve betrachten, von welcher eben so viele Puncte bestimmt werden, als gleichzeitige Werthe von n und r' bekannt sind. Stellt man sich diese Puncte mittelst einer continuirlichen Linie verbunden vor, und beobachtet, wie sich die Ordinaten r' für andere Werthe von n herausstellen, so findet man ungefähr

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{für } n = 5, \; r' = 0{\cdot}96\, r & \text{für } n = 15, \; r' = 0{\cdot}75\, r; \\ \text{„ } n = 10, \; r' = 0{\cdot}87\, r & \text{„ } n = 20, \; r' = 0{\cdot}62\, r; \end{array}\right\} \quad (548).$$

Von $n = 20$ angefangen, wird man es vorziehen, die Bestimmung der diessfälligen Werthe von r' aus der Formel (547) zu veranlassen, und man wird sich leicht darüber vereinigen, dass aus jener Formel für $n = 20$ gleichfalls der aus den Erfahrungsresultaten combinirte Werth $r' = 0{\cdot}62\, r$ zu folgen hat. Diese Bedingung führt zur Kenntniss des mit C bezeichneten Coefficienten; denn es ist allgemein $C = r' n^2$, somit wegen $r' = 0{\cdot}62\, r$ und $n = 20$, jener Coefficient $C = 248\, r$.

Auf diese Weise hat man für Holzmaterialien, wenn $n \leqq 20$ ist,

$$r' = \frac{248}{n^2} r \ldots\ldots\ldots \quad (549).$$

Diese Formel stimmt zwar nicht genau mit den angeführten Versuchsresultaten überein, sie genügt aber dennoch für den Gebrauch, wenn $n > 20$ ist, indem man versichert sein kann, dass so-

dann das Tragvermögen nicht zu gross erhalten wird. Dieses Tragvermögen wird nämlich

$$Max.\ Q = r'f = \frac{248\,rf}{n^2} = 248\,r\,\frac{b\,h^3}{l^2},$$

wenn der Querschnitt ein Rechteck, und bei diesem $h < b$ ist.

Nimmt man z. B. für vorzügliches Eichenholz und für andauernde Sicherheit $r = 12\frac{1}{2}$ Ztr., so würde

$$Max.\ Q = 3100\,\frac{b\,h^3}{l^2},$$

ein Resultat, das mit den Erfahrungen Hodgkinson's nahe genug übereinstimmt. Geht man jetzt auf die Formel

$$Max.\ Q < \frac{\pi^2 m}{12}\,\frac{b\,h^3}{l^2} = \frac{\pi^2 m\,t}{l^2}$$

zurück, und setzt man für Eichenholz $m = 15000$, so wird in runder Zahl

$$Max.\ Q < 12600\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Der letzte Werth ist ungefähr viermal so gross, wie das berechnete Tragvermögen $3100\,\frac{b\,h^3}{l^2}$. Navier hält es für räthlich das Tragvermögen nur mit dem zehnten Theile jenes Ausdruckes $\frac{\pi^2 m\,t}{l^2}$ zu bemessen. Doch spricht er sich nicht über die näheren Umstände aus, unter welchen er das Tragvermögen erreicht wissen will. Mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen kann man die Meinung Navier's bei dem Vorhandensein von sehr ungünstigen Umständen gelten lassen.

2. Für Schmiedeeisen. In Betreff des Schmiedeeisens gib Navier gestützt auf mehrere Veruche an, dass

$$r' = r \text{ für } n = 1 \text{ bis } 2,$$
$$\text{ferner } r' = \tfrac{5}{8}\,r \text{ für } n = 12,$$
$$\text{und } r' = \tfrac{1}{2}\,r \text{ für } n = 24$$

angenommen werden kann. Die Zwischenwerthe lassen sich nicht mit Genauigkeit bestimmen. Es scheint, dass man sich der Wahrheit hinreichend annähern werde, wenn man gelten lässt,

für $n = 5$, $r' = 0{\cdot}90\,r$	für $n = 15$, $r' = 0\,60\,r$
„ $n = 10$, $r' = 0{\cdot}70\,r$	„ $n = 20$, $r' = 0{\cdot}55\,r$

(550).

Von $n = 20$ angefangen hat man wieder die Formel (547) zu benützen. Gibt man zu, dass aus dieser Formel für $n = 20$ der aus den Versuchen combinirte Werth $r' = 0{\cdot}55\,r$ folgen soll, so wird $C = r' n^2 = 220\,r$, und hiernach für Schmiedeeisen

$$r' = \frac{220\,r}{n} \quad \ldots \ldots \quad (551),$$

daher insbesondere für den rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, das Tragvermögen

$$Max.\ Q = 220\,r\,\frac{b\,h^3}{l^2} \quad \ldots \ldots \quad (552),$$

wenn $n \leqq 20$ und $b > h$ ist.

Sei nun für gutes Schmiedeeisen, wenn eine lange Dauer unter sonst nicht allzu ungünstigen Umständen verlangt wird, $r = 180$ Ztr., so erhält man

$$Max.\ Q = 39600\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Nach der Relation

$$Max.\ Q < \frac{\pi^2 m}{12} \cdot \frac{f b^2}{l^2} = \frac{\pi^2 m t}{l^2}$$

wäre aber, wenn man z. B. $m = 240000$ setzt,

$$Max.\ Q < 201400\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Von dem letzten Werthe beträgt das obige Tragvermögen ungefähr den fünften Theil. Dieses Resultat stimmt mit der Meinung Navier's überein. Es ist indessen räthlich, bei minderer Materialqualität und bei sehr ungünstigen Umständen das Tragvermögen noch kleiner zu nehmen. Desshalb wird man sich zuweilen entschliessen müssen, das Tragvermögen nur mit dem achten, neunten, zehnten Theile von $\frac{\pi^2 m t}{l^2}$ zu bemessen.

3. Für Gusseisen. In Betreff des Gusseisens gibt Navier auf Versuche gestützt an, dass man annehmen kann,

$r' = \frac{2}{3}\,r$ für $n = 4$,
$r' = \frac{1}{2}\,r$ für $n = 8$
und $r' = \frac{1}{15}\,r$ für $n = 36$,

wenn wieder $r' = r$ für $n = 1$ ist.

Versucht man aus diesen wenigen Daten nach dem Gesetze der Continuirlichkeit auf die Zwischenwerthe zu schliessen, so findet man ungefähr

für $n = 5$, $r' = 0{\cdot}62\,r$	für $n = 25$, $r' = 0{\cdot}19\,r$	(553).
„ $n = 10$, $r' = 0{\cdot}45\,r$	„ $n = 30$, $r' = 0{\cdot}13\,r$	
„ $n = 15$, $r' = 0{\cdot}32\,r$	„ $n = 35$, $r' = 0{\cdot}10\,r$	
„ $n = 20$, $r' = 0\,25\,r$		

Indem man von $n = 20$ angefangen ebenfalls die Formel (547) $r' = \frac{C}{n^2}$ benützt, und annimmt, dass für $n = 20$ aus dieser Formel der unter (553) gegebene Werth $0{\cdot}25\,r$ folgen soll, so erhält man für den Coefficienten $C = n^2 r' = 100\,r$, und hiernach für Gusseisen

$$r' = \frac{100\,r}{n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (554),$$

daher bei einem rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, das Tragvermögen

$$Max.\ Q = 100\,r\,\frac{b\,h^3}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (555),$$

wenn $n \gtreqless 20$ und $b \gtrless h$ ist.

Sei nun für Gusseisen von guter Qualität, wenn eine lange Dauer unter sonst nicht allzu ungünstigen Umständen verlangt wird, $r = 220$ Ztr., so erhält man

$$Max.\ Q = 22000\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Nach der Relation

$$Max.\ Q < \frac{\pi\ m}{12} \cdot \frac{b\,h^3}{l^2} = \frac{\pi^2\,m\,t}{l^2}$$

wäre aber, wenn man z. B. $m = 125000$ setzt,

$$Max.\ Q = 92500\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Von dem letzten Werthe beträgt das ausgemittelte Tragvermögen $18000\,\frac{b\,h^3}{l^2}$ nicht ganz den fünften Theil. Dieses Resultat stimmt mit der Meinung Navier's überein. Es ist indessen räthlich, bei minderer Materialqualität und bei sehr ungünstigen Umständen das Tragvermögen noch kleiner zu nehmen.

§. 250.

Ständer mit anderen, als mit rechteckigen Querschnitten. Massive und hohle Säulen. Ist die Höhe des Ständers nicht sehr gross im Vergleiche zu derjenigen Querschnittsdimension, in der die Richtung der Biegung geschieht, so hat man die Resultate (548), (550) und (553) zu benützen, sonst aber ist das Tragvermögen nach der Formel (544) derart zu berechnen, dass man von dem Resultate nur einen gewissen (vierten, fünften, zehnten u. s. w.) Theil annimmt. Die Grösse dieses Antheiles hängt von der Materialqualität und den besonderen Umständen ab, welche die Einwirkung der Belastung begleiten. Aus dem vorigen §. kann man in dieser Beziehung mehrere Daten entnehmen. Wird allgemein als Tragvermögen der N^{tc} Theil von dem Werthe (544) zugelassen, so hat man

$$Max.\ Q = \frac{\pi^2}{N}\,\frac{m\,t}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (556),$$

wo für die verschiedenen Querschnittsformen nur mehr der entsprechende Werth von t zu substituiren kommt.

Für massive cylindrische Säulen ist nach der Formel (53) $t = \frac{1}{16} f D^2$, wenn D den Säulendurchmesser und $f = \frac{\pi}{4} D^2$ den Flächenraum des Säulenquerschnittes bezeichnet. Das Tragvermögen ist sodann

$$Max.\ Q = \frac{\pi^3 m}{64\,N}\,\frac{D^4}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (557).$$

Sei z. B. für eine gusseiserne Säule $m = 125000$, $N = 5$, $D = 5''$ und $l = 150''$, so findet man

$$Max.\ Q = 12116\,\frac{D^4}{l^2} = 336\ \text{Ztr.}$$

Da der Querschnitt $f = \frac{\pi}{4} D^2 = 19{\cdot}6\,\square''$ beträgt, so kommt somit auf jeden Quadratzoll Querschnitt eine Pressung von

$$r' = \frac{336}{19{\cdot}6} = 17{\cdot}1\ \text{Ztr.}$$

Eben so hat man für einen hohlen Cylinder, wenn der Durchmesser des äusseren Kreises D, jener des inneren aber D', und die Ringfläche F genannt wird, wegen

$$t = \frac{\pi}{64}\,(D^4 - D_1^4) = \tfrac{1}{8} F (D^2 + D_1^2),$$

das Tragvermögen der hohlen Säule im Ganzen

$$Max.\ Q = \frac{\pi^3 m}{6\frac{1}{4} N}\left(\frac{D^4 - D_1^4}{l^2}\right) = \frac{\pi^2 m}{8N} F\left(\frac{D^2 + D_1^2}{l^2}\right) \quad (558).$$

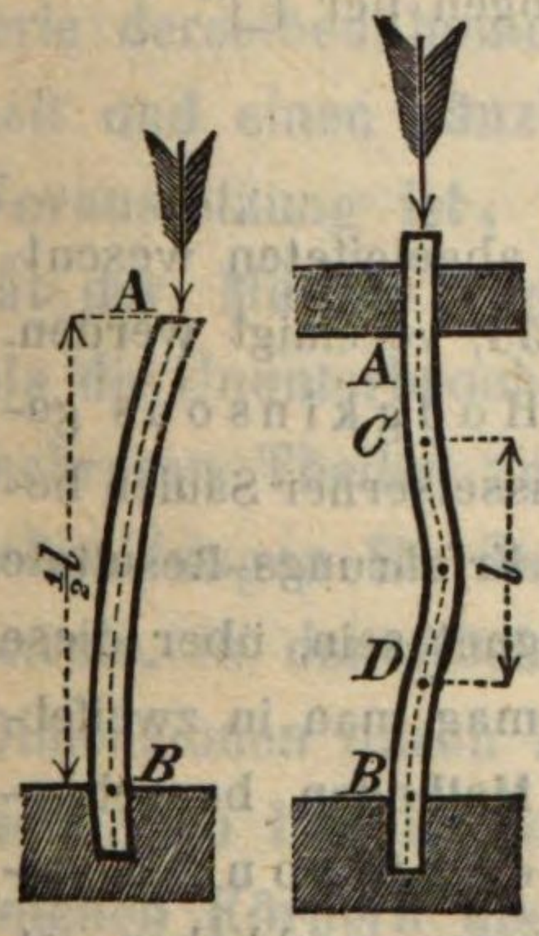
daher für die Pressung per □″ Querschnitt

$$r' = \frac{Max.\ Q}{f} = \frac{m\pi^2}{8N}\left(\frac{D^2 + D_1^2}{l^2}\right).$$

Wird nun das Tragvermögen einer massiven Säule mit jenem einer hohlen bei gleichem Materialaufwande und sonst gleichen Umständen verglichen, so sieht man, dass es vortheilhaft ist, hohle Säulen anzuwenden; denn das Verhältniss der beiden Tragfähigkeiten ist gleich jenem der betreffenden Trägheitsmomente t, welches in Gemässheit des §. 138 zu Gunsten der Röhre spricht.

Anmerkung 1. Der Widerstand des in der Fig. 285 dargestellten Ständers AB, dessen Ende bei B gezwungen wird, die ursprüngliche Richtung beizubehalten, kann nach den Regeln des vorstehenden Kapitels beurtheilt werden, wenn man die dort vorkommende Länge $l = 2\overline{AB}$ setzt, weil der betrachtete Ständer AB in einem Zustande sich befindet, der mit jenem des halben Ständers in der Fig. 282 correspondirt.

Fig. 285 u. *Fig. 286.*



Eben so kann der Widerstand des in der Fig. 286 dargestellten Ständers AB, wo beide Enden bei A und B gezwungen werden, die ursprüngliche Richtung beizubehalten, nach den erwähnten Regeln beurtheilt werden, wenn man $l = \frac{1}{2}\overline{AB}$ setzt, weil der Theil $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ des betrachteten Ständers in einem Zustande sich befindet, welcher mit jenem des ganzen Ständers in der Fig. 282 analog ist.

Anmerkung 2. Bei der Bestimmung des Tragvermögens von den betrachteten verticalen Ständern tritt der besondere Fall ein, dass die Theorie nicht solche genügende Anhaltspuncte zur Beurtheilung liefert, wie dies bei der Betrachtung anderer Fälle ermöglicht wurde. Es ist daher die Ausbildung dieser Lehre grösstentheils nur auf empirischem Wege durch Kenntnissnahme geeigneter Versuchs-Resultate möglich, und da diese letzteren noch nicht zahlreich und umfassend genug sind, so ist es erklärlich, dass in der angeregten Beziehung die Meinungen noch nicht gehörig festgestellt werden konnten. So gibt z. B. Hodgkinson an, aus seinen Versuchen über

gusseiserne Säulen mit ebener Basis folgende empirische Formeln gefunden zu haben:

a) für massive Säulen . . . $P = 44{\cdot}16 \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}}$,

b) für hohle Säulen aber . . $P = 43{\cdot}30 \left(\frac{D^{3.6} - D'^{3.6}}{l^{1.7}}\right)$,

wobei D und D' die Kreisdurchmesser in Zollen, und l die Ständerhöhle in Fussen nach englischem Masse, das den Bruch herbeiführende Gewicht P aber in englischen Tonnen verstanden, endlich vorausgesetzt ist, dass die Säulenhöhe l zwischen dem 25 und 120fachen des Durchmessers D liege. Führt man in diese Formel Wiener Mass und Gewicht ein, und lässt, in Uebereinstimmung mit der Ansicht Morins, nur den sechsten Theil von P als das Tragvermögen *Max.* Q gelten, so findet man:

ad a) $Max.\, Q = 9763 \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}}$ und

ad b) $Max.\, Q = 9573 \left(\frac{D^{3.6} - D^{3.6}}{l^{1.7}}\right)$,

wobei man jetzt D, D' und l in Zollen und *Max.* Q in Zentnern zu verstehen hat. Für das im §. 250 gewählte Beispiel wäre hiernach wegen $D = 5''$ und $l = 150''$, *Max.* $Q = 640$ Ztr., und das Tragvermögen per $\square''$

$$r' = \frac{640}{19{\cdot}6} = 32{\cdot}7 \text{ Ztr.}$$

Dieses Resultat weicht von dem nach der Formel (557) abgeleiteten wesentlich ab, und kann auch nicht mit der Zahlenreihe (553) vereinigt werden. Man erhält, wie man sieht, nach dieser den Angaben Hodgkinsons gemäss durchgeführten Berechnung das Tragvermögen gusseiserner Säulen bedeutend grösser, als die von Navier angeführten Erfahrungs-Resultate schliessen lassen. Nur weitere Erfahrungen werden geeignet sein, über diese Differenz die nöthige Aufklärung zu liefern. Bis dahin mag man in zweifelhaften Fällen sich dem kleineren von den nach beiden Methoden berechneten Resultaten nähern, und zwar um so mehr, als Hodgkinson bei seinen Versuchen keineswegs innerhalb der Elasticitätsgränzen verblieben ist, sondern sich vorzüglich mit dem Bruche beschäftigt hat, folglich auch seine empirische Formel nicht so ganz unbedenklich zugelassen werden kann, wenn man von der Bruchbelastung rückwärts auf das Tragvermögen schliesst,

Vierter Abschnitt.

Widerstand von Körpern, deren Materie eine vollkommene Ununterbrochenheit und einen gänzlichen Zusammenhang ihrer Theile nicht besitzt.

§. 251.

Erklärung. Die bisherigen Erörterungen über den Widerstand der Körper stützen sich auf die Voraussetzung, dass die Materie derselben homogen sei, daher eine vollkommene Ununterbrochenheit und einen gänzlichen Zusammenhang ihrer Theile besitze. Diese Voraussetzung ist, abgesehen von den Ungleichheiten in der Qualität der Materie, in vielen Fällen auch insoferne nicht vorhanden, als die Ununterbrochenheit derselben durch die Zusammensetzung von mehreren Theilen zu einem Ganzen, oder durch Oeffnungen und Einschneidungen für Zapfen, Bolzen, Nägel, Nieten, Schrauben, Schliessen etc. in der Absicht gestört wird, um aus Stücken von geringen Dimensionen durch Zusammensetzung ein Stück von grossen Dimensionen zu bilden. Sodann kommt zu erwägen, auf welche Weise bei solchen Körpern die Beurtheilung ihres Widerstandes vorgenommen werden kann.

§. 252.

Verfahren in solchen Fällen. Es leuchtet ein, dass der Widerstand eines in seiner Materie unterbrochenen Körpers kleiner sein muss, als jener, welchen er bei gänzlichem Zusammenhange der Materie zu leisten fähig wäre. Der Erfahrung gemäss ist man im Stande, die Theile eines Ganzen auf solche Weise solid und zweckmässig zu verbinden, dass der Widerstand (abgesehen von seiner

eigentlichen Grösse) innerhalb der Sicherheitsgränzen beinahe nach denselben Gesetzen erfolgt, welche für homogene Körper giltig erscheinen. Dann aber kann man sich erlauben, das Tragvermögen, die Biegung etc. bei zusammengesetzten Körpern nach den für homogene Körper gegebenen Formeln zu berechnen, nur mit dem Unterschiede, dass man statt den in jenen Formeln vorkommenden Grössen a, r und m verhältnissmässig kleinere a', r' und m' einführt. Wenn nämlich für die homogene Materie die Elasticitätsgränzwerthe für die Ausdehnung und Zusammendrückung mit a und r, der Modul der Längenveränderung aber mit m bezeichnet werden, so hat man bei der Betrachtung des in seiner Materie unterbrochenen sonst gleichen Körpers die analogen Grössen $a' = n\,a$, $r' = p\,r$ und $m' = q\,m$ einzuführen, wobei die Coefficienten $n = \frac{a'}{a}$, $p = \frac{r'}{r}$ und $q = \frac{m'}{m}$ echte Brüche vorstellen. Die Kenntniss dieser Brüche ist von Wesenheit; ihre Werthe vermag man jedoch im Allgemeinen nicht anzugeben; sie können übrigens einander gleich, können aber auch unter einander verschieden sein. Dieses Verhalten hängt von der Art und Weise ab, wie die Theile mit einander verbunden sind. Die verlässlichste Lehrerin in dieser Beziehung ist die Erfahrung. Da jedoch über die verschiedenen Verbindungsarten nicht immer genügende Erfahrungen vorliegen, sondern sich oftmals nur einzelne Anhaltspuncte ergeben werden, so ist man in vielen Fällen darauf angewiesen, durch eine zweckmässige Benützung solcher Anhaltspuncte das Lückenhafte im Wege practischer Schätzung auszufüllen. Diese Bemerkungen geben zur Aufstellung folgender Regel Veranlassung:

Bei entsprechender Verbindung der einzelnen Theile zu einem Ganzen kann das Letztere in seinem Verhalten eben so beurtheilt werden, wie ein homogenes Ganze von minderer Qualität der Materie.

Diese Regel wird insbesondere in solchen Fällen Anwendung finden, wo man in eine umständliche Untersuchung des Widerstandes eines jeden der einzelnen Theile nicht eingehen kann.

Erstes Kapitel.

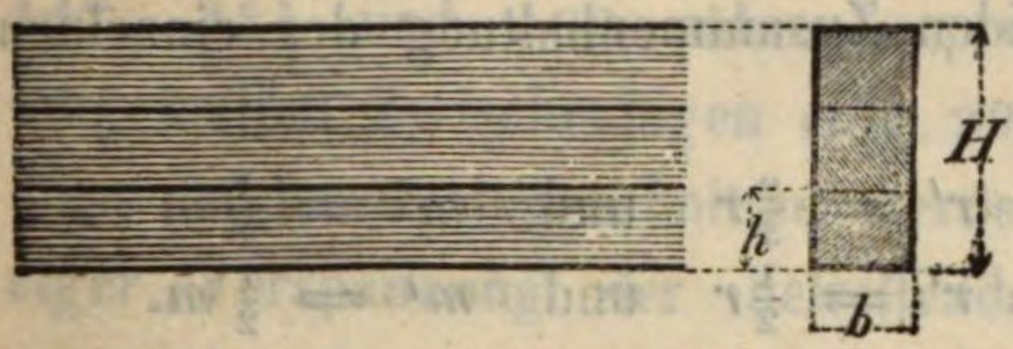
Holzverbindungen.

§. 253.

Holzverbindungen zur Vergrösserung des Querschnittes.

Bei der Verbindung von mehreren Holzstücken zu einem Ganzen wendet man theils eiserne Bänder und Schrauben, theils solche im Vereine mit der Verzahnung, Verkeilung und Verstrebung an, um den Querschnitt und dadurch die Tragfähigkeit des Ganzen zu vergrössern. Dabei ist insbesondere zu bemerken:

Fig. 287.



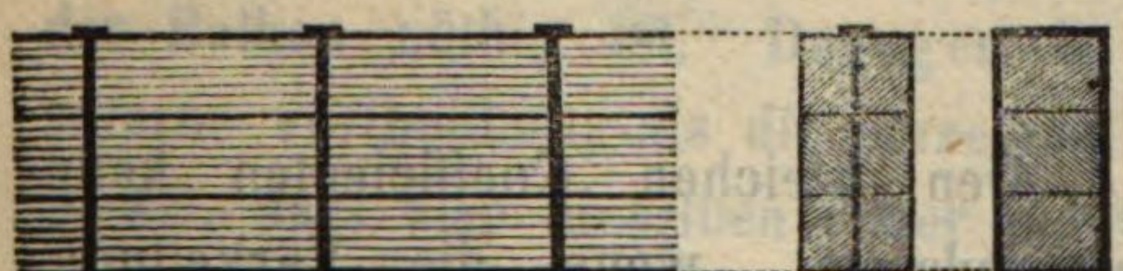
1. Werden (Fig. 287) zur Vermehrung der Höhe des Trägers N gleiche Balken einfach übereinander gelegt, und würde zwischen ihren Berührungsflächen keine Reibung stattfinden, so wäre offenbar nach der Formel (96) mit Rücksicht auf den §. 79 ad 1 der Werth von $\frac{1}{6} r b h^2$ das Tragmoment eines jeden einzelnen Balkens, somit jenes von allen N Balken

$$\frac{1}{6} r N b h^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{r}{N}\right) b H^2 = \frac{1}{6} r' b H^2.$$

Wäre hingegen der Träger nach seiner ganzen Höhe H homogen, daher nicht aus Theilen zusammengesetzt, so würde sich das Tragmoment mit $\frac{1}{6} r b H^2$ berechnen. Es ist also in dem obigen Falle gerade so, wie, wenn man den zusammengesetzten Träger als homogen betrachtet, und nur $r' = \left(\frac{r}{N}\right)$ statt r gesetzt hätte.

Wenn man (Fig. 288) die über einander gelegten Balken fest

Fig. 288.



mit einander verschraubt, oder mit eisernen Bändern umschliesst, und zugleich die Reibung zwischen den Berührungsflächen berücksichtigt so kann das Tragmoment des ganzen Querschnittes wieder durch die Formel $\frac{1}{6} r' b H^2$ ausgedrückt werden, nur wird jetzt der Werth von

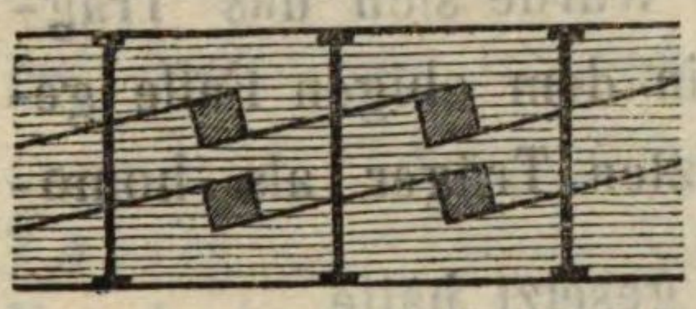
r' grösser als zuvor, d. i. $r' > \left(\frac{r}{N}\right)$ anzunehmen sein. Da nun für die vollkommene Homogenität der Trägermaterie $r' = r$ wäre, so folgt, dass der eigentliche Werth von r' für den in Rede stehenden Fall (Fig. 288) zwischen den Gränzen $\frac{1}{N} r$ und r liegt, daher diese desto weiter auseinander rücken, je grösser N, d. h. aus desto mehr Balken der Träger zusammengesetzt ist. Ausserdem aber hängt die Feststellung von r' noch von der Solidität der Zusammenhaltung, so wie von dem Einflusse ab, den man der Reibung zuschreibt, was der Hauptsache nach grösstentheils nur abgeschätzt werden kann. Die Klugheit erfordert es, bei solchen Abschätzungen nicht allzuviel Vertrauen auf die Solidität der Verbindung zu setzen. So z. B. kann man bei einer soliden Zusammenhaltung der einzelnen Balken höchstens annehmen:

für $N = 2$, $a' = \frac{2}{3} a$, $r' = \frac{2}{3} r$ und $m' = \frac{2}{3} m$
„ $N = 3$, $a' = \frac{1}{2} a$, $r' = \frac{1}{2} r$ und $m' = \frac{1}{2} m$.

Fig. 289.

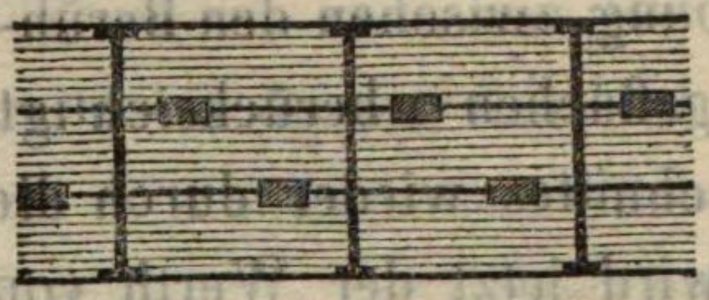
2. Wendet man (Fig. 289) die Verzahnung und Verschraubung, oder statt der letzteren das Umschlingen mittelst eiserner Bänder gleichzeitig an, so kann man bei sonst solider Anarbeitung und Zusammensetzung die Werthe $a' = \frac{3}{4} a$, $r' = \frac{3}{4} r$ und $m' = \frac{3}{4} m$ zulassen.

Fig. 290.



3. Wenn (Fig. 290) ausserdem auch die Verkeilung angewendet wird, und dabei die eingelegten Keile von gutem hartem Holze sind, so nähert sich der so zusammengesetzte Träger mehr einem homogenen Ganzen, als in den obigen Fällen. Es wird sodann der fragliche Coefficient sogar bis $\frac{4}{5}$ gesteigert, und demgemäss $a' = \frac{4}{5} a$, $r' = \frac{4}{5} r$ und $m' = \frac{4}{5} m$ gesetzt werden können.

Fig. 291.



4. Den gleichen Coefficienten kann man zulassen, wenn die Verkeilung mit der Verschraubung (Fig. 291) vereint angewendet wird. Dabei ist es zweckmässig, die Keile so zu vertheilen, dass jeder in der unteren Reihe

zwischen zwei der oberen Reihe zu liegen kommt. Auch hier kann das Zusammenhalten mittelst Eisenbändern anstatt der Schrauben geschehen.

5. Macht man (Fig. 292 und 293) die Keile so gross, dass zwischen den Balken ein leerer Raum entsteht, so hat man es mit einer

Fig. 292.

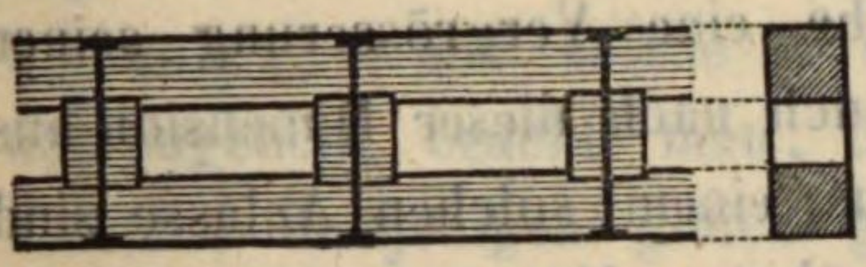
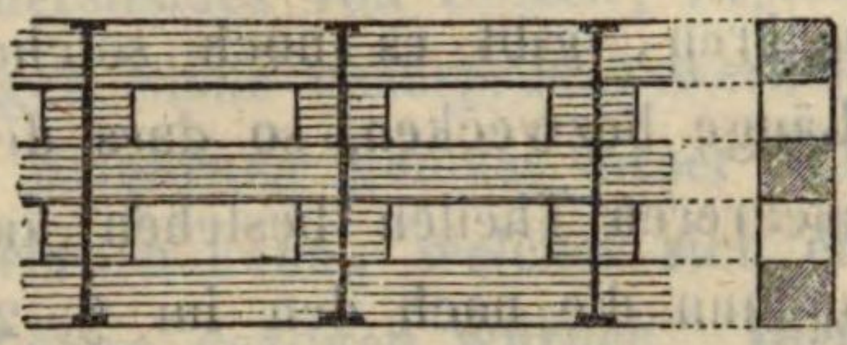


Fig. 293.



solchen Querschnitts-Kategorie zu thun, welche mittelst der Figuren 104, 126, 179 und 181 dargestellt, und dort, so wie in den §§. 146, 147, 161 und 162 näher besprochen worden ist. Lässt man die eingekeilten Zwischenlagen (Fig. 292) in die Balken eingreifen, wozu diese letzteren eingeschnitten werden müssen, so kann man bei gehöriger Verspannung der betreffenden Schrauben oder Eisenbänder statt $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ ungefähr $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ zulassen. Sind aber die Zwischenlagen (Fig. 293) nicht eingelassen, so verlangt es die Vorsicht, den Werth jener Brüche nur mit $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ anzunehmen.

§. 254.

Bemerkung über die Anwendung von Schrauben und eisernen Bändern zur Verbindung von Holzstücken. In dem vorigen §. hat man gesehen, dass zur Verbindung mehrerer Holzstücke mit einander sowohl eiserne Schrauben, als auch eiserne Bänder verwendet werden können. Jedes dieser Verbindungsmittel hat sein Eigenthümliches. Das Umschlingen der Balken mit eisernen Bändern bietet zunächst den Vortheil dar, dass dazu nicht, wie bei der Schraubenanwendung, eine Durchlöcherung der Balken nöthig ist. Dagegen ist die Verschraubung wieder insoferne vortheilhaft, als die einzelnen Theile stärker an einander gepresst, dass also dieselben fester unter einander als mittelst Bändern verbunden werden können. Diese Vortheile und beziehungsweise Nachtheile der beiden Verbindungsarten einander entgegengehalten und mit den Umständen des jeweilig zu betrachtenden Falles gehörig

combinirt, werden die Ansicht feststellen lassen, ob dabei diese oder jene Verbindungart in Anwendung zu bringen wäre.

§ 255.

Holzverbindungen zur Vergrösserung der Länge. Ausser den Verbindungen, welche zwischen einzelnen Stücken angewendet werden, um die Höhendimension eines Trägers zu vermehren, gibt es noch solche, welche eine Vergrösserung seiner Länge bezwecken, so dass derselbe auch nach dieser Dimension aus mehreren Theilen bestehen kann. Aus einem solchen Anlasse sind sodann die nach den im §. 253 erwähnten Umständen entzifferten Coefficienten $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ in ihren Werthen noch weiter herunterzudrücken.

Zweites Kapitel.

Schmiedeeisen- und Blechverbindungen.

§. 256.

Verbindungsmittel. Stücke aus Schmiedeeisen und Blech pflegt man mittelst Bolzen, Zapfen, Schrauben und Nieten zu einem Ganzen zu verbinden. Bei solchen Constructionen werden die genannten Verbindungsmittel (Fig. 294) zwar normal auf ihre Längen-

Fig. 294.

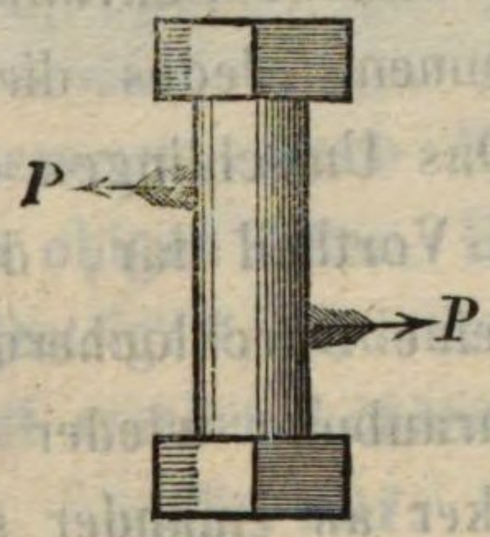


Fig. 295.

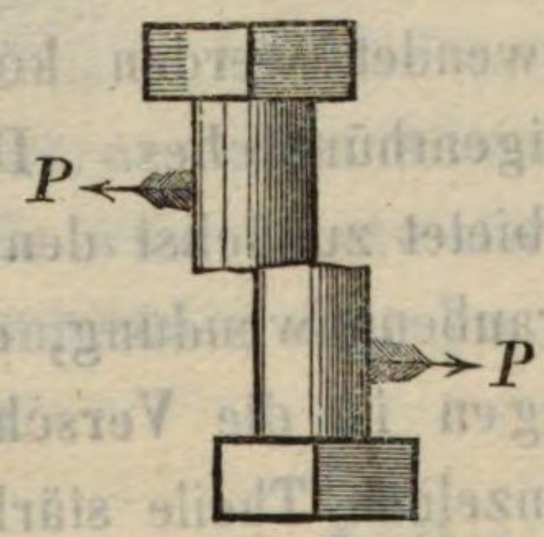
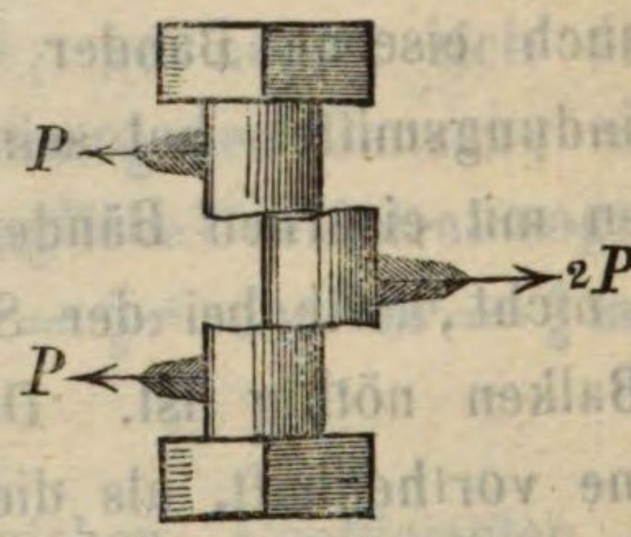


Fig. 296.



axe in Anspruch genommen, sie sind jedoch in der Regel zu kurz, um ihr Verhalten nach dem gewöhnlichen Biegungswiderstande beurtheilen zu dürfen. Hier tritt nämlich diejenige Wirkung in den Vordergrund, welche das Gleichgewicht auf die in den Fig. 295 und 296 an-

schaulich gemachte Weise zu stören beabsichtigt, und worauf bereits im §. 43 (Fig. 22), so wie in der Anmerkung am Schlusse des ersten Hauptstückes aufmerksam gemacht wurde.

§. 257.

Widerstand der Bolzen, Zapfen, Schrauben. Um sogleich auf die Bestimmung des Widerstandes von Bolzen, Zapfen, Schrauben, wenn solche in dem obigen Sinne beansprucht werden, überzugehen, beachte man, dass der Erfahrung gemäss dieser Widerstand demjenigen gleich gesetzt werden kann, welcher sich ergäbe, wenn diese Theile nach der Länge gezogen würden. Hiernach ist der grösste zulässige Widerstand P dem Bolzenquerschnitt q proportional, und für jeden Quadratzoll des letzteren mit a (Ztr.) anzunehmen, was sofort auf die Gleichung

$$P = aq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (559)$$

führt. Ist nun der nöthige Widerstand P bekannt, so ergibt sich aus dieser Gleichung der Bolzenquerschnitt q, somit auch dessen Durchmesser β, wenn z. B. ein kreisförmiger Querschnitt vorhanden sein soll. Hier ist nämlich (das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser $= \pi$ gesetzt) wegen

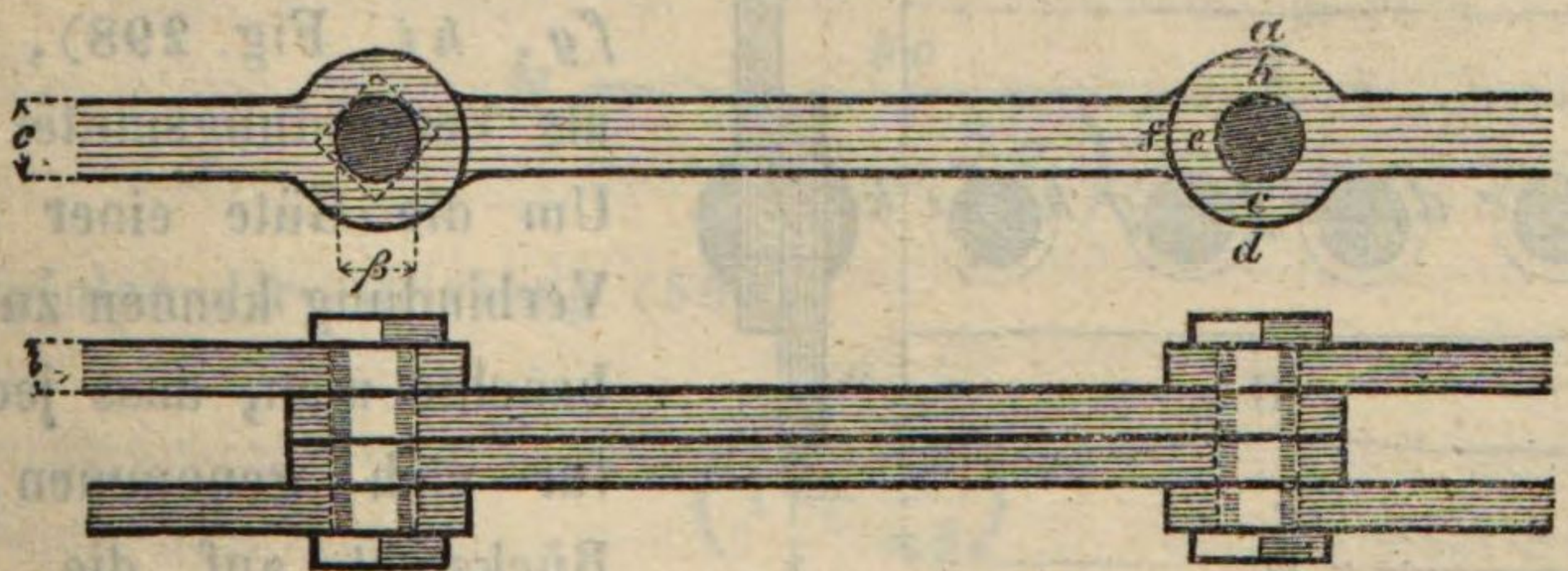
$$q = \frac{\pi}{4}\beta^2 \text{ zunächst } \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{q} = 1{\cdot}128\sqrt{q},$$

hiernach und wegen $q = \frac{P}{a}$ aber

$$\beta = 1{\cdot}128\sqrt{\frac{P}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (560).$$

Die Verbindung von Schmiedeeisen mittelst Bolzen findet vorzüglich bei der Construction von Ketten aus Eisenschienen statt (Fig. 297). Indem die Ketten nach ihrer Länge gezogen werden,

Fig. 297.



erleiden die Bolzen die oben erwähnte Anspruchsnahme. Hierbei hat jedes Kettenglied nach der Länge denselben Widerstand zu leisten, wie der Bolzen bezüglich des Uebereinanderschiebens seiner Querschnitte. Sind daher Schienen und Bolzen von einerlei Material, so folgt, dass der Querschnitt einer Schiene, nach der Cotirung $b\,c\,\square''$, eben so gross zu machen ist, wie der Bolzenquerschnitt $q = \frac{\pi}{4}\beta^2$, und umgekehrt. In diesem Falle hat man $\frac{\beta^2\pi}{4} = bc$ und hieraus

$$\beta = 1{\cdot}128\sqrt{b\,c}.$$

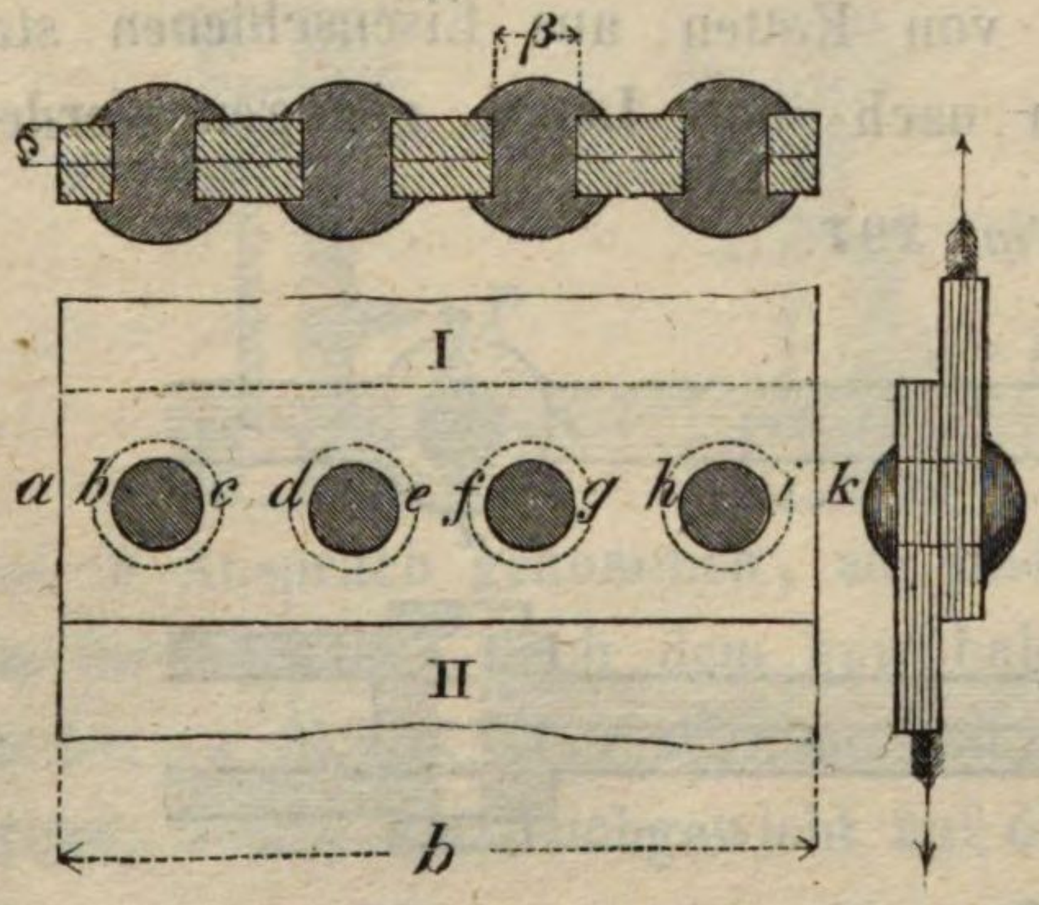
Vorsichtshalber kann man den Coefficienten 1·128 etwas vergrössern.

Bezüglich der Dimensionen des Ringes um den Bolzen ist zu bemerken, dass man eigentlich nur nöthig hätte, $\overline{a\,b} = \overline{c\,d} = \overline{e\,f} = \frac{1}{2}c$ zu machen, dass man aber zur Vermehrung der Sicherheit jene Dimensionen bis auf $\frac{2}{3}c$ steigern mag, um den Nachtheil zu beseitigen, der durch das Auswetzen der Kettengliederaugen im Laufe der Zeit entstehen kann. Sind so die Dimensionen $\overline{a\,d}$, $\overline{b\,c}$ und $\overline{e\,f}$ an der Verbindungsstelle im Vergleiche zu den Ausmassen b und c entsprechend gewählt, so hat man den Widerstand der Schienen gegen einen Zug so zu beurtheilen, wie wenn sie prismatisch geformt und durchgehends mit dem Querschnitte $b\,c\,\square''$ versehen wären.

§. 258.

Einfache Vernietung. Die Bemerkungen im vorigen §. finden eine weitere Anwendung bei der Beurtheilung der Berbindung von eisernen Schienen, Platten oder Blechen mittelst **Nieten**. Nieten sind eigentlich kleine Bolzen ($b\,c$, $d\,e$, $f\,g$, $h\,i$, Fig. 298), welche als Verbindungsmittel dienen. Um die Güte einer solchen Verbindung kennen zu lernen, beachte man, dass jede Platte für sich genommen, ohne Rücksicht auf die Durch-

Fig. 298.



löcherung den Querschnitt bc hat, wenn die Breite der Platte b und ihre Dicke c ist. Sind aber in den Platten N Nietlöcher vorhanden, und hat jedes Nietloch den Durchmesser β, so ist der eigentliche Widerstand leistende Querschnitt an den Verbindungsstellen nur $(b - N\beta)\,c\,\square''$, welcher mit Sicherheit einem Zuge von $a(b - N\beta)\,c$ Ztr. ausgesetzt werden darf. Wenn man daher bei der Berechnung des Widerstandes der vernieteten Bleche den vollen Querschnitt bc einführen, demungeachtet aber das richtige Resultat $a(b - N\beta)\,c$ erhalten will, so muss man die grösste zulässige Spannung per $\square''$, nämlich a', derart annehmen, dass $a'bc = a(b - N\beta)\,c$ wird. Hieraus folgt

$$a' = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right) a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (561).$$

Das Verhältniss $\frac{a'}{a} = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right)$ ist selbstverständlich jenem gleichbedeutend, das zwischen dem geschwächten und dem vollen Plattenquerschnitte stattfindet.

Diesem Resultatate zufolge können die zusammengenieteten Platten (Bleche) gegen einen Zug, welcher alle Nieten gleich in Anspruch nimmt, einen Widerstand leisten, der in dem Verhältnisse $\frac{a'}{a} = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right)$ kleiner ist, als derjenige, welchen diese Platten ohne Durchlöcherung zu leisten fähig wären. Dazu müssen aber auch die Nieten die gehörige Stärke haben, somit alle zusammen denselben Widerstand leisten können, wie die zusammengenieteten Platten. Sind die Nieten aus gleich gutem Materiale angefertigt, so ist ihr Widerstand $aN\beta^2\frac{\pi}{4}$, wornach der obigen Bemerkung gemäss

$$\frac{\pi}{4}\,a\,\beta N^2 = a(b - N\beta)\,c$$

sein muss. Hieraus folgt

$$N = \frac{bc}{\beta\left(c + \frac{\pi}{4}\beta\right)},$$

und zufolge der Gleichung (561)

$$a' = \frac{a}{\left(1 + \frac{4c}{\pi\beta}\right)}.$$

Drückt man jetzt den Nietendurchmesser β als ein Vielfaches von der Platten- oder Blechdicke c aus, d. i. $\beta = x\,c$, wo x einen numerischen Coefficienten bezeichnet, so findet man

$$a' = \frac{a}{\left(1 + \frac{4}{x\,\pi}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (562)$$

und

$$N = \frac{1}{x\left(1 + \frac{x\,\pi}{4}\right)} \frac{b}{c} \quad \ldots\ldots \quad (563),$$

endlich die Entfernung der Ränder der Nietlöcher,

$\left(\text{nämlich } \overline{c\,d} = \overline{e\,f} = \overline{g\,h} = \frac{b - N\beta}{N}\right)$, welche mit ε bezeichnet wird,

$$\varepsilon = \frac{\pi\,x^2}{4}\,c \quad \ldots\ldots \quad (564).$$

Wird z. B. für die Vernietung von nicht zu dicken Blechen $x = 2$ angenommen, so dass der Längenschnitt einer Niete ohne Rücksicht auf ihre Köpfe ein Quadrat bildet, dessen Seite $(2\,c)$ die doppelte Blechstärke ist, so findet man insbesondere

$$a' = 0{\cdot}611\,a, \quad N = 0{\cdot}194\,\frac{b}{c} \text{ und } \varepsilon = 3{\cdot}142\,c.$$

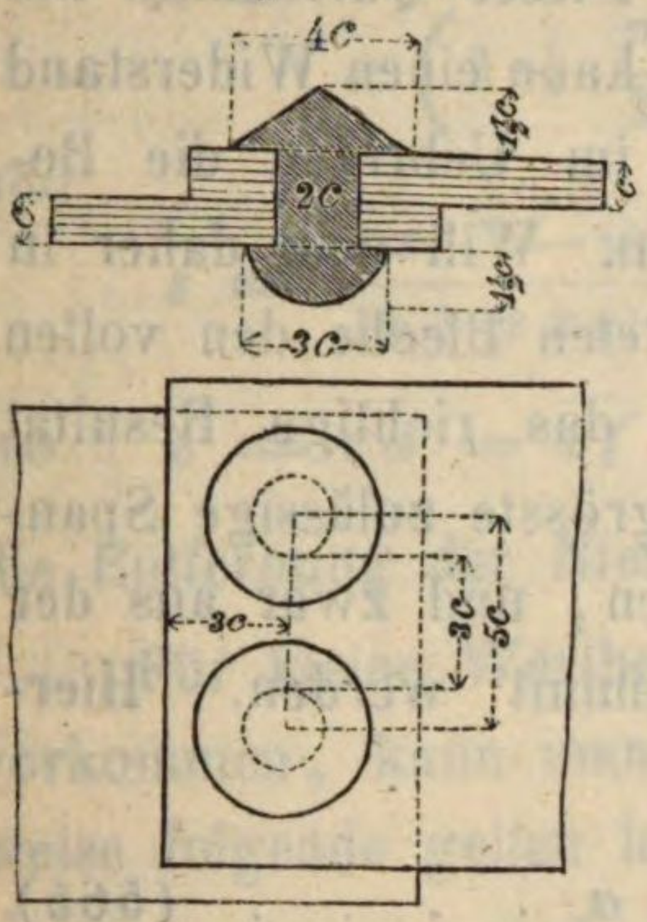
In diesem Falle beträgt der Widerstand der vernieteten Bleche nur ungefähr 61 % von jenem der ungeschwächten Bleche. Zur Sicherheit mag man höchstens 50 bis 55 % rechnen, und demnach $a' = 0{\cdot}5\,a$ bis $0{\cdot}55\,a$ annehmen, zumal Ungleichförmigkeiten in der Qualität der Materie und in der Anarbeitung nicht vermieden werden können.

Die in diesem §. untersuchte Vernietung heisst die einfache, weil die Nieten nur in einer Reihe vorhanden sind. Mit den obigen Resultaten stehen jene der Versuche in Uebereinstimmung. Nach diesen schlägt Fairbairn den Widerstand einfach vernieteter Bleche mit 56 % von dem der ungeschwächten Bleche an *).

---

*) Siehe die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1853 Seite 239.

Fig. 299.

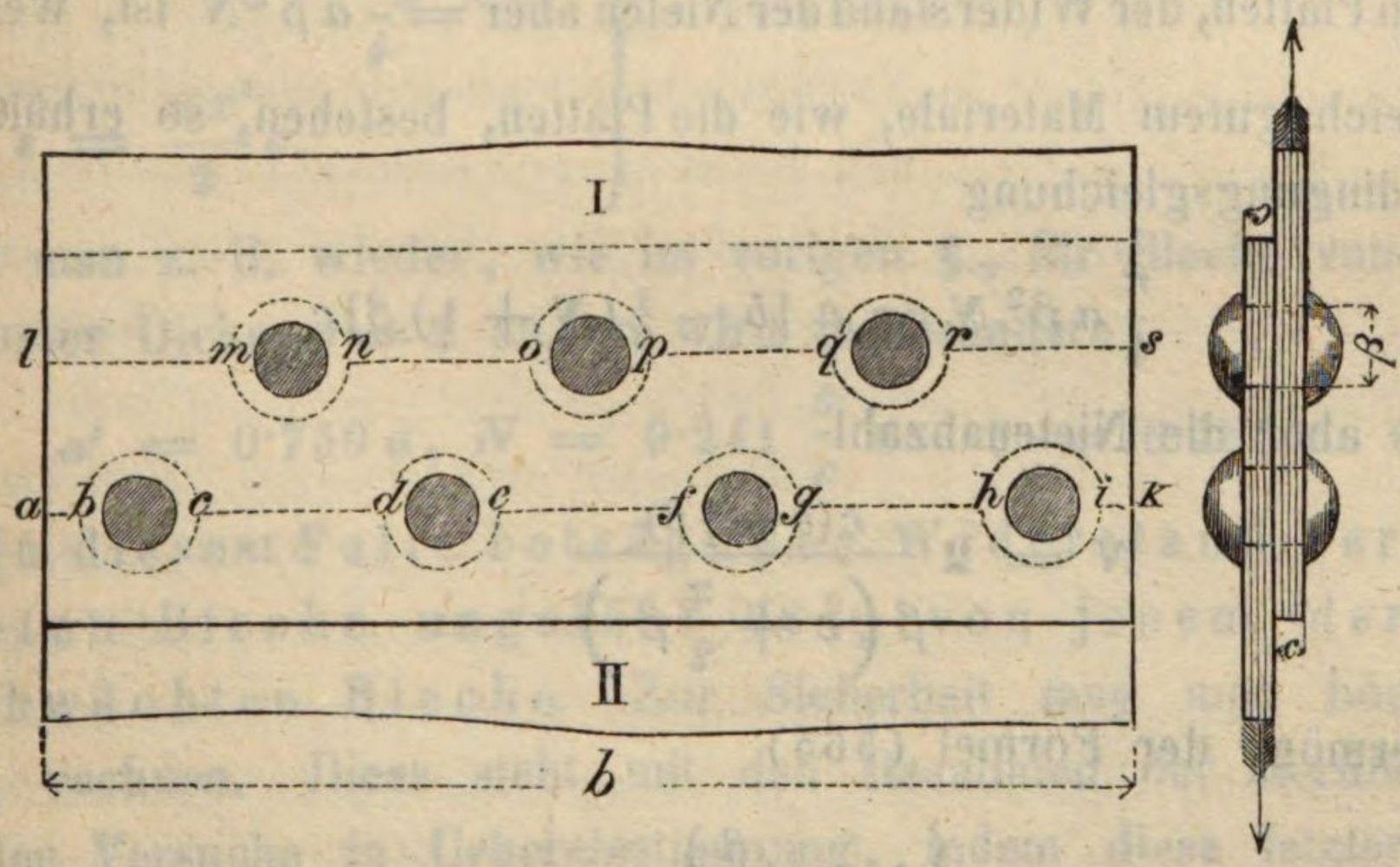


Redtenbacher empfiehlt für die einfache Blechvernietung die in der Fig 299 ersichtliche Constructionsweise, bei welcher das Verhältniss $x = 2$ zu Grunde liegt, und die Entfernung der Nietenränder mit der dreifachen Blechstärke bemessen ist, was beides mit den vorigen Bemerkungen im Einklange steht.

§. 259.

Doppelte Vernietung. Wenn (Fig 300) zwei eiserne Stücke (Platten, Bleche) so mit einander vernietet werden, dass die Nieten in doppelten Reihen vorkommen, so heisst diese Vernietung die doppelte. Ist N die An-

Fig. 300.



zahl der Nieten in beiden Reihen ak und ls, so entfallen auf die eine Reihe $\left(\frac{N+1}{2}\right)$, auf die zweite Reihe aber $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ Nieten, oder umgekehrt, da man die Nieten so anzubringen pflegt, dass jede der einen Reihe zwischen zwei der andern Reihe zu liegen kommt, aus welchem Grunde auch N eine ungerade Zahl sein muss. Werden die beiden Platten nach der Richtung der Pfeile auseinandergezogen, und hierbei alle Nieten gleichmässig in Anspruch genommen, so ist der schwächste Querschnitt der Platten in ak, und derselbe zur

Beurtheilung des Widerstandes massgebend. Dieser Querschnitt hat einen Inhalt von $[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta]\,c\,\square''$, und kann einen Widerstand von $a\,[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta]\,c$ Ztr. leisten, wenn im Uebrigen die Bezeichnungen des vorigen §. beibehalten werden. Will man daher in der Berechnung des Widerstandes der vernieteten Bleche den vollen Querschnitt $b\,c\,\square''$ einführen, dennoch aber das richtige Resultat für den Widerstand erhalten, so muss die grösste zulässige Spannung per $\square''$ a' geringer, als a angenommen, und zwar aus der Relation $a'\,b\,c = a\,[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta]\,c$ bestimmt werden. Hieraus folgt

$$a' = \left[1 - \tfrac{1}{2}(N+1)\frac{\beta}{b}\right] a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (565).$$

Da ferner bei einer zweckmässigen Verbindung die gesammten N Nieten denselben Widerstand gegen das Verschieben ihrer Querschnitte übereinander leisten sollen, wie die nach der Länge gezogenen Platten, der Widerstand der Nieten aber $= \frac{\pi}{4}\,a\,\beta^2\,N$ ist, wenn sie aus gleich gutem Materiale, wie die Platten, bestehen, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{\pi}{4}\,a\,\beta^2\,N = a\,[b - \tfrac{1}{2}(N+1)\beta]\,c,$$

hieraus aber die Nietenanzahl

$$N = 2\,\frac{c\,(b - \frac{1}{2}\beta)}{\beta\left(c + \frac{\pi}{2}\beta\right)}$$

und vermöge der Formel (565)

$$a' = \left\{\frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\beta}{b}}{1 + \frac{2}{\pi}\frac{c}{\beta}}\right\} a.$$

Setzt man jetzt wieder, wie im vorigen §., allgemein $\beta = x\,c$, und ausserdem $\beta = y\,b$ (wo y in der Regel eine kleine Zahl ist), so ergeben sich folgende Formeln

$$a' = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}y}{1 + \frac{2}{\pi x}}\right) a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (566),$$

$$N = \frac{(2-y)}{x\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{b}{c} = \frac{(2-y)}{y\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (567).$$

und

$$\varepsilon = \frac{\pi x^2(2-y)}{(4+\pi xy)}c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (568),$$

wo $\varepsilon = \overline{cd} = \overline{ef} = \overline{gh} = \ldots = \frac{b-\frac{1}{2}(N+1)\beta}{\frac{1}{2}(N+1)}$

die Entfernung der Nietränder von einander bezeichnet.

Für kleine Werthe von y, welche in der Praxis gewöhnlich vorkommen, kann man statt der vorigen Gleichungen annäherungsweise folgende gelten lassen:

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{a}{\left(1+\frac{2}{\pi x}\right)} \\ N &= \frac{2}{x\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{b}{c} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (569).$$

und

$$\varepsilon = \frac{\pi x^2}{2}c.$$

Nimmt man z. B. wieder, wie im vorigen §., für Bleche von nicht zu grosser Dicke $x = 2$ an, so wird insbesondere

$$a' = 0{\cdot}759\,a,\ N = 0{\cdot}241\,\frac{b}{c} \text{ und } \varepsilon = 6{\cdot}283\,c.$$

In diesem Falle beträgt der Widerstand der vernieteten Bleche ungefähr 76 % von jenem der ungeschwächten Bleche. Zur Sicherheit mag man höchstens 70 % rechnen. Diess steht mit den Resultaten der hierüber angestellten Versuche in Uebereinstimmung, indem diese letzteren in der That den Coefficienten $\frac{a'}{a} = 0{\cdot}70$ ergeben haben *).

§. 260.

Besondere Anordnung bei der Verbindung von dicken Platten mittelst Nieten. Sind die zu vernietenden

*) Siehe die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1853, Seite 239.

Fig. 302.

Fig. 301.

Bleche von keiner bedeutenden Dicke, so kann man dieselben Behufs der Verbindung mittelst Nieten auf die in den Fig. 298, 299 und 300 ersichtliche Weise übergreifen lassen. Der Uebelstand, dass dadurch die Blechplatten nicht alle genau in eine Ebene kommen, und desshalb die durch die Pfeile angezeigten Kraftrichtungen nicht vollkommen entgegengesetzt sind, tritt nämlich bei geringen Blechdicken nicht störend auf. Ist aber die Plattendicke beträchtlich, z. B. $\frac{1}{2}''$, $\frac{3}{4}''$ (wie bei den englischen Röhrenbrücken), so erscheint es zweckmässig, die Platten in eine Ebene zu bringen. Wie diess bewerkstelligt werden kann, lassen die Fig. 301 und 302 entnehmen.

Der Fig. 301 gemäss sind die zu einem Ganzen zusammenzufügenden Platten an den Stossfugen beiderseits mit besonderen Platten bedeckt. Diese Deckplatten werden zusammengenietet, so dass die Nieten durch drei Tafeln greifen.

Nach der anderen Fig. 302 sind die Platten durchaus doppelt übereinandergelegt, wobei die Stossfugen abwechseln, wodurch (wie man zu sagen pflegt) immer Voll auf Fug kommt. Jede Stossfuge wird noch mit einer besonderen Platte bedeckt, und diese letztere mit den Doppelplatten vernietet. Auch in diesem Falle greifen die Nieten durch drei Platten. Man sieht zugleich, dass die Deckplatten abwechselnd bald auf die eine, bald auf die andere Seite der Doppelplatten zu liegen kommen.

Diese beiden Verbindungsarten sind sehr zweckmässig, denn durch die Deckplatten

wird der Nachtheil der Stossfugen beinahe aufgehoben, und der Wunsch einer vollkommenen Gleichförmigkeit in der Stärke der Platten an ihren einzelnen Stellen in hohem Grade erreicht. Der betreffende Coefficient für $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ wird daher auch der Einheit ziemlich nahe kommen. Diese Verbindungarten sind bei den erwähnten Röhrenbrücken (Conway- und Britannia-Brücke) in Anwendung gekommen.

§. 261.

Verhalten genieteter Blechwände gegen Biegung. Bisher sind die vernieteten Blechplatten nur insoferne betrachtet worden, als sie einem Zuge ausgesetzt werden. Es erübrigt daher noch ihr Verhalten gegen Zusammendrückung und gegen Biegung zu untersuchen.

Was zuerst die Zusammendrückung betrifft, so kann in der Regel $\frac{r'}{r}$ eben so gross, wie $\frac{a'}{a}$ angenommen werden.

Bei der Biegung dringt sich vor Allem die Bemerkung auf, dass die Nieten ungleichförmig in Anspruch genommen werden, wenn die Nietenreihen in die Höhenrichtung des Querschnittes des ganzen Körpers fallen, also normal auf der Biegungscurve stehen, wie diess z. B. bei einer horizontal liegenden vierkantigen Blechröhre der Fall ist, wenn in den Seitenwänden die Nietenreihen vertical laufen. Eine solche durch die Nietlöcher geschwächte Wand bietet einen Träger-Querschnitt nach Art der Fig. 181 dar. Da die Nieten im Vergleiche zur Höhe der Tragwand nnr klein sein werden, so kann man das Trägheitsmoment des Querschnittes für eine solche Wand nahe genug mittelst der Formel $t = \frac{1}{12} f H^2$ ausdrücken, wo f den reellen nach Abzug der Nieten übrigbleibenden Querschnitt und H die Höhe der Wand bezeichnet. Diese Formel entspricht nämlich desto mehr dem Querschnitte 181 im §. 135, je kleiner die leeren Räume desselben sind. Obiges Trägheitsmoment t wäre nun in der betreffenden Formel für die Biegung mit dem Modul der Längenveränderung m, in jener für das Tragmoment aber mit der grössten zulässigen Spannung a per $\square''$ zu multipliciren, so dass die Biegung als eine Function von $mt = \frac{1}{12} mfH^2$ und das Tragmoment, also auch das Tragvermögen als eine Function von $at = \frac{1}{12} afH^2$ anzusehen ist. Bei derartigen Berechnungen pflegt man

jedoch nicht den reellen, durch die Nieten geschwächten, sondern den ganzen Querschnitt F so einzuführen, wie, wenn keine Nietlöcher vorhanden wären. Diesem Querschnitte entspricht das Trägheitsmoment $T = \frac{1}{12} F H^2$. Um nun mit Hilfe dieses imaginären Werthes von T dennoch das richtige Resultat für die Biegung und das Tragvermögen zu finden, wird man offenbar statt a und m kleinere Werthe a und m' zu substituiren, und letztere aus den Relationen $m t = m' T$ und $a t = a' T$ abzuleiten haben. Hiernach findet man

$$m' = m \frac{t}{T} = m \frac{f}{F} \text{ und } a' = a \frac{t}{T} = a \frac{f}{F},$$

somit

$$\frac{a'}{a} = \frac{m'}{m} = \frac{f}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (570).$$

Indem nun das Verhältniss $\frac{f}{F}$ dasselbe ist, welches auch bei den in den §§. 258 und 259 angestellten Betrachtungen, wo bloss das Auseinanderziehen der vernieteten Platten behandelt wurde, massgebend für den Werth $\frac{a'}{a}$ gewesen war, kann man behaupten, dass jenes Verhältniss auch bei der Biegung für $\frac{a'}{a}$ und $\frac{m'}{m}$ angewendet werden darf.

Fünfter Abschnitt.

Brücken, bei welchen hauptsächlich der Biegungs-Widerstand in Betracht kommt.

§. 262.

Vorerinnerung. Die vorausgehenden Untersuchungen über den Widerstand der Materialien unter verschiedenen Umständen finden vorzüglich Anwendung im Bauwesen bei der Construction von **Brücken.** In diesem Abschnitte werden jene Brücken untersucht, bei welchen hauptsächlich der Biegungswiderstand in Betracht kommt.

§. 263.

Beurtheilung der Güte solcher Brücken. Die zweckmässigste Methode, die Güte einer solchen Brücke zu beurtheilen, ist diejenige, wo man aus dem entsprechend gewählten Querschnitte zuerst auf die zulässige Maximalspannweite schliesst, und daran die weiteren Bedingungen zu knüpfen versucht, welche aus Anlass der betreffenden Constructionsweise überdiess zu erfüllen nothwendig sind. Bei ausgeführten Brücken, für welche also die Spannweite bekannt ist, wird es zur Beurtheilung und gleichzeitigen Belehrung in der Regel vortheilhaft sein, aus den thatsächlichen Verhältnissen die grösste Anspruchsnahme (Spannung, Pressung) zu folgern, welche die einzelnen Constructionstheile zu erleiden haben. Der Gang der Untersuchung in beiden Fällen ist derselbe, nur wird in den betreffenden Formeln bald die eine, bald die andere Grösse als die zu suchende Unbekannte erscheinen.

Behufs der Bestimmung der zulässigen Maximalspannweite L in Wiener Klaftern sei

M die Summe der Tragmomente von allen Trägerquerschnitten im Sinne des §. 77, ferner

g in Wiener Zentnern das auf jede Klafter Brückenlänge durchschnittlich entfallende Totalgewicht; und es zerfalle dasselbe in den Antheil

g_1, welcher von dem eigenen Brückengewichte, und in den Antheil g_2, welcher von der grössten zufälligen Belastung herrührt, so dass die Relation $g = (g_1 + g_2)$ stattfindet.

Betreffend die Ausmittlung des Gewichtsantheiles g_1, so hat man hierbei Träger, Brückenbahn, Geländer, Beschotterung etc., überhaupt die permanent schwebende Last zu berücksichtigen.

Was hingegen die grösste zufällige Belastung g_2 betrifft, so ist vor Allem zu unterscheiden, ob es sich um eine gewöhnliche Strassenbrücke, oder aber um eine Eisenbahnbrücke handelt.

Für gewöhnliche Strassenbrücken pflegt man bekanntlich die grösste zufällige Belastung mit Rücksicht auf das mögliche Entstehen von Menschengedränge mit 25 bis 30 Zentnern per $\square^0$ benützbarer Brückenbahnfläche anzunehmen.

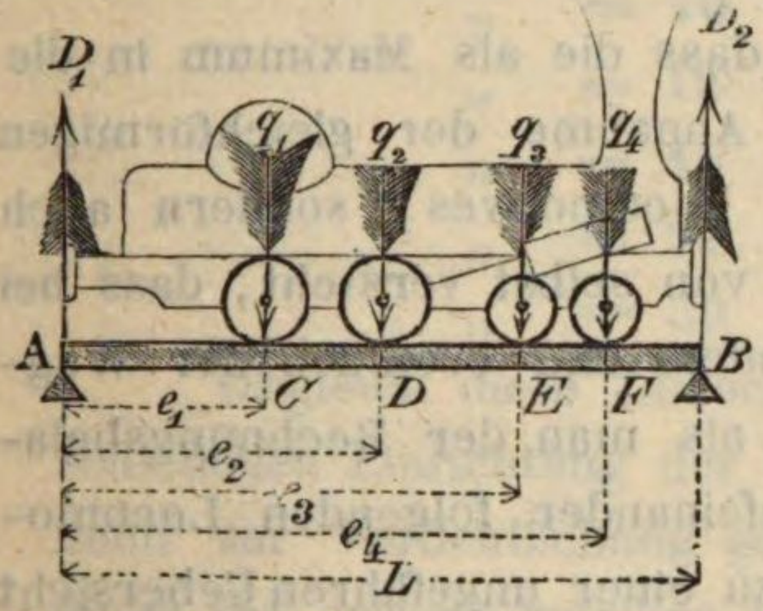
Für Eisenbahnbrücken wird in England die grösste zufällige Belastung nach der Annahme, dass die ganze Brücke mit Locomotiven besetzt sei, auf 1 bis $1\frac{1}{2}$ Tonnen per Längenschuh veranschlagt, was nach österr. Mafse und Gewichte 113 bis 170, also im Durchschnitte ungefähr 140 Zentner per Längenklafter ergibt.

Auf die Höhe dieser Bemessung hat offenbar die Locomotiv-Construction so wie auch die Brückenlänge Einfluss. Um letzteres zu begreifen, berücksichtige man, dass das Locomotivgewicht sich nicht gleichförmig nach der Brückenlänge vertheilt, sondern dasselbe, weil die Uebertragung auf die Brückenbahn mittelst der Lauf- und Triebräder geschieht, eigentlich nur an einzelnen Stellen seine Wirkung äussert, so dass bei kleinen Brücken von 5, 4, 3 Klaftern Länge, wenn das Locomotiv darauf eben in der ungünstigsten Stellung sich befindet, die Wirkung der zufälligen Belastung bedeutend grösser werden kann, als wenn diese nach der Länge gleichmässig vertheilt wäre. Will man nun demungeachtet die zufällige Maximalbelastung nach der Hypothese der gleichförmigen Ver-

theilung einführen, so muss man dafür eine im Vergleiche zu längeren Brücken höhere Bemessung des Gewichtsantheiles per Current-Klafter annehmen, um der erwähnten grösseren Wirkung genügende Rechnung zu tragen.

Um diess durch ein Beispiel deutlich zu machen, befinde sich (Fig. 303) ein Locomotiv auf einer Brücke, welche genau dessen Länge L hätte. Das ganze Gewicht G dieses Locomotives zertheile sich derart, dass auf die Räderpaare in C, D, E und F beziehungsweise die Gewichtsantheile q_1, q_2, q_3 und q_4 kommen, wodurch die Stützen in A und B mit D_1 und D_2 Zentnern gedrückt werdent Auf bestimmte Zahlen übergehend, werden hier gleich die Daten aufgeführt, welche die Untersuchung eines Locomotives schwerer Gattung der österr. Kaiser-Ferdinands-Nordbahn geliefert hat, nämlich:

Fig. 303.



$e_1 = 8' 0''$ | $e_2 = 12' 3''$ | $e_3 = 17' 3''$ | $e_4 = 20' 0''$ | $L = 23' 5'' = 3\frac{65}{72}{}^0$

$q_1 = 179$ Ztr. | $q_2 = 179$ Ztr. | $q_3 = 57$ Ztr. | $q_4 = 57$ Ztr. | und $G = 472.$ Ztr.

Hiernach finden vor Allem zur Bestimmung der Drücke D_1 und D_2 die Relationen

$$D_1 + D_2 = G = 472 \text{ Ztr.}, \quad D_2 = \frac{q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4}{L} = 245{\cdot}5 \text{ Ztr.}$$

und $D_1 = G - D_2 = 226{\cdot}5$ Ztr. statt, und es erhalten die auf die Biegung einwirkenden statischen Kraftmomente nachstehende Werthe:

In C . . .	$D_1 . \overline{AC}$	= 1812	
in D . . .	$D_1 . \overline{AD} - q_1 . \overline{CD}$ . .	= 2014	. Ztr. Fuss.
in E . . .	$D_2 . \overline{BE} - q_4 . \overline{EF}$ . .	= 1357	
und in F . . .	$D_2 . \overline{BF}$	= 839	

Zufolge des Locomotivgewichtes würde daher die grösste Anspruchsnahme der tragenden Construction, abgesehen von dem eigenen Gewichte derselben, in D vorhanden sein, indem dort der Maximalwerth des Kraftmomentes mit 2014 resultirt. Dass zwischen den Angriffspuncten der Kräfte ein grösseres Moment nicht stattfinden kann, geht aus dem §. 127 hervor. Fragt man jetzt, wie gross die gleichförmig vertheilte Belastung G' nach der Länge sein müsste, wenn sie die gleiche Anspruchsnahme hervorzubringen im Stande sein soll, so hätte man bei dem Umstande, als die statische Wirkung dieser immaginären Last zu Folge des §. 87 mit $\frac{1}{8} G' L = 2{\cdot}927\ G'$ auszudrücken ist, die Gleichung $2{\cdot}927\ G' = 2014$ gelten zu lassen, und demgemäss G' mit 688 Ztr. auf die ganze Länge L, daher per Current-Klafter

mit $688 : 3\frac{65}{72} = 176$ Ztr. anzunehmen. Nach diesem Masstabe wäre beispielsweise die zufällige Belastung bei der Annahme der gleichförmigen Vertheilung der Länge nach in Rechnung zu nehmen, wenn ihre Wirkung mit der des Locomotivgewichtes als gleichbedeutend angesehen werden soll. Hieraus sieht man, dass diese immaginäre Belastung $G' = 688$ Ztr. bedeutend — beinahe um 46 Proc. — grösser ist, als das thatsächlich vorhandene, jedoch ungleichförmig vertheilte Locomotivgewicht $G = 472$ Ztr.

Das vorige Beispiel dient zum Beweise, dass die als Maximum in die Berechnung einzuführende Belastung nach der Annahme der gleichförmigen Vertheilung nicht nur von der Einrichtung des Locomotives, sondern auch von der Brückenlänge abhängt, wobei es sich von selbst versteht, dass bei langen Brücken auch die Construction des Tenders und eventuell der Waggons insoferne zu berücksichtigen sein wird, als man der Rechnungsbelastung nicht durchgehends die Annahme von aufeinander folgenden Locomotiven zu Grunde legen will. Uebrigens scheint zu einer ungefähren Uebersicht die Berechnung des per Current-Klafter Bahngeleise entfallenden zufälligen Gewichtes g_2, nach der Wirkung der gleichförmigen Vertheilung beurtheilt, nach der Formel

$$g_2 = A + \frac{B}{L}$$

zu genügen, in welcher die Zahlen A und B von der Einrichtung des Locomotives und nöthigen Falls auch von jener des Tenders und der Waggons abhängig zu machen sind, während L in Klaftern die betreffende Brückenlänge bezeichnet. Die Bestimmung von A und B wird leicht ermöglicht werden können, wenn für zwei verschiedene L die betreffenden Werthe von g_2 bekannt sind. Insbesondere folgt, dass, weil für $L = \infty$, $g_2 = A$ wird, A diejenige zufällige Last per Current-Klafter Bahngeleise anzeigt, welche man bei sehr langen Brücken gelten lassen kann.

Wird zur Erläuterung das vorige Beispiel wieder aufgenommen, so hat man zunächst

$$A = \frac{472}{3\frac{65}{72}} = 120 \text{ Ztr.}$$

Indem aber noch $g_2 = 176$ Ztr. für die specielle Brückenlänge $L = 3\frac{65}{72}$ gefunden wurde, so wird überdiess wegen der Gleichung $176 = 120 + \frac{B}{3\frac{65}{72}}$

$$B = 218 \text{ Zentner,}$$

und sofort für die in Rede stehende Locomotiv-Construction allgemein

$$g_2 = 120 + \frac{218}{L};$$

somit insbesondere

für L	=	2	Klftr.	. . . .	g_2	= 229	Ztr.
„	=	3	„	. . . .	g_2	= 193	„
„	=	4	„	. . . .	g_2	= 175	„
„	=	5	„	. . . .	g_2	= 164	„
„	=	6	„	. . .	g_2	= 156	„
„	=	8	„	. . . .	g_2	= 147	„
„	=	10	„	. . .	g_2	= 144	„
„	=	12	„	. . .	g_2	= 138	„
„	=	15	„	. . .	g_2	= 135	„
„	=	20	„	. . . .	g_2	= 131	„
„	=	30	„	. . .	g_2	= 127	„

Obgleich diese Zahlenreihe nicht constant ist, sondern mit der verschiedenen Einrichtung der Locomotive variiren wird, so ist dieselbe dennoch zur Verdeutlichung geeignet, in welcher Weise mit der Brückenlänge die grösste zufällige Belastung per Längenklafter sich verändern kann.

Ist man über diejenige Belastung übereingekommen, für welche man die Anordnungen bei der Brücke zu treffen gedenkt, so ist unter der Voraussetzung, dass dieselbe einfach an ihren Enden auf den Jochen oder Pfeilern aufliegt, bei einer gleichförmigen Belastungsvertheilung nach der Gleichung (109)

$$\text{das Tragvermögen} = \frac{8M}{\text{Länge in Zollen}} = \frac{8M}{72L} = \tfrac{1}{9}\,\frac{M}{L}.$$

Dieses Tragvermögen muss für die grösste zulässige Spannweite eben so gross, wie das Totalgewicht

$$Q = gL = (g_1 + g_2)L$$

sein. Hiernach entsteht die Gleichung $\frac{1}{9}\,\frac{M}{L} = gL$, und es folgt hieraus die fragliche Maximalspannweite

$$L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{g}} \text{ Wiener Klafter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (571).$$

In diese Formel ist für M der entsprechende Werth des Tragmomentes nach Massgabe des Querschnittes, der Materialgattung und der Constructionsweise der Träger, für g aber das per Current-Klafter Brückenlänge entfallende Gewicht mit gleichzeitiger Rücksicht auf die grösste zufällige Belastung zu substituiren.

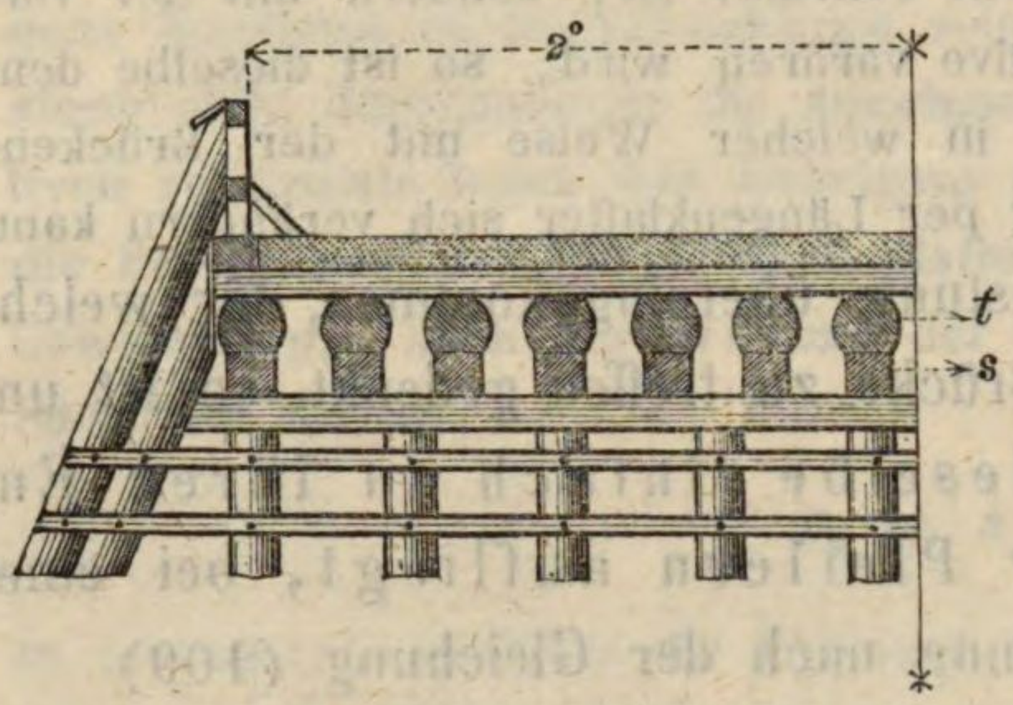
Erstes Kapitel.

Brücken mit einfachen Trägern.

§. 264.

Beurtheilung solcher Brücken. Brücken dieser Art sind in der Regel aus Holz, und ihre Bahn wird von einfachen Balken *t* (Fig. 304) getragen, welche entweder vierkantig oder nur auf zwei Seiten behauen sein, übrigens auf hölzernen Jochen oder gemauerten Pfeilern ruhen können. Zweckmässig ist es, zwischen den Jochen und Tragbalken sogenannte Sattelhölzer *s* unterzulegen, um dem Auflager für die Köpfe der Träger eine grössere Solidität zu verschaffen.

Fig. 304.



Man nenne

N die Anzahl der Tragbäume,

f den Querschnitt eines Tragbaumes in Quadratzollen,

t das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct horizontal gezogene Axe,

h' und h'' die betreffenden Abstände der gespanntesten (unteren) und gepresstesten (oberen) Fasern von der genannten Axe,

$h = (h' + h'')$ die Balkenhöhe in Zollen,

a und r die grösste zulässige Spannung und beziehungsweise Pressung des Holzmateriales in Zentnern, welche unter den verlangten Umständen Platz greifen dürfen, endlich

Δ in Wiener Zollen die grösste zulässige Biegung in der Mitte der Tragbäume.

Nach diesen Bezeichnungen und mit Rücksicht auf den §. 77 ist das Tragmoment eines Balkenquerschnittes entweder $\frac{at}{h'}$ oder $\frac{rt}{h''}$, je nachdem der eine oder der andere Ausdruck den kleineren Werth hat. Liegt, wie in der Regel, der Schwerpunct des Balkenquerschnittes in der halben Höhe, so ist $h' = h'' = \frac{1}{2}h$, daher das Trag-

moment für Holzmaterialien $= \frac{2rt}{h}$, indem sodann wegen $r < a$ auch $\frac{rt}{h''} < \frac{at}{h'}$ wird.

Für alle N Tragbalken hat man in diesem Falle $M = \frac{2rNt}{h}$, somit zufolge der Gleichung (571)

$$L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{2rNt}{gh}} \text{ Wiener Klafter } \ldots \ldots \quad (572).$$

Endlich ist nach der Gleichung (77) die Maximalbiegung

$$\Delta = \tfrac{5}{384}\,\frac{Q(72L)^3}{m(Nt)} = 4860 \cdot \frac{gL^4}{mNt} \text{ Wiener Zoll } (573).$$

Der Modul der Längenveränderung ist, wie sonst, mit m bezeichnet.

Ist z. B. der Balkenquerschnitt ein Quadrat von den Seiten $b = h = 12''$, so hat man nach der Formel (51) $t = 1728$, daher, wenn etwa die Trägerzahl $N = 14$ ist, die Maximalspannweite

$$L = 8\sqrt{\frac{7r}{g}}.$$

Auf diese Weise erhält man für L einen Ausdruck, worin nur mehr die Grössen g und r festzustellen sind. Diese Feststellung hängt aber, wie man in den beiden folgenden §§. sehen wird, von verschiedenen Umständen ab.

§. 265.

Nothbrücken. Wenn Holzbrücken nur in provisorischer Weise höchstens auf einige Jahre hergestellt werden sollen, so sind die Umstände, welche auf die Feststellung des Werthes von r Einfluss nehmen, folgende: Dauer einige Jahre, gewöhnlicher Einfluss der Atmosphäre, theilweise constante Belastung (mehr oder weniger, je nachdem die Brücke beschottert ist, oder nicht), endlich mässige Erschütterungen, weil es sich diessfalls wohl nur um eine Strassenbrücke handeln wird. Für gutes Tannenholz kann man z. B. in Hinblick auf die Tabelle im §. 23 durchschnittlich $r = 18$ Ztr., wenn eine Beschotterung vorhanden ist, sonst aber wegen der geringeren permanenten Belastung $r = 20$ Ztr. annehmen. Lässt man diese Zahlen für das im vorigen §. gewählte Beispiel gelten, und nimmt man noch bei einer benützbaren Bahnbreite von 4^o für eine beschot-

terte Brücke $g_1 = 120$ und $g_2 = 4 \times 30 = 120$, daher $g = 240$ Ztr., für eine unbeschotterte Brücke aber $g_1 = 80$ und $g_2 = 120$, daher $g = 200$ Ztr. an, so findet man die Maximalspannweite.

1. Für eine derart beschotterte Nothbrücke $L = 5{\cdot}8^{o}$,
2. für eine unbeschotterte aber . . . . $L = 6{\cdot}7^{o}$.

Wird noch Behufs der Ausmittlung der Maximalbiegung Δ nach der Formel (573) in beiden Fällen der Modul der Längenveränderung des Tannenholzes m mit 16000 angenommen, so resultirt dieselbe beziehungsweise ad 1 mit $3''{\cdot}4$ und ad 2 mit $6'{\cdot}1$.

§. 266.

Definitive Brücken. Bei solchen Brücken unterscheiden sich die vorwaltenden Umstände von jenen bei Nothbrücken in soferne wesentlich, als erstere eine möglichst lange Dauer besitzen sollen. Desshalb darf man sich mit Rücksicht auf die citirte Tabelle im §. 23 nur erlauben, statt den für Nothbrücken eingeführten Werthen von r ungefähr die Hälfte anzunehmen. Sonach wäre in dem vorigen Beispiele, wenn es sich um eine definitive Brücke handeln würde, beziehungsweise $r = 9$ und $r = 10$ Ztr. zu setzen, je nachdem die Bahn beschottert oder unbeschottert ist.

Da der Formel (572) gemäss L unter sonst gleichen Umständen mit $\sqrt{r}$ in directem Verhältnisse steht, so folgt, dass sich die Maximalspannweite bei einer definitiven Holzbrücke durchschnittlich im Verhältnisse, wie

$$\sqrt{2} : 1 = 1{\cdot}414 : 1 = 1 : 0\,707$$

kleiner herausstellt, als bei einer Nothbrücke.

Hiernach könnte die im vorigen §. beispielsweise erörterte Brücke als eine definitive betrachtet werden, wenn ihr eine lichte Spannweite

1. im beschotterten Zustande von höchstens . . . $4{\cdot}1^{o}$ *),

*) Die im Jahre 1853 hergestellte hölzerne Jochbrücke über die Wien auf der k. k. Linzerstrasse bei Weidlingau in Niederösterreich hat ungefähr die in diesem Beispiele angenommenen Dimensionen. Sie gehört in die Kategorie der beschotterten definitiven Brücken, und ist mit der Spannweite von 5 Klaftern ausgeführt worden. Diese Spannweite stimmt mit dem obi-

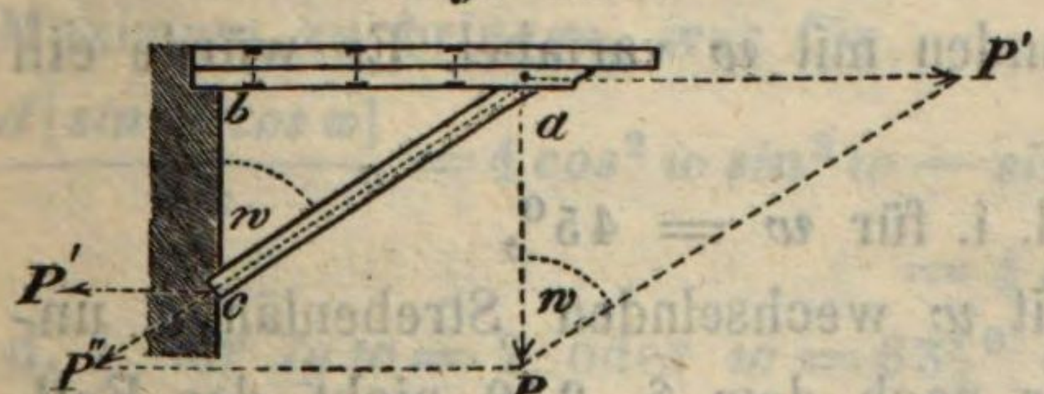
2. im unbeschotterten Zustande aber von höchstens ... $4{\cdot}7^{0}$ gegeben würde.

Legt man noch Behufs der Bestimmung der Maximalbiegung aus der Gleichung (573) den Modul m der Längenveränderung des Tannenholzes wegen der verlangten langen Dauer nur mit 15000 zu Grunde, so erhält man ad 1 . . . $\Delta = 1{\cdot}2''$ und ad 2 . . . $\Delta = 2{\cdot}0''$.

§. 267.

Sattelhölzer, Sattelstreben. Bei der Anbringung von Sattelhölzern darf selbstverständlich die nach der Gleichung (572) ausgemittelte Spannweite zwischen den Jochen oder Pfeilern etwas vergrössert werden. Da aber die Enden der Satteln wegen des Zusammendrückens derselben niemals als förmliche Unterstützungspuncte angesehen werden können, so erfordert es die Vorsicht, nicht den ganzen Sattelvorsprung zur berechneten Spannweite hinzuzuschlagen, sondern diese höchstens um die Hälfte der beiderseitigen Sattelvorsprünge und nach Umständen noch weniger zu vergrössern. Ueberdiess müssen die Sattelhölzer die gehörige Stärke haben, und an der Wurzel entsprechend befestigt sein, weil in Folge der Biegung der Brücke die Enden derselben sich heben, und sodann gleichsam die ganze Last auf den Kopfenden der Satteln ruhet. Haben nun die Satteln nicht die gehörige Stärke, so würden sie aus Anlass der erwähnten Anspruchsnahme so bedeutend nachgeben, dass durch sie eine Vergrösserung der Spannweite nicht begründet werden könnte. Aehnliche Bemerkungen kann man hinsichtlich der Streben machen, welche zur Unterstützung der Sattelhölzer angebracht werden.

Fig. 305.



Insbesondere auf die Wirkung einer solchen Strebe übergehend, beachte man, dass ein auf den Strebenkopf a (Fig. 305) ausgeübter Druck P in die 2 Componenten P' und P'' zu zer-

---

gen Resultate ganz gut überein, wenn man berücksichtiget, dass die bei der erwähnten Brücke angebrachten Sattelhölzer eine kleine Vergrösserung der berechneten Spannweite gestatten.

legen ist, von welchen die erste P' in den horizontalen Balken übertragen wird, während die andere P'' die Pressung in der Strebenrichtung angibt. Dass in dem Stützpuncte c das Widerlager einen horizontalen Druck $= P'$ erfährt, ist einleuchtend.

Nennt man nun w den Neigungswinkel der Strebe gegen die verticale Richtung, so hat man allgemein

$$P' = P \, tg \, w \text{ und } P'' = \frac{P}{\cos w}.$$

Diese beiden Kräfte nehmen augenscheinlich mit dem Winkel w zu, und der Strebenquerschnitt muss insbesondere nach der Grösse des Druckes P'' in Gemässheit des §. 249 angeordnet werden. Hat die Strebe einen quadratischen Querschnitt von der Seite . . . σ, ist ferner der Abstand $\overline{ab}$ . . . . . $= \varepsilon$, die Strebenlänge $\overline{ac} = \frac{\varepsilon}{\sin w}$ . . . . . $= \lambda$, und die grösste zulässige Pressung des Holzmateriales der Strebe per $\square'$ Querschnitt . . . . . $= r'$, so entsteht der vorigen Bemerkung gemäss die Bedingungsgleichung

$$r' \sigma^2 = P'' = \frac{P}{\cos w},$$

welche auf entsprechende Weise zu erfüllen ist, so, dass hierbei nicht nur die Materialgattung und die bei der Construction obwaltenden besonderen Umstände, sondern auch die Erörterungen des §. 249 insoferne zu berücksichtigen sind, als hiernach r' mit der Strebenlänge abnimmt.

Betreffend den Körperraum der Strebe, so ist derselbe

$$\lambda \sigma^2 = \frac{P \lambda}{r' \cos w} = \frac{P \varepsilon}{r' \sin w \cos w} = \frac{2 P \varepsilon}{r' \sin 2w},$$

somit unter sonst gleichen Umständen mit w variabel. Er würde ein Minimum für

$$\sin 2w = 1, \text{ d. i. für } w = 45^0,$$

wenn die Pressung r' bei der mit w wechselnden Strebenlänge unverändert bliebe. Dieses ist zwar nach dem §. 249 nicht der Fall, doch kann man immerhin jene Unveränderlichkeit von r' gelten lassen, wenn die Strebenlänge λ im Vergleiche zur Quadratseite σ nicht zu bedeutend ist. Aus dieser Bemerkung schliesst man, dass bei sehr kurzen Streben der geringste Materialaufwand mit der nöthigen

Sicherheit vereinigt werden kann, wenn man ungefähr $\overline{ab} = \overline{bc}$, d. i. $w = 45^0$ (Fig. 305) construirt.

Bei verhältnissmässig langen Streben, wo $\lambda \geqq 20\,\sigma$ ist, wird diese Regel nicht mehr anzuwenden sein, indem sodann der Werth von r' nach der Gleichung (549) zu beurtheilen, und hiernach wegen $n = \frac{\lambda}{\sigma} \geqq 20$ die Pressung $r' = \frac{C}{n^2} = \frac{C\sigma^2}{\lambda^2}$ zu setzen ist, wo C eine gewisse von dem Strebenmateriale und dem verlangten Sicherheitsgrade abhängige Constante bezeichnet. In diesem Falle hat man

$$r'\sigma^2 = \frac{C\sigma^4}{\lambda^2} = \frac{P}{\cos w},$$

und hieraus

$$\sigma^2 = \lambda \sqrt{\frac{P}{C\cos w}} = \frac{\varepsilon}{\sin w} \sqrt{\frac{P}{C\cos w}}.$$

Der hier nöthige Querschnitt σ^2 wird für den Maximalwerth von $\sin w \sqrt{\cos w}$ oder von $\sin^2 w \,.\, \cos w$ ein Minimum, und diess geschieht für

$$\frac{d\,[\sin^2 w \cos w]}{dw} = 2\sin w \cos^2 w - \sin^3 w = \sin w \cos^2 w\,(2 - tg^2 w) = 0,$$

d. i. für $tg\,w = \sqrt{2}$ oder für $w = 54\frac{3}{4}^0$, welcher Winkel der Anordnung $\overline{ab} = \overline{bc}\sqrt{2}$ (Fig. 305) entspricht.

Beabsichtigt man aber nicht den kleinsten Querschnitt, sondern den kleinsten Körperinhalt der Strebe zu erzielen, so hat man offenbar den Ausdruck

$$\sigma^2\lambda = \lambda^2 \sqrt{\frac{P}{C\cos w}} = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 w} \sqrt{\frac{P}{C\cos w}}$$

auf ein Minimum, somit $\sin^2 w \sqrt{\cos w}$ oder $\sin^4 w \,.\, \cos w$ auf ein Maximum zu bringen, was für

$$\frac{d\,[\sin^4 w \cos w]}{dw} = 4\cos^2 w \sin^3 w - \sin^5 w =$$
$$= 4\sin^3 w \cos^2 w\,(4 - tg^2 w) = 0,$$

d. i. für $tg\,w = 2$ oder $w = 63\frac{1}{2}^0$ eintritt.

Demnach wird bei sehr langen Streben der geringste Materialaufwand mit der nöthigen Sicherheit vereinigt werden können, wenn man $\overline{ab} = 2\,\overline{bc}$ (Fig. 305) construirt.

Auf diese Weise hat man zwei Resultate gefunden, das eine ($tg\,w = 1$) für sehr kurze, das andere ($tg\,w = 2$) für sehr lange

Streben, deren Länge nämlich nicht kleiner, als das 20fache der Quadratseite ist. Hieraus schliesst man, dass für Streben, deren Länge nicht das 20 fache der Quadratseite erreicht, die vortheilhafteste Neigung gegen die Verticale zur Erzielung des geringsten Materialaufwandes je nach der kleineren oder grösseren Strebenlänge zwischen 45^{o} bis $63\frac{1}{2}$ Graden variiren wird.

Diese Resultate, vereint mit den localen Verhältnissen und verglichen mit den Holzpreisen, so wie mit den anderen Einfluss nehmenden Umständen eines vorkommenden Falles werden ohne Schwierigkeit die Vor- und Nachtheile beurtheilen lassen, welche sich durch die verschiedenen Strebenrichtungen ergeben können.

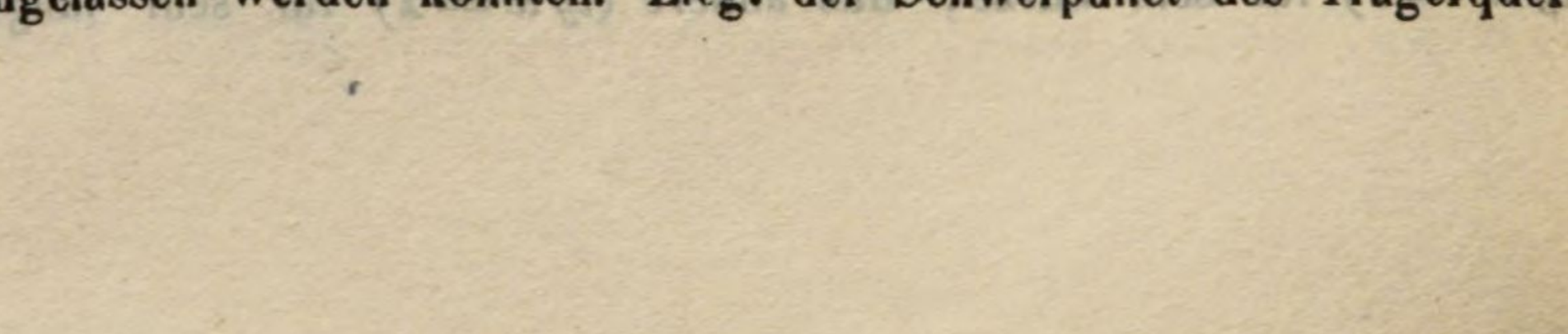
Zweites Kapitel.

Brücken mit gekuppelten Tragbalken.

§. 268.

Beurtheilung solcher Brücken. Zuweilen werden die Brückenträger aus mehreren Balken, nach Art der Figuren 288, 289, 290 und 291 gekuppelt. Die hölzerne Brücke über die Thaya bei Lundenburg, über welche die österreichische Kaiser Ferdinands-Nordbahn führt, liefert ein Beispiel dieser Art. (Siehe Fig. 306.)

Fig. 306.



In einem solchen Falle bleiben die allgemeinen Formeln zur Berechnung der Maximalspannweite und Maximalbiegung dieselben, nur hat man nach Anleitung des §. 253 die in Anwendung zu bringenden Elasticitätsgränzwerthe a' und r' und den Modul der Längenveränderung m' mit Rücksicht auf die Art und Weise der Kuppelung entsprechend kleiner, als diejenigen Werthe a, r und m zu wählen, welche bei gänzlicher Ununterbrochenheit der Trägermaterie zugelassen werden könnten. Liegt der Schwerpunct des Trägerquer-

schnittes, wie gewöhnlich, in der halben Höhe desselben, so hat man analog mit den Formeln 572 und 573 unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

$$\text{die Maximalspannweite } L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{2r'Nt}{gh}} \quad . \quad . \quad (574)$$

$$\text{und die Maximalbiegung } . \; \Delta = 4860 \, . \, \frac{gL^4}{m'Nt} \quad . \quad . \quad (575).$$

Ex. Die oben erwähnte Brücke über die Thaya hat vier gekuppelte Träger von der Breite $b = 12''$ und der Höhe $h = 24''$, somit ist $N = 4$, $f = 288 \square''$ und $t = \frac{1}{12} f h^2 = 13824$, hiernach aber

$$L = 22{\cdot}6\sqrt{\frac{r'}{g}}.$$

Nimmt man nun für gutes Tannenholz mit Rücksicht auf eine definitive Brückenconstruction und auf die Erschütterungen durch die Befahrung von Eisenbahntrains an, dass bei einem aus einem ganzen Stücke bestehendeu Träger $r = 8$ Ztr. gesetzt werden kann, so darf man aus Anlass der in Folge der Kuppelung nicht vorhandenen Ununterbrochenheit der Trägermaterie höchstens $r' = \frac{3}{4} r = 6$ Ztr. zulassen. Setzt man noch das permanente eigene Gewicht der Brücke per Längenklafter mit Rücksicht auf ihre Construction $g_1 = 50$ Ztr., und lässt man ferner für die zufällige Belastung, weil nach einer ungefähren Rechnung die Spannweite zwischen 3 und 4 Klaftern liegt, mit Rücksicht auf den §. 263 den ziemlich hohen Werth von $g_2 = 180$ Ztr. gelten, so findet man aus der obigen Gleichung

$$L = 3^{0}64.$$

Berücksichtigt man die geschehene Anbringung von Sattelhölzern, so erkennt man deutlich die befriedigende Uebereinstimmung der gelieferten Berechnung mit der Ausführung, nach welcher die lichte Spannweite zwischen den Jochen $3^{0}\,5'$ beträgt.

Drittes Kapitel.

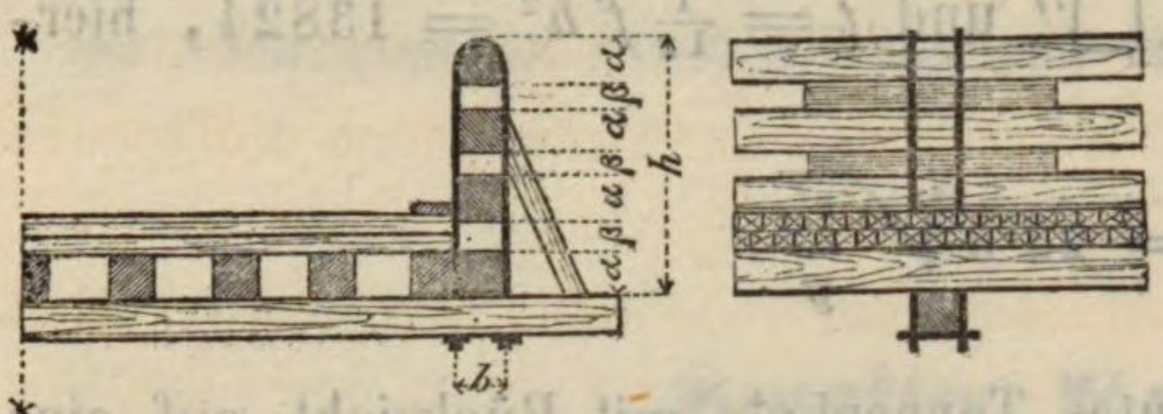
Traggeländer-Brücken.

§. 269.

Beurtheilung solcher Brücken. Traggeländer-Brücken

werden mittelst zusammengesetzter Träger von bedeutender Höhe getragen, welche zugleich als Geländer dienen. (Fig. 307). Das

Fig. 307.



Längen- und Querprofil eines Trägers ist in diesem Falle den Fig. 181, 292 und 293 analog. Die Bestimmung der grössten zulässigen Spannweite hat wieder nach der allgemeinen Formel (571) zu geschehen. Liegt der Schwerpunct des Querschnittes in der halben Höhe, so ist eben so, wie im vorigen Kapitel,

die Maximalspannweite $L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2r'Nt}{gh}}$

und die Maximalbiegung . . $\Delta = 4860\,\frac{gL^4}{m'Nt}$.

Der Werth von t ist dem Geländerquerschnitte, die Werthe von r' und m' aber sind dem Materiale und der Art und Weise der Geländerconstruction, so wie dem verlangten Sicherheitsgrade anzupassen.

In den meisten Fällen wird es zu empfehlen sein, bloss die Geländer als eigentliche Träger der Brücke zu betrachten, und sich nicht auf die Mitwirkung der andern Längenbalken zu verlassen.

Ex. Für den Querschnitt (Fig. 307) sei $\alpha = 10''$, $\beta = 6''$, $h = (4\alpha + 3\beta) = 58''$, $b = 10''$ und die Zahl der Tragwände $N = 2$. Es sei ferner bei einer benützbaren Brückenbreite von 4^0 das eigene Gewicht per Längenklafter $g_1 = 80$ und die zufällige Belastung mit Rücksicht auf eine gewöhnliche Strassenbrücke $g_2 = 4 \times 30 = 120$, somit $g = (g_1 + g_2) = 200$ Ztr. Hiernach wird im Sinne des §. 135 das Trägheitsmoment

$t = \frac{1}{12} b [(4\alpha + 3\beta)^3 - (2\alpha + 3\beta)^3 + (2\alpha + \beta)^3 - \beta^3] = 172500$,

folglich

$$L = 2{\cdot}57 \sqrt{r'} \text{ und } \Delta = 2{\cdot}81 \frac{L^4}{m'}.$$

Wäre nun für eine definitive Construction mit ununterbrochenen Trägern aus Tannenholz $r = 10$ Ztr. und $m = 15000$, und nimmt man wegen der Zusammensetzung der Traggeländer aus einzelnen Stücken nach §. 253 nur $r' = \frac{1}{2} r = 5$ und $m' = \frac{1}{2} m = 7500$ an, so erhält man $L = 5{\cdot}7^{o}$ und $\Delta = 0{\cdot}4''$.

Bei der Anbringung von Satteln wird man sich wieder erlauben dürfen, die berechnete Spannweite etwas zu vergrössern.

Bezüglich der vorigen Berechnung kann man noch Folgendes erinnern:

1. Diese Resultate beziehen sich auf eine definitive Construction von möglichst langer Dauer.

2. Für eine Nothbrücke könnte man unter sonst gleichen Umständen statt r' ungefähr den doppelten Werth zulassen, wodurch sich die berechnete Spannweite im Verhältnisse wie $1 : \sqrt{2}$, also von $5{\cdot}7^{o}$ auf $8{\cdot}1^{o}$ erhöhen würde.

3. Es wurden nur zwei Traggeländer vorausgesetzt. Wären daher ihrer mehr vorhanden, und dieselben so angebracht, dass alle gleichmässig in Anspruch genommen werden, so hat man nur statt N die betreffende Zahl zu setzen. Man sieht übrigens aus der Formel (574), dass die zulässige Maximalspannweite mit $\sqrt{N}$ zunähme, wenn ausser den übrigen Grössen auch das Totalgewicht dasselbe bliebe. Da sich aber bei dem letzteren der von den Traggeländern herrührende Antheil mit N ebenfalls vermehrt, so schliesst man, dass das Wachsen der Spannweite sich eigentlich nach dem Werthe von $\sqrt{\frac{N}{g}}$ richtet, somit in einem etwas geringeren Verhältnisse vor sich geht, als bei $\sqrt{N}$.

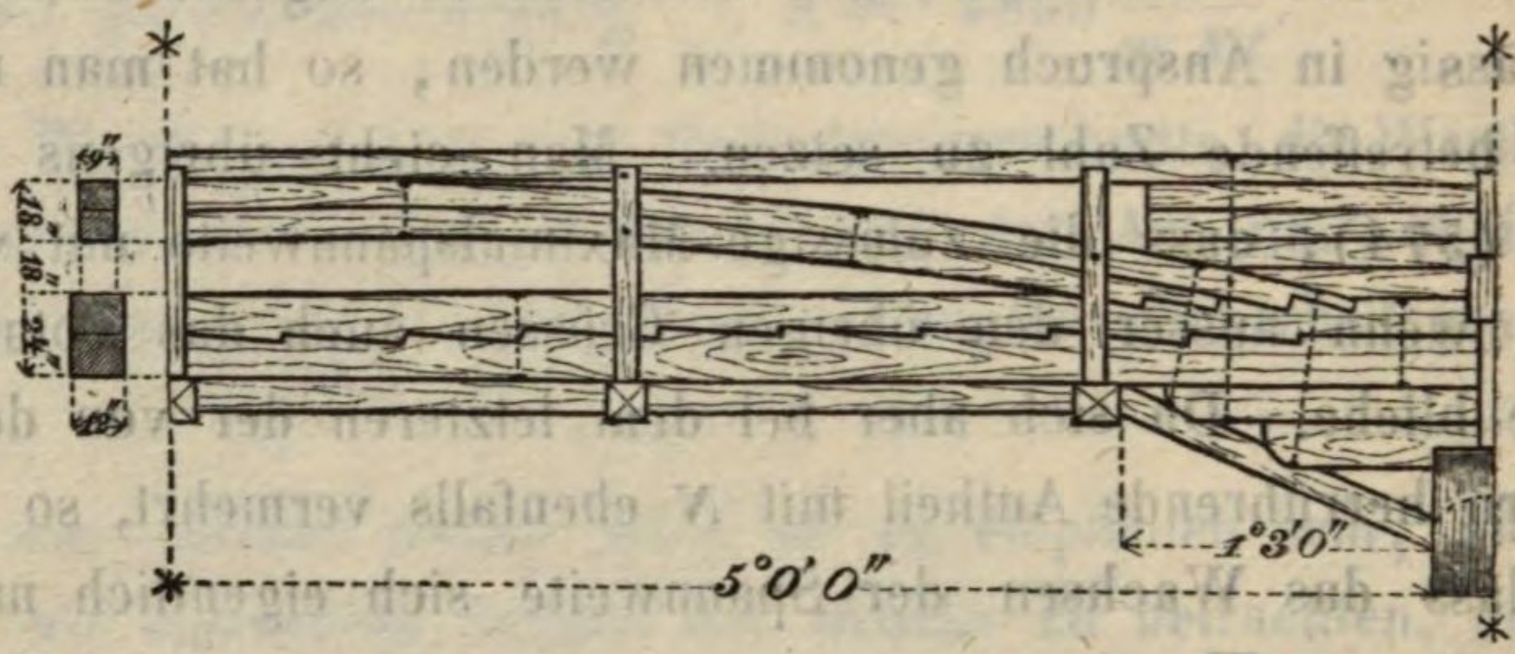
§. 270.

Traggeländer, welche sich Körpern von gleichem Widerstande nähern. Die Erörterungen über die Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung (§§. 94 bis 104) lassen erkennen, dass es nicht nothwendig ist, einem Traggeländer

durchaus die gleiche Höhe zu geben. Offenbar darf man sich erlauben, in dem Falle, wenn das Traggeländer an beiden Enden aufliegt, und eine der Länge nach gleichförmige Last zu tragen hat, die Höhe in ihrer grössten Dimension nur in der Mitte der Brücke anzunehmen, sonst aber gegen die beiden Enden hin derart abnehmen zu lassen, dass in keinem Querschnitte des Traggeländers eine überflüssige Stärke vorhanden ist. Dadurch wird es zulässig, die obere Begränzung des Traggeländers krummlinig zu wählen, während die untere geradlinig bleiben kann. Sucht man nach der Anleitung des §. 99 die das Traggeländer als Körper von gleichem Widerstande oben begränzende Curve, so findet man, dass dieselbe sehr nahe mit einer gemeinen Parabel übereinstimmt, deren Scheitel in der Mitte, und deren Axe vertical liegt. Dieses Resultat zeigt, dass ein Traggeländer, welches unten von einem geraden, oben aber von einem bogenförmigen Balken begränzt ist, sich einem Träger von gleichem Widerstande annähern wird.

Die hölzerne Jochbrücke über die grosse Donau bei Wien über welche die österreichische Kaiser Ferdinands-Nordbahn führt, hat Traggeländer dieser Art (Fig. 308). Solche Traggeländer sind

Fig. 308.



übrigens auch darum zweckmässig, weil die oberen und unteren Balken in der Nähe der Widerlager zusammentreffen, und die Verbindung daselbst auf eine solidere Weise geschehen kann, als dann, wenn diese Balken zu einander parallel sind. Die Bestimmung der zulässigen Maximalspannweite geschieht hier gleichfalls auf die im vorigen §. angegebene Weise. Nur hat man, wenn die neutrale Axe nicht in die halbe Höhe fällt, das Tragmoment desselben nach §. 77 ordnungsmässig aufzusuchen. Es ist nämlich dasselbe für

den Querschnitt eines Geländers dem kleineren von den beiden Werthen $\frac{a' t}{h'}$ oder $\frac{r' t}{h''}$ gleichzusetzen.

Um auch dieses Verfahren durch ein Beispiet zu erläutern, stehe die oben erwähnte Donaubrücke in Betracht. Nach der betreffenden Fig. 308 hat man zunächst $h = (h' + h'') = 60''$, und mit Rücksicht auf die Formeln (188) im §. 116

$$h'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 - n^2 + p q^2}{1 - n + p q}\right) h = 0{\cdot}566\, h = 34''$$

und

$$h' = \quad (H - h'') \quad = 0{\cdot}434\, h = 26'',$$

indem die dort mit n, p und q bezeichneten Zahlen hier beziehungsweise 0·6, 0·75 und 0·3 sind. Da ferner für Holzmaterialien $r' < a'$ ist, so erkennt man leicht, dass von jenen Alternativwerthen $\frac{r' t}{h''}$ den kleineren Werth annimmt, und hiernach das Tragmoment bemessen werden muss. Indem nun die Brücke zwei Fahrbahnen und drei Traggeländer hat, so ist offenbar wegen $N = 3$ das Tragmoment aller Geländer

$$M = \frac{N r' t}{h''} = \tfrac{3}{34} r' t,$$

worin noch der besondere Werth des Trägheitsmomentes t zu substituiren ist. Für dieses hat man aber nach der betreffenden Formel (188) im §. 116

$$t = \frac{4(1 - n^3 + p q^3)(1 - n + p q) - 3(1 - n^2 + p q^2)^2}{12(1 - n + p q)^2} f h^2 = 0{\cdot}192\, f h^2,$$

somit, weil der Querschnitt eines Traggeländers $f = 450\,\square''$ und seine Höhe $h = 60''$ ist, auch $t = 311040$.

Es ist also obiges Tragmoment $M = 27444\, r'$, und der Formel (571) zufolge die zulässige Maximalspannweite

$$L = 55 \sqrt{\frac{r'}{q}}.$$

Um nach der Bemerkung im §. 262 auch einmal umgekehrt aus der ausgeführten Spannweite auf die Anspruchsnahme des Materiales zu schliessen, setze man im vorliegenden Falle die Spannweite $L = 8^o$, wie sie mit Rücksicht auf die vorhandenen Satteln und Streben angenommen werden kann, ferner das eigene Gewicht der Construction per Klafter Brückenlänge in runder Zahl $g_1 = 80$ Ztr.,

und die zufällige Belastung mit Rücksicht auf das vorhandene Doppelgeleise $g_2 = 290$ Ztr. Hiernach findet man wegen $g = (g_1 + g_2) = 370$ für die grösste Pressung des Holzmateriales per □″ Querschnitt

$$r' = g\left(\frac{L}{55}\right)^2 = 7{\cdot}8 \text{ Ztr.}$$

Diese Pressung kann man bei einem halbwegs guten Tannenholze unter den vorhandenen Umständen immerhin zulassen, zumal die Art und Weise der Zusammensetzung der Traggeländer in dem vorliegenden Falle die Ununterbrochenheit der Materie nicht so wesentlich stört, wie bei der im §. 269 betrachteten Geländerart.

Hieraus sieht man, dass die Resultate der obigen Untersuchung mit der geschehenen Ausführung in Uebereinstimmung stehen.

§. 271.

Fig 309.

Besondere Anspruchsnahme der Traggeländer in der Richtung normal auf die Längenrichtung der Fasern. Die Resultirende R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf einem Brückenquerschnitt in N (Fig. 309), welcher von der Mitte A um $\overline{AN}$ Klafter entfernt liegt, ist offenbar ohne Rücksicht auf das Zeichen

R = dem Drucke auf die Stütze in B — dem Gewichte in der Strecke $\overline{BN}$,

daher bei einer gleichmässig vertheilten Belastung, wo der Druck auf die Stütze in B dem halben Totalgewichte gleich ist, auch

R = dem Gewichte in der Strecke $\overline{AB}$ — dem Gewichte in der Strecke $\overline{BN}$ =

= dem Gewichte in der Strecke $\overline{AN}$.

Die Resultirende R ist also eben so gross, wie die Belastung, welche zwischen der Mitte der Brücke und dem gewählten Querschnitte vorhanden ist.

Hieraus folgt zunächst, dass diese Resultirende von der Mitte der Brücke gegen die beiden Enden hin zunimmt, wo sie den grössten numerischen Werth $\frac{1}{2}Q$ erreicht. Indem nun das Totalgewicht $Q = gL$ ist, wird dieser Maximalwerth von $R = \frac{1}{2}gL$. Man erinnere sich jetzt auf den Inhalt des §. 43 ad 1. Nach der dort

gelieferten Darstellung leuchtet ein, das in dem Brückenquerschnitte N zufolge der Resultirenden R die Tendenz einer Trennung der Fasern normal auf ihre Längenrichtung sich geltend macht, welche zwei unmittelbar auf einander folgende Querschnitte des Trägers übereinander zu verschieben beabsichtigt *). Bei der oftmals geringen Ausdehnung der eigentlich in dieser Beziehung widerstehenden Querschnitte der Längenbalken in den Traggeländern, verglichen mit der bedeutenden Grösse von R in der Nähe der Widerlager, ist daher zu untersuchen, ob die gesammten Längenbalken der Traggeländer der beabsichtigten Verschiebung der Fasern normal auf ihre Längenrichtung genügend widerstehen können. So wie schon im §. 256 bezüglich des Schmiedeeisens erwähnt worden ist, kann man auch bei dem Holze den grössten zulässigen Widerstand normal auf die Fasern dem Querschnitte proportional annehmen. Nur ist er den Versuchen zufolge bedeutend kleiner, als der nach der Längenrichtung der Fasern, so dass man für denselben bei Tannenholz mit Rücksicht auf eine lange Dauer höchstens 2 Ztr. per □″ zulassen kann.

Bezeichnet man allgemein den fraglichen Widerstand per □″ Querschnitt mit a'' Zentner, so beziffert sich der grösste zulässige Widerstand sämmtlicher Längenbalken in den Traggeländern, deren totaler Querschnitt Nf□″ ist, offenbar auf Nfa'' Ztr., und da die grösste Anspruchsnahme in dieser Beziehung, wie vorhin bemerkt, an beiden Brückenenden stattfindet, so hat man zur Vermeidung einer jeden Besorgniss auch noch auf die Erfüllung der Bedingung

$$Nfa'' \leqq \tfrac{1}{2} g L$$

zu sehen. Hieraus folgt, dass die grösste zulässige Spannweite zwar auf die im §. 269 angegebene Weise zu berechnen sein wird, dass aber ausserdem untersucht werden muss, ob sie auch der weiteren Bedingung

$$L \leqq \frac{2Nfa''}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (576)$$

entspricht.

*) Nach dem §. 43 ad 1 ist es eigentlich nicht die Resultirende R, sondern ihre Componente $R_1 = R \cos\varphi$, welche das Gleichgewicht in dem obigen Sinne zu stören beabsichtigt; allein bei der jedenfalls nur geringen Biegung, wornach $\cos\varphi$ sehr nahe gleich der Einheit kommt, kann man sich erlauben, R mit R_1 zu verwechseln, und sofort die fragliche Wirkung unmittelbar nach der Resultirenden R zu beurtheilen.

Für das im §. 269 angegebene Beispiel hätte man wegen $N=2$, $f=288$, $g=200$, und, wenn $a''=2$ Ztr. angenommen wird, $L \gtrless 11^{0}\cdot 52$, welche Bedingung, da $L=5\cdot 7^{0}$ gefunden wurde, in der That vorhanden ist.

Ist die Construction der Traggeländer derart, dass der Querschnitt der Geländerbäume nicht durchaus derselbe bleibt, und ausserdem die schwächste Stelle der Traggeländer in der fraglichen Beziehung nicht unmittelbar an das Widerlager stosst, so hat man die diessfällige Untersuchung rücksichtlich dieser schwächsten Stelle und des daselbst vorhandenen widerstehenden Totalquerschnittes in besonderer Weise durchzuführen.

Ex. Bei der betrachteten Donaubrücke (Fig. 308) befindet sich augenscheinlich die schwächste Stelle in der fraglichen Beziehung dort, wo der bogenförmige Balken mit dem geraden zusammentrifft. Ist N diese Stelle nach der Bezeichnung in der Fig. 309, so hat man bei jener Donaubrücke $\overline{AN}=3\frac{1}{3}^{0}$ und $g=370$ Ztr., daher findet man zunächst für das Gewicht in der Strecke $\overline{AN}$, $g\overline{AN}=1233\frac{1}{3}$ Ztr. Der Querschnitt an dieser Stelle ist kleiner, als in der Mitte des Geländers, er beträgt nämlich nur

$$(15\times 9+21\times 12)=387\ \square'',$$

somit für alle drei Geländer $1161\ \square''$, wornach sich der fragliche Widerstand auf $\frac{1233\frac{1}{3}}{1161}=1\cdot 06$ Ztr. per $\square''$ Querschnitt herausstellt, welcher als zulässig zu erkennen ist.

Aus dem Inhalte dieses §. geht deutlich hervor, dass die Tendenz einer Störung des Gleichgewichtes in der Richtung normal auf die Fasern in der Nähe der Widerlager bedeutend ist. Es wird daher die Ausfüllung des leeren Raumes im Traggeländer daselbst zur Erhöhung der Solidität des Bauobjectes wesentlich beitragen, besonders dann, wenn man gleichzeitig für ein festes Zusammenhalten der Füllhölzer mit den Traggeländern durch Verschraubung Sorge trägt. Die Anbringung solcher Füllhölzer hat z. B. bei der erwähnten Donaubrücke stattgefunden, obgleich sie daselbst nicht zwischen den Hauptbalken der Traggeländer liegen können.

Viertes Kapitel.

Brücken, wo die Tragwände nach amerikanischer Art aus Streckbalken, Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben bestehen.

§. 272.

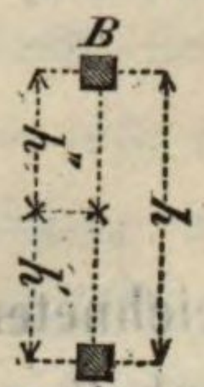
Vorerinnerung. Bei den in der Ueberschrift bezeichneten Brücken handelt es sich vorzugsweise darum, die Längenbalken, **Streckbalken**, auf eine gewisse Entfernung auseinander zu halten, und dadurch einen zweckmässigen Trägerquerschnitt nach Art der Fig. 104, 126, 179 zu ermöglichen. Um aber die Vortheile eines solchen Querschnittes in seiner Anwendung nicht illusorisch zu machen, muss die Construction der Tragwände auch in ihren einzelnen Bestandtheilen dem Zwecke entsprechen, und insbesondere mit Rücksicht auf den (§. 41) die Bedingung zu erreichen angestrebt werden, dass eine auf die geradlinige Längenaxe vor der Biegung gezogene Normale auch eine solche in Beziehung auf die durch die Biegung gekrümmte Längenaxe verbleibt. Ferner hat man bei der oft bedeutenden Höhe der Tragwände das etwa zu besorgende Ausweichen derselben nach der Seite hin auf genügende Weise mittelst Querbalken, Verstrebungen etc. zu verhindern. Da diese gestellten Bedingungen sich nicht vollkommen, sondern nur in einem gewissen Grade erreichen lassen, so kann man bei der diessfälligen Berechnung den Widerstand solcher Brücken niemals so gross annehmen, als er bei vollkommener Erfüllung jener Bedingungen sein würde. Wie gross der Unterschied in dieser Hinsicht sein mag, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, es hängt diess von der näheren Construction der Tragwände ab. Diese können übrigens bloss aus Holz, oder bloss aus Eisen, oder endlich theilweise aus beiden Materialien bestehen.

§. 273.

Maximalspannweite mit Rücksicht auf den Brücken-Querschnitt. Darf man sich nach Erwägung der Bemerkungen des vorigen §. erlauben, den Widerstand einer jeden Tragwand nach Massgabe

ihres Querschnittes in Gemässheit der §§. 134 und 146 zu beurtheilen, so kann man die grösste zulässige Spannweite nach der allgemeinen Formel (571) bestimmen. In dem diessfalls zu betrachtenden Querschnitte (Fig. 310) hat man in *A* die unteren, und in *B* die oberen Streckbalken aller Tragwände sich vereinigt vorzustellen,

Fig. 310.



und hiernach sowohl das Trägheitsmoment t, als auch das Tragmoment in die Berechnung einzuführen. Dabei wird es, weil gewöhnlich die Höhendimension der Streckbalken in der Regel gegen die Tragwandhöhe verhältnissmässig klein ist, gestattet sein, jeden der beiden Streckbalkenquerschnitte in *A* und *B* in seinem Schwerpuncte concentrirt anzunehmen, und von da aus gerechnet für die oberen Fasern die Grösse h'', für die unteren Fasern aber die Grösse h' als mittleren Abstand von der durch den gemeinschaftlichen Schwerpunct gezogenen horizontalen Axe gelten zu lassen, wodurch man zugleich berechtiget wird, von den einfachen Formeln der §§. 133 und 145 Gebrauch zu machen.

Nennt man daher in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen in jenen §§

f den Streckbalkenquerschnitt in A,

f'' „ „ „ „ B,

und

$(f+f'') = F$ den totalen Querschnitt,

so ist zunächst

$$h' = \frac{f''}{F}\,h \text{ und } h'' = \frac{f'}{F}\,h,$$

ferner das Trägheitsmoment des Brückenquerschnittes nach der Formel (228)

$$t = F\,h'\,h'' = \left(\frac{f'\,f''}{F}\right) h^2,$$

das Tragmoment aber nach dem §. 145

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{a'\,t}{h'} = a'\,F\,h'' = a'\,f'\,h \\ \text{oder } \dfrac{r'\,t}{h''} = r'\,F\,h' = r'\,f''\,h, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

Die Werthe a' und r' beziehen sich auf die grösste Spannung und beziehungsweise Pressung per □″ Querschnitt, welche nach dem

Materiale, nach der Solidität der Zusammensetzung der Tragwände und nach dem verlangten Sicherheitsgrade zugelassen werden können, wobei es sich von selbst versteht, dass Behufs der Feststellung jener Pressung r' auch noch der §. 249 zu berücksichtigen sein wird.

Mit Hilfe der obigen Gleichungen findet man nunmehr die Maximalspannweite aus der Formel (571)

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a' f' h}{g}} \\ \text{oder } \frac{1}{3}\sqrt{\frac{r' f'' h}{g}} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (577),$$

wo jedesmal der kleinere Alternativwerth zu gelten hat.

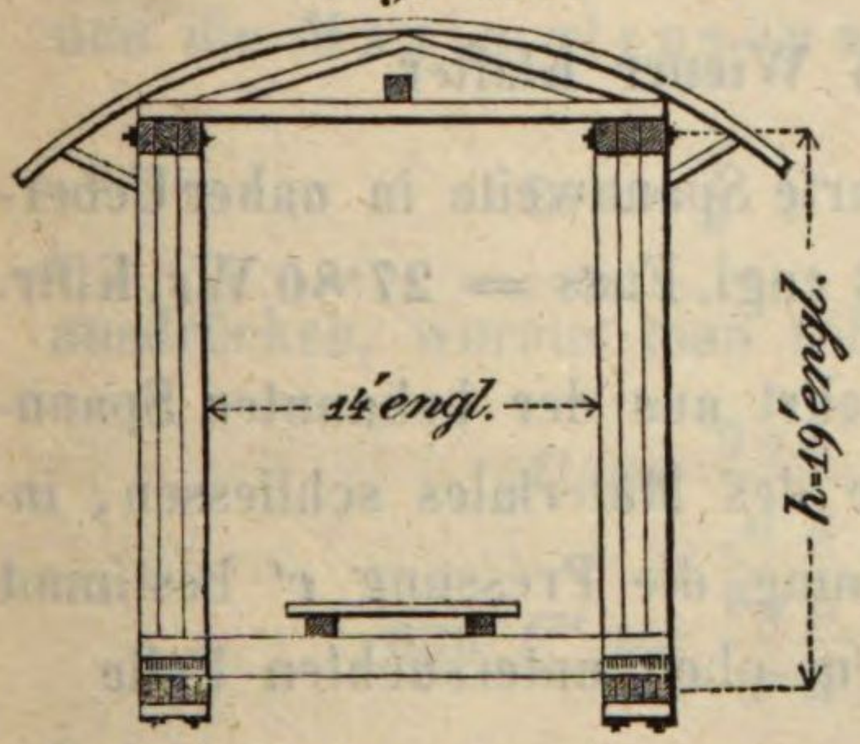
Ferner ist die Maximalbiegung analog mit der Gleichung (575)

$$\Delta = 4860 \frac{g L^4}{m' \left(\frac{f' f''}{F}\right) h^2} = 4860 \frac{g L^4 F}{m' f' f'' h^3} \quad (578),$$

wo der Modul der Längenveränderung ebenfalls dem Materiale, der Solidität der Zusammensetzung der Tragwände und dem verlangten Sicherheitsgrade anzupassen ist.

Ex. Die über den Chikapoe auf der Connecticut'schen Eisenbahn bestehende Brücke hat den Querschnitt (Fig. 311). Die beiderseitigen Tragwände haben zusammen oben 6 und unten 10 Streckbalken. Mit Benützung der in der Förster'schen Bauzeitung vom Jahre 1851 gemachten Mittheilung des königl. bairischen Ingenieurs Culmann kann man folgende Daten zu Grunde legen:

Fig. 311.



1. Der mittlere Abstand der oberen und unteren Streckbalken beträgt 19 englische Fuss. Es ist daher . . . $h = 219{\cdot}8$ Wiener Zoll.

2. Der Querschnitt der unteren 10 Streckbalken beträgt nach Abschlag der Verschneidungen und Stösse 520 englische □″. Es ist somit . . . . . $f' = 483{\cdot}5$ Wiener □″.

3. Der Querschnitt der oberen 6 Streckbalken beträgt nach Abschlag der Verschneidungen (die Stösse sind hier nicht nachtheilig) 510 englische □″. Hiernach ist . . . $f'' = 474{\cdot}1$ Wiener □″.

4. Das eigene Gewicht der Brücke beträgt 800 englische Pfund per englischen Currentfuss. Es ist also das Gewicht per Wiener Längenklafter Bahn $g_1 = 40{\cdot}3$ Wiener Zentner. Nimmt man noch die grösste zufällige Belastung ungefähr mit 120 Zentnern an, was in Hinblick auf den §. 263 genügend erscheint, so hat man für die Totalbelastung der Brücke per Längenklafter den Werth

$$g = (g_1 + g_2) = 160{\cdot}3 \text{ Ztr.}$$

einzuführen.

Da $f'' < f'$, zugleich aber auch $r' < a'$ ist, weil die Streckbalken aus Holz angefertigt sind, so wird offenbar zur Bestimmung der unter diesen Verhältnissen zulässigen grössten Spannweite von den Alternativ-Relationen (577) jene mit r' zu wählen, und hiernach

$$L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{r\,f''\,h}{g}}$$

zu setzen sein. Substituirt man in diese Formel die obigen numerischen Werthe, und beachtet zugleich, dass die Streckbalken aus amerikanischem Kieferholze bestehen, für welches man mit Rücksicht auf die obwaltenden Umstände die grösste Pressung r' ungefähr mit $10\frac{1}{2}$ Ztr. annehmen kann, so erhält man

$$L = 8{\cdot}50\sqrt{r'} = 27{\cdot}5 \text{ Wiener Klafter.}$$

Mit diesem Resultate steht die ausgeführte Spannweite in naher Uebereinstimmung, denn dieselbe beträgt 173 engl. Fuss = 27·80 Wr. Klftr.

Man kann übrigens auch umgekehrt aus der bekannten Spannweite auf die grösste Anspruchsnahme des Materiales schliessen, indem man aus der bezüglichen Gleichung die Pressung r' bestimmt. Diese Bestimmung ergäbe z B. in dem oben untersuchten Falle

$$r' = \left(\frac{L}{8{\cdot}50}\right)^2 = \left(\frac{27{\cdot}80}{8{\cdot}50}\right)^2 = 10{\cdot}7 \text{ Wr. Ztr.}$$

Setzt man noch zur Bestimmung der Maximalbiegung der Brücke mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände (§§. 23 u. 253) den Modul der Längenveränderung des Kieferholzes in runder Zahl $m = 12000$, so findet man aus der Gleichung (578) die fragliche Biegung $\Delta = 3{\cdot}3$ Wr. Zoll.

§. 274.

Zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den Streckbalken zur Erreichung des grössten Tragvermögens, und Bestimmung der Streckbalkenquerschnitte in diesem Falle. Mit Rücksicht auf die Erörterungen im §. 145 geht hervor, dass bei solchen Tragwänden, welche im gegenwärtigen Kapitel in Betracht kommen, in Beziehung auf das Tragvermögen der hiermit construirten Brücke es nicht gleichgiltig sei, auf welche Weise das Materiale in den oberen und unteren Streckbalken vertheilt wird. Durch die Anwendung der in jenem §. gefundenen Resultate zeigt es sich nämlich, dass die zweckmässigste Vertheilung jene ist, bei welcher in Folge der Biegung die Elasticitätsgränzen in allen Streckbalken gleichzeitig erreicht, somit die beiden Alternativwerthe in der Formel (577) einander gleich werden. Hierdurch entsteht zwischen den Querschnitten f' und f'' dasselbe Verhältniss, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung r' und der grössten zulässigen Spannung a' stattfindet.

Es ergibt sich daher in dem vortheilhaftesten Falle die Relation

$$a' f' = r' f'' \text{ oder } f' : f'' = r' : a' \quad . \quad . \quad (579),$$

und die Maximalspannweite lässt sich durch die Formel

$$L = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{a' f' h}{g}} = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{r' f'' h}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad (580)$$

ausdrücken, woraus man sofort die Streckbalkenquerschnitte, nämlich

$$\left.\begin{aligned} f' &= \frac{9 g L^2}{a' h} \\ \text{und } f'' &= \frac{9 g L^2}{r' h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (581)$$

findet, wenn die Spannweite L in Klaftern, die Tragwandhöhe h in Zollen, das auf die Längenklafter Brückenbahn entfallende Totalgewicht g in Zentnern, und die mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände zuzulassende grösste Spannung und Pressung des Materiales per □" Querschnitt (a' und r') gleichfalls in Zentnern gegeben sind.

Da das Gewicht g znm Theile auch von dem Querschnitte der Streckbalken abhängt, dieses aber bei einer nach den Formeln (581) durchzuführenden Berechnung im Voraus unbekannt ist, so wird man sich dabei,

wie in vielen Fällen der angewandten Mathematik, der sogenannten *regula falsi* mit Vortheil bedienen können. Hiernach nehme man das fragliche Gewicht der Streckbalken vorerst approximativ an, bestimme mit Rücksicht auf dasselbe den Werth von g, und berechne sofort mittelst der Formel (581) die Querschnitte f' und f''. Aus diesen Resultaten wird man entnehmen können, wie nahe man mit dem approximativen Werthe für das Gewicht der Streckbalken der Wahrheit gekommen ist, und von dieser Wahrnehmung wird es abhängen, ob die auf die obige Weise berechneten Querschnitte für die Anwendung genügen werden, oder ob auf Grundlage des verbesserten Werthes für g die Berechnung von f' und f'' wiederholt werden soll. Bei einer derartigen Erwägung braucht man übrigens wegen der zu erreichenden Genauigkeit nicht ängstlich zu sein, weil das Gewicht der Streckbalken nur einen kleinen Theil des Totalgewichtes g bildet, folglich der durch die approximative Annahme des ersteren entstehende Fehler gegen das Ganze in der Regel nicht vom Belange sein wird, zumal insbesondere auch die Einführung der grössten zufälligen Belastung, welche einen weit grösseren Antheil jenes Totalgewichtes bildet, auf mehr oder minder schwankenden Grundlagen beruhet.

Zu den obigen Formeln (581) gelangt man noch auf eine andere sehr einfache Weise durch die Vergegenwärtigung der in der Anmerkung 1 (Seite 260) angestellten Betrachtung.

Nennt man nämlich S die Totalspannung in den unteren Streckbalken, und P die Totalpressung in den oberen, so ist vor Allem

$$S = a' f' \text{ und } P = r' f'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (582),$$

jedenfalls aber

$$S = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (583),$$

indem diese Anspruchsnahmen auf den gefährlichen Querschnitt bezogen werden.

Ferner ist das statische Widerstandsmoment an dieser Stelle (Tragmoment M) aus dem Producte von S oder P und der Tragwandhöhe h zu bilden, also

$$M = Sh = Ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (584)$$

zu setzen.

Eigentlich hat man für das statische Moment der Widerstände S und P in Bezug auf die neutrale Axe im Brückenquerschnitte

$$M = Sh' + Ph''.$$

Indem aber einerseits $S = P$ und andererseits $(h' + h'') = h$ ist, so gelangt man offenbar auf jenen einfachen Ausdruck (584),

wobei, wie man schon auf Seite 260 zu bemerken Gelegenheit hatte, augenscheinlich die Lage der neutralen Axe zwischen den oberen und unteren Streckbalken keinen Einfluss hat.

Betreffend das statische Moment der Brückenbelastung in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, so muss dasselbe eben so gross, wie jenes Tragmoment sein, gleichzeitig aber auch der Gleichung (109) entsprechen. Hiernach ist dasselbe, weil man die hier in Klaftern verstandene Spannweite L in die Formel (109) in Zollen zu substituiren hat, durch den Ausdruck

$$\tfrac{1}{8} Q\,(72\,L) = 9\,Q\,L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (585)$$

gegeben, worin Q das Tragvermögen der Brücke, also das Totalgewicht derselben $g\,L$ vorstellt.

Die Gleichsetzung der Werthe (584) und (585) ergibt nunmehr die Bedingungsgleichung

$$S\,h = P\,h = 9\,Q\,L = 9\,g\,L^2,$$

woraus zunächst

$$S = P = \frac{9\,Q\,L}{h} = \frac{9\,g\,L^2}{h} \quad . \quad . \quad . \quad (586),$$

und hiermit wegen der Relation (582) ebenfalls, wie unter (581),

$$f' = \frac{9\,Q\,L}{a'\,h} = \frac{9\,g\,L^2}{a'\,h}$$

und

$$f'' = \frac{9\,Q\,L}{r'\,h} = \frac{9\,g\,L^2}{r'\,h}$$

folgt, so dass also auf diese Weise für die Querschnitte der Streckbalken wieder die früheren Werthe gefunden werden.

Die auf diese Betrachtung gestützte Berechnungsweise ist diejenige, welcher sich gewöhnlich die ausübenden Ingenieure bedienen, und dieselbe empfiehlt sich in der That desshalb, weil sie offenbar eine nähere Kenntniss der Biegungstheorie nicht voraussetzt. Doch ist, wie man aus der Uebereinstimmung der Resultate dieser Berechnungsweise mit den Formeln (581) ersehen hat, die so ziemlich verbreitete Meinung, dass die Lehren der Biegungstheorie nicht zu denselben Resultaten führen, keineswegs richtig, und sie findet lediglich ihre Erklärung in dem Umstande, dass die älteren Theorien, deren man sich sonst bediente, eine allgemeine Anwenduug nicht zulassen, daher vor Irrthümern nicht schützen, wie diess schon mehrere Male, insbesondere aber in der Anmerkung 1 auf Seite 260 anseinandergesetzt worden ist.

Zufolge der Formel (579) erhalten die oberen und unteren Streckbalken bei der zweckmässigsten Anordnung derselben un-

gleiche Querschnitte, und zwar wird vorzüglich bei der Anwendung von Holz oder Schmiedeeisen, weil für diese Materialien (namentlich in Berücksichtigung der §§. 249 und 250) $r' < a'$ ist, auf die oberen Streckbalken zusammen ein verhältnissmässig grösserer Querschnitt, als auf die unteren entfallen.

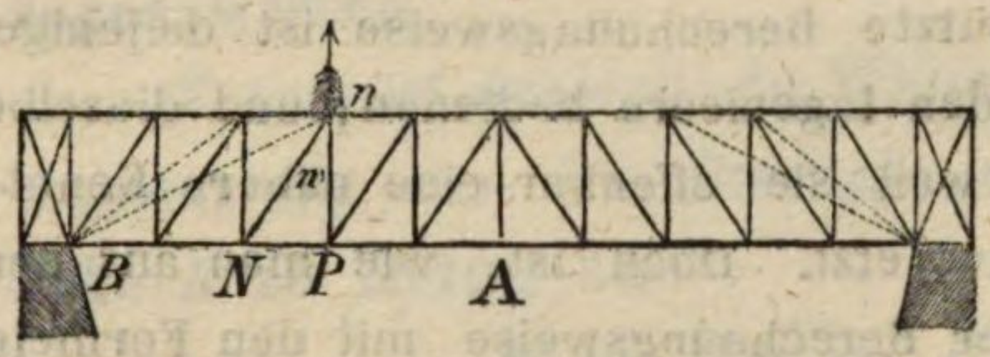
Die Formeln (579), (580) und (581) lassen sich übrigens auch dann anwenden, wenn die oberen und unteren Streckbalken aus verschiedenen Materialien bestehen *).

§. 275.

Construction der Tragwände in ihren einzelnen Bestandtheilen. Hängsäulen (Hängschrauben). Streben. In den beiden vorigen §§. hat man die Maximalspannweite bloss von dem Widerstande der oberen und unteren Streckbalken in ihrer Längenrichtung in der Voraussetzung abhängig gemacht, dass auch die übrigen Bestandtheile der Tragwände die nöthige Stärke besitzen. Es erübrigt daher noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung diese Voraussetzung stattfinden darf, wie nämlich in diesem Falle die Anordnung der zwischen den Streckbalken vorhandenen Constructionsbestandtheile, und zwar sowohl hinsichtlich ihrer Dimensionen, als auch hinsichtlich ihrer Verbindung unter einander und mit den Streckbalken zu geschehen hat.

Die einfachste Anordnung besteht bekanntlich aus verticalen Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben (Fig. 312). Diese Constructionsbestandtheile haben die Spannungen in den unteren und die Pressungen in den oberen Streckbalken angemessen zu reguliren, und dadurch es möglich zu machen, dass jede Tragwand auf die in den §§. 273 und 274 erörterte Weise als Träger betrachtet werden kann. Aus diesem Grunde muss jede Strebe eine gewisse Pressung und jede Hängsäule

Fig. 312.



*) Diess ist z. B. bei den Schifkorn'schen Brücken der Fall, wo die oberen der Pressung ausgesetzten Streckbalken aus Gusseisenstücken, die unteren dem Zuge ausgesetzten aber aus Schmiedeeisen-Schienen gebildet werden.

(Hängschraube) eine gewisse Spannung auszuhalten im Stande sein. Um diess beurtheilen zu können, ist vor Allem die Bestimmung der bezüglichen Spannungen und Pressungen nöthig.

§. 276.

Spannung in den Hängsäulen (Hängschrauben). Pressung auf die Streben. Nach dem §. 43 ad 1 ist in einem Brückenquerschnitte die Kraft $R \cos\varphi$ normal auf die Längenrichtung der Fasern thätig, und diese Kraft kann bei den vorkommenden kleinen Biegungen der Resultirenden R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf die gewählte Brückenstelle NnP (Fig. 312) gleich gesetzt werden, wie diess z. B. auch schon im §. 271 geschehen ist.

Diese Resultirende ist es nun, welche an einer Brückenstelle den Abstand der oberen und unteren Streckbalken zu verändern beabsichtigt, und desshalb eine Spannung in den Hängsäulen (Hängschrauben) und eine Pressung auf die Streben hervorbringt.

Hieraus folgt:

1. Alle an einer Brückenstelle NnP vorkommenden Hängsäulen (Hängschrauben) haben zusammen eine Spannung Σ auszuhalten, die der betreffenden Resultirenden R der einwirkenden Kräfte gleich ist.

Desshalb ist

$$\Sigma = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (587).$$

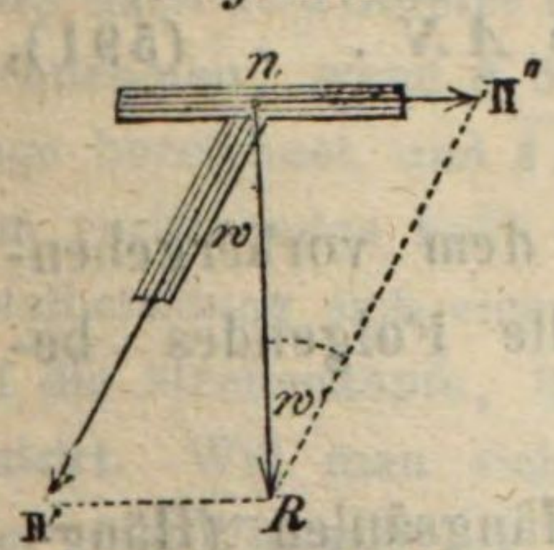
2. Nach derselben Resultirenden hat man auch die verticale Pressung Π auf die Streben daselbst zu bemessen.

Desshalb ist auch

$$\Pi = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (588).$$

3. Die eigentliche Pressung Π' in der Richtung der Streben wird gefunden, wenn man die verticale Pressung in die zwei Componenten Π' und Π'' (Fig. 313) zerlegt, von welchen die erste Componente Π' die fragliche Pressung in der Strebenrichtung, die zweite Componente Π'' aber diejenige Pressung bezeichnet, welche in die horizontalen Streckbalken übertragen wird.

Fig. 313.



Hiernach ist

$$\Pi' = \frac{\Pi}{\cos w} = \frac{R}{\cos w} \text{ und } \Pi'' = \Pi \, tg \, w = R \, tg \, w \quad . \quad . \quad (589),$$

wobei w den Winkel bezeichnet, welchen die Strebenrichtung mit der Verticalen einschliesst.

Die Pressung in der Strebenrichtung nimmt daher desto mehr zu, je schiefer dieselbe ist.

Setzt man (Fig. 312) die Tragwandhöhe . . . $\overline{Pn} = h$,

die Strebenlänge . . . . . $\overline{Nn} = \sigma$

und die Entfernung der Hängsäulen (Hängschrauben) von

einander . . . . . $\overline{NP} = \varepsilon$,

so hat man wegen $\cos w = \frac{h}{\sigma}$ und $tg\, w = \frac{\varepsilon}{h}$ auch

$$\left.\begin{aligned} \Pi' &= \frac{\sigma}{h} R \\ \text{und } \Pi'' &= \frac{\varepsilon}{h} R \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots, \ldots \quad (590).$$

4. Da die Resultirende R mit der Lage der Brückenstelle NnP variirt, so erleiden die Streben und Hängsäulen (Hängschrauben) an den verschiedenen Brückenstellen eine verschiedene Anspruchsnahme, welche auch noch mit der verschiedenen zufälligen Belastung wechselt. Die grösste Anspruchsnahme, welche in dieser Hinsicht eintreten kann, ist einer besonderen Aufmerksamkeit zu würdigen.

§. 277.

Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben bei einer gleichmässig vertheilten Belastung nach der ganzen Brückenlänge. Ist die totale Belastung, nämlich das eigene und das zufällige Gewicht, nach der ganzen Brückenlänge L gleichmässsig vertheilt, so wird die Resultirende R für eine beliebig gewählte Stelle NnP (Fig. 312)

R = dem Gewichte in der Strecke $\overline{AN}$ . . (591),

wie man diess bereits im §. 271 gesehen hat.

Nach dieser Gleichung in Verbindung mit dem vorhergehenden §. kann man in dem vorausgesetzten Falle Folgendes behaupten:

1. Alle an einer Brückenstelle vorhandenen Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben erleiden, und zwar erstere zusammen eine Spannung (Σ), letztere aber zusammen eine verticale Pressung (Π),

welche man nach dem Antheile der Totalbelastung zu bemessen hat, der zwischen der Mitte der Brücke und der gewählten Brückenstelle vorhanden ist.

2. Die Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben nimmt von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, woselbst sie am grössten wird. In der Nähe dieser Enden ist beinahe $R = \frac{1}{2} g L = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) L = \frac{1}{2} Q$, nämlich gleich der halben Totalbelastung.

Angesichts dieses Resultates ist es zu empfehlen, die den Widerlagern zunächst gelegenen Hängsäulen (Hängschrauben) und eben so die Streben daselbst so stark zu machen, dass die ersteren zusammen eine Spannung von $\frac{1}{2} Q$, und die letzteren eine verticale Pressung gleichfalls von $\frac{1}{2} Q$ mit Sicherheit aushalten können.

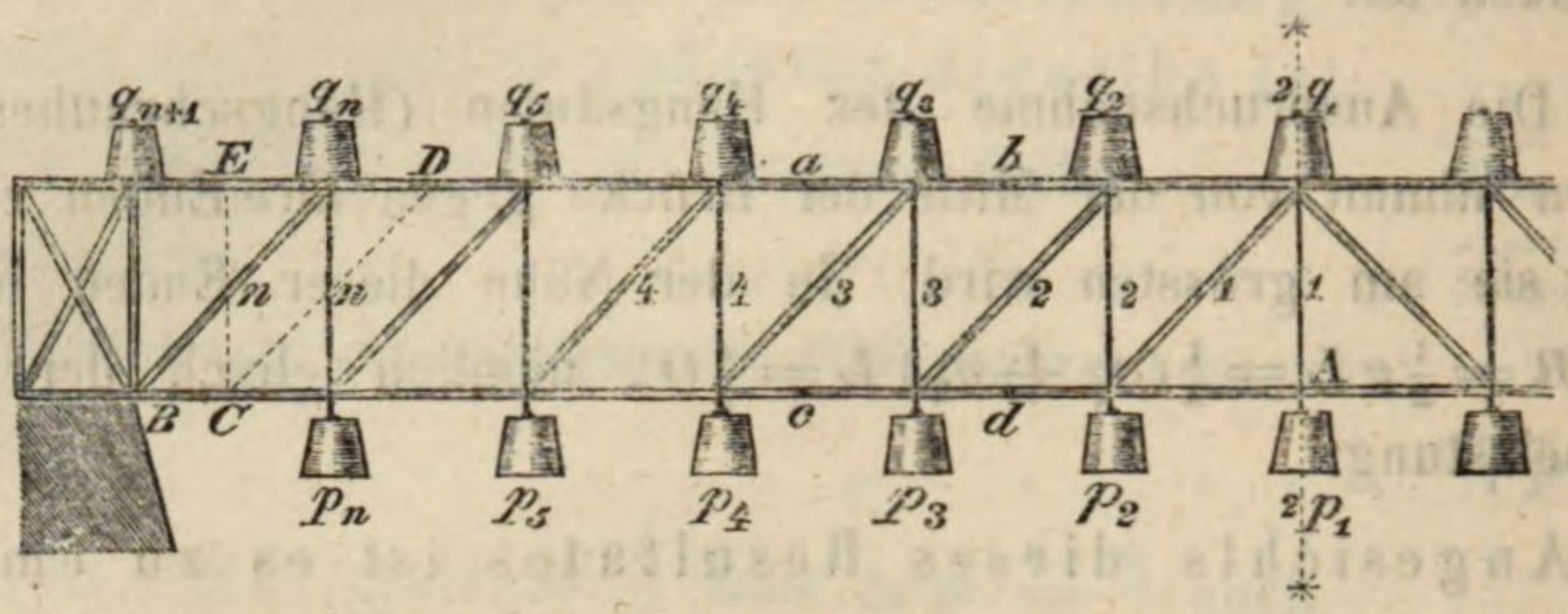
Die Anzahl der Hängsäulen (Hängschrauben) und der Streben, welche nach der Brückenbreite vorhanden sind, wird die grösste Anspruchsnahme, welcher die genannten Constructionstheile Stück für Stück ausgesetzt werden können, und sofort die nöthige Stärke derselben beurtheilen lassen.

In vielen Fällen wird es angezeigt sein, den Streben in der Nähe der Brückenenden wegen ihrer bedeutenden Anspruchsnahme eine Unterstützung mittelst anderen Streben, z. B. in der Art zukommen zu lassen, wie diess in der Fig. 312 mit punctirten Linien angedeutet erscheint.

Anmerkung. Die in diesem §. besprochene Resultirende R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebig gelegene Stelle $Nn\,P$ (Fig. 312) wäre nach dem Gesetze der gleichförmig vertheilten Belastung mit $R = g . \overline{AN} = gx$ anzunehmen, wenn g den Antheil der Totalbelastung per Klafter Brückenlänge bezeichnet, und $\overline{AN} = x$ gesetzt wird. Allein diese Berechnung ist in dem vorliegenden Falle nur eine annäherungsweise, da augenscheinlich die Totalbelastung sich eigentlich nur an einzelnen Stellen, theils unmittelbar auf die Strebenköpfe, theils unmittelbar auf die Schraubenfüsse concentrirt. Will man sich über die Grösse der Resultirenden R und sofort über die Wirkung der Totalbelastung Q auf die einzelnen Hängschrauben und Streben eine nähere Kenntniss verschaffen, so kann man auf folgende Weise verfahren:

Es sei (Fig. 314) in *A* die Mitte der Brücke und in *B* das eine Ende derselben, und man nehme an, dass von der gesammten schwebenden Be-

Fig. 314.



lastung der halben Brücke ($\frac{1}{2}Q$) unmittelbar auf die Köpfe der Streben Nr. 1, 2, 3, 4, ... *n* beziehungsweise die Gewichtsantheile $2q_1$, q_2, q_3, q_4, ... q_n Ztr., hingegen unmittelbar auf die Füsse der Hängschrauben Nr. 1, 2, 3, 4, . *n* beziehungsweise die Gewichtsantheile $2p_1$, p_2, p_3, p_4 .. p_n Ztr. entfallen. Für eine gleichmässig vertheilte Belastung kann man die bemerkten Gewichtsantheile durch Eintheilung von Mitte zu Mitte der Hängschraubenabstände bestimmen, so dass z. B. das Gewicht q_3 derjenigen Belastung gleich wäre, welche thatsächlich in der Strecke $\overline{ab}$ oberhalb der Strebenköpfe Nr. 3 vorhanden ist, wobei *a* die Mitte zwischen q_3 und q_4, *b* aber jene zwischen q_2 und q_3 bezeichnet. Diese Belastung wird insbesondere aus dem Gewichte der oberen Streckbalken, ferner aus jenem der etwa vorhandenen Querriegel, Bedachung u. s. w. bestehen. Eben so wird beispielsweise der Gewichtsantheil p_3 nach der Belastung in der unteren Strecke $\overline{cd}$ zu bemessen sein, welche wieder insbesondere aus dem Gewichte der unteren Streckbalken, der Streben Nr. 2, der Brückenbahn, der zufälligen Last u. s. w. zu bestehen hat. Wäre die Brückenbahn nicht unten, sondern oben angebracht, so würde ihr eigenes Gewicht sammt der zufälligen Last bei den mit *q* bezeichneten Gewichtsantheilen zu berücksichtigen sein. Von $2p_1$ und $2q_1$ wird selbstverständlich nur die halbe Wirkung mittelst der Streben Nr. 1 übertragen, weil die andere halbe Wirkung auf die jenseitige Hälfte kommt. Uebrigens kann wegen der gleichförmigen Belastungsvertheilung

$$2q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = q_n = q,$$

$$2p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = p_n = p,$$

und

$$(p+q) = \frac{Q}{2n}$$

gesetzt werden, wenn $2n$ die Anzahl der rechteckigen Felder bezeichnet, in welche die Tragwand durch die Hängschrauben getheilt wird.

Diess vorausgesetzt, kann man nunmehr Folgendes schliessen:

Zuerst ist die Spannung in den Hängschrauben

Nr. 1 . . . . . $\Sigma_1 = 2p_1 = p$,

Nr. 2, indem hier zu p_2 noch die von den Streben Nr. 1 übertragenen Gewichtshälften p_1 und q_1 hinzukommen,

$$\Sigma_2 = p_1 + p_2 + q_1 = \tfrac{3}{2}p + \tfrac{1}{2}q.$$

Nr. 3, indem hier zu p_3 noch der von den Streben Nr. 2 übertragene Zug Σ_2 und das gleichfalls übertragene Gewicht q_2 hinzuzuschlagen sind,

$$\Sigma_3 = p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 = \tfrac{5}{2}p + \tfrac{3}{2}q,$$

Nr. 4, nach einem ähnlichen Raisonnement,

$$\Sigma_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 = \tfrac{7}{2}p + \tfrac{5}{2}q,$$

endlich in den letzten Hängschrauben

Nr. n, . . $\Sigma_n = p_1 + p_2 + .. + p_n + q_1 + q_2 + .. q_{n-1}$

$$= \int^a (p_n) + \int^a (q_{n-1}) = \left(\frac{2n-1}{2}\right)p + \left(\frac{2n-3}{2}\right)q$$

$$= \left(\frac{2n-1}{4n}\right)Q - q = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q - q,$$

wobei $\int^a$ die vollzogene Summirung der gleichartigen Theile anzeigt.

Ferner ist die verticale Pressung auf die Streben in Nr. 1, indem hier nur die Hälfte der Gewichtsantheile $2p_1$ und $2q_1$ in Betracht kommt,

$$\Pi_1 = p_1 + q_1 = \tfrac{1}{2}(p+q),$$

Nr. 2, indem das Gewicht q_2 durch den Σ_2 zu vermehren ist,

$$\Pi_2 = p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = \tfrac{3}{2}(p+q),$$

Nr. 3, indem man das Gewicht q_3 mit dem Zuge Σ_3 zu vereinigen hat,

$$\Pi_3 = p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + p_2 + q_3 = \tfrac{5}{2}(p+q),$$

Nr. 4, nach einem ähnlichen Schlusse,

$$\Pi_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \tfrac{7}{2}(p+q),$$

endlich auf die letzten Streben

Nr. n, . . $\Pi_n = p_1 + p_2 + .. + p_n + q_1 + q_2 + .. + q_n$

$$= \int^a (p_n) + \int^a (q_n) = \binom{2n}{2}(p+q)$$

$$= \left(\frac{2n-1}{4n}\right)Q = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q.$$

Die Spannungen in den Hängschrauben und die Pressungen auf die Streben nehmen daher in der That von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, und sind nach den Gewichten zu bemessen, welche zwischen jener Mitte und den betreffenden Constructionstheilen thätig sind. Nur ist diese Thätigkeit einerseits auf die Schraubenfüsse, andererseits aber auf die Strebenköpfe zu beziehen.

Die letzten Hängschrauben werden, wie man bereits oben bemerkt hat, der grössten Spannung ausgesetzt. Diese ist der Summe der Gewichte $\left[\int^a (p_n) + \int^a (q_{n-1}) = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q - q\right]$ gleich, welche zwischen der Mitte der Brücke (A) und der Geraden $\overline{CD}$ liegen, wenn diese

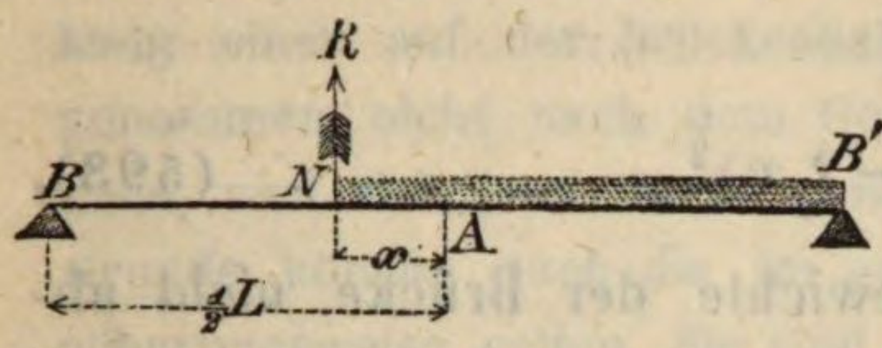
durch den Mittelpunct der Schraubenlänge parallel zur Strebenrichtung gezogen wird. Eben so erleiden die letzten Streben den grössten verticalen Druck. Dieser ist der Summe der Gewichte $\left[\int^a (p_n) + \int^a (q_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \right) Q \right]$ gleich, welche zwischen jener Mitte (A) und der Geraden $\overline{CE}$ liegen, wenn diese durch den Mittelpunct der Strebenlänge parallel zu den Hängschrauben gezogen wird. Beide Gewichtssummen weichen augenscheinlich nur wenig von dem halben Totalgewichte ($\frac{1}{2} Q$) ab, und können demselben, namentlich bei grossen Brücken, gleichgesetzt werden, wie man diess im gegenwärtigen §. bereits angenommen hat.

Aus dieser Darstellung geht übrigens deutlich hervor, dass die Resultirende R, von welcher die Anspruchsnahme der Hängschrauben abhängt, immer etwas kleiner ist, als jene, nach welcher die Anspruchsnahme der Streben zu bemessen kommt, und dass überdiess die erstere auch davon abhängt, in welcher Weise die Totalbelastung auf die unteren und oberen Streckbalken übertragen wird, daher es streng genommen nicht gleichgiltig ist, ob die Brückenbahn unmittelbar mit den oberen oder mit den unteren Streckbalken verbunden, oder aber, ob sie zwischen denselben angebracht erscheint. Indessen wird der Einfluss dieser Verschiedenheiten desto unwesentlicher, je näher die zu betrachtenden Streben und Hängschrauben an den Brückenenden liegen, und man wird auch für die anderen Brückenstellen jedenfalls ein brauchbares Resultat erhalten, wenn man die in den §§. 276 und 277 bezeichnete Resultirende R nach dem Gesetze der gleichförmig vertheilten Belastung berechnet, nämlich $R = g \,.\, \overline{AN} = gx$ annimmt, wo die Abscisse $x = \overline{AN}$ bis zum Fusse der betreffenden Strebe reicht, und hiernach sowohl die Spannung in den Hängschrauben (Formel 587), als auch die Pressung auf die Streben (Formeln 588, 589 und 590) bestimmt.

§. 278.

Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben, wenn nicht die ganze, sondern nur ein Theil der Brückenlänge zufällig belastet ist. Im vorigen §. ist angenommen, dass die zufällige Belastung über die ganze Brückenlänge sich erstrecke. Diese Annahme ist allerdings die ungünstigste für die Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben zunächst den beiden Brückenenden. Für eine andere Brückenstelle hingegen kann die massgebende Resultirende R der einwirkenden Kräfte grösser werden, als sie aus der Gleichung (591) folgen würde, indem eine theilweise zufällige Belastung der Brücke ungünstiger sein kann. Man findet leicht, dass in dieser Hinsicht

Fig. 315.



die Resultirende R (Fig. 315) für eine Brückenstelle, welche in N zwischen der Mitte A und dem Ende B liegt, am grössten wird, wenn nicht die ganze Länge, sondern nur ihr grösserer Theil $\overline{B'N}$ zufällig belastet ist, während der kleinere Theil $\overline{BN}$ bloss sein eigenes Gewicht zu tragen hat.

In diesem Falle ist nämlich

das eigene Brückengewicht in der Strecke $\overline{BN}$ . . . . $= g_1 (\frac{1}{2} L - x)$,

das aus der eigenen und der zufälligen Belastung der Brücke in der Strecke $\overline{BN}$ zusammengesetzte Gewicht . . . $= (g_1 + g_2)(\frac{1}{2} L + x)$,

der Druck auf die Stütze in B $= \frac{1}{2} L (g_1 + \frac{1}{4} g_2) + \frac{g_2}{2L}(Lx + x^2)$,

jener „ „ „ „ B' $= \frac{1}{2} L (g_1 + \frac{3}{4} g_2) + \frac{g_2}{2L}(Lx - x^2)$,

endlich der numerische Werth der fraglichen Resultirenden

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{dem Drucke} \\ \text{auf die Stütze} \\ \text{in } B \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{dem Gewichte in} \\ \text{der Strecke } \overline{BN}, \end{array} \right.$$

daher auch

$$R = \tfrac{1}{8} g_2 L + (g_1 + \tfrac{1}{2} g_2) x + \frac{g_2}{2L} x^2 = (g_1 + g_2) x + \frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Gewichte in der} \\ \text{Strecke } \overline{AN} \end{array} \right. + \frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (592).$$

Vergleicht man diesen Werth mit jenem der Gleichung (591), so sieht man, dass im gegenwärtigen Falle bei der theilweisen zufälligen Belastung der Brücke die Resultirende für die betrachtete Brückenstelle um $\frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2$ grösser ist, als in dem Falle, wenn die zufällige Belastung nach der ganzen Brückenlänge vorhanden wäre. Nur für $x = \frac{1}{2} L$, also für die Brückenenden werden die beiderseitigen Resultate einander gleich. In der That sind sodann die zwei verglichenen Fälle identisch, indem die belastete Strecke $\overline{B'N}$ gleich der ganzen Länge wird.

Nennt man die jeweilige Differenz der verglichenen Resultirenden ΔR, so hat man allgemein

$$\Delta R = \frac{g_2}{8L}(L-2x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (593),$$

welche Differenz von dem eigenen Gewichte der Brücke nicht abhängt, übrigens von den Enden gegen die Mitte derselben zunimmt, und bei dieser letzteren am grössten wird.

So z. B. erhält man

für $x = 0$ . . $\Delta R = 0{\cdot}125\, g_2 L$.	für $x = 0{\cdot}3\, L$, $\Delta R = 0\,020\, g_2 L$,
„ $x = 0{\cdot}1\, L$, $\Delta R = 0\,080\, g_2 L$,	„ $x = 0{\cdot}4\, L$, $\Delta R = 0\,005\, g_2 L$,
„ $x = 0{\cdot}2\, L$, $\Delta R = 0{\cdot}045\, g_2 L$,	„ $x = 0\,5\, L$, $\Delta R = 0$.

Die grösste Differenz, welche für $x = 0$ in der Mitte der Brücke stattfinden kann, ist also $\frac{1}{8} g_2 L$, oder gleich dem achten Theile der grössten zufälligen Belastung $g_2 L$.

Hiernach erleiden die Hängsäulen (Hängschrauben) in der Mitte der Brücke, wenn die grösste zufällige Belastung nur auf der halben Brückenlänge vorhanden ist, eine grössere Spannung von $\frac{1}{8} g_2 L$ Ztrn., als in dem Falle, wenn die ganze Brücke in derselben Weise gleichförmig belastet wäre. Das Gleiche gilt von der verticalen Pressung auf die Streben in der Mitte der Brücke.

Der Ausdruck (592) zeigt übrigens, das die durch die ungünstigsten Fälle entstehenden Werthe der Resultirenden R noch immer von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zunehmen, und daher an diesen letzteren jedenfalls die grösste Anspruchsnahme der Streben und Hängsäulen vorhanden ist. Wenn also an den verschiedenen Brückenstellen sowohl die Streben als auch die Hängsäulen gleich stark gemacht werden, so wird lediglich die Ueberzeugung genügen, dass diese Constructionsbestandtheile in der Nähe der Brückenenden die nöthige Solidität besitzen, ohne dass es nothwendig erscheint, in eine nähere Untersuchung bezüglich der anderen Brückenstellen einzugehen. Diese Ueberzeugung wird man sich nach Anleitung des vorigen §. verschaffen. Wäre aber eine nähere Untersuchung auch bezüglich anderer Brückenstellen nothwendig, so hätte man dazu nicht die Gleichung (591), sondern jene unter (592) zu benützen.

Aus der Anmerkung des vorigen §. ist zu entnehmen, dass die Wirkung einer auf der Brückenbahn gleichförmig vertheilten Belastung streng genommen nicht nach dem Gesetze der Continuirlichkeit beurtheilt werden kann, weil sich jene Wirkung nur an einzelnen Stellen äussert. Aus diesem Grunde können auch die im gegenwärtigen §. erhaltenen Resultate nur annäherungsweise gelten. Sie sind indessen für den practischen Gebrauch vollkommen genügend, wenn man auch hier die Abscisse $\overline{AN} = x$ von der Mitte der Brücke bis zu dem Fusspuncte der betreffenden Strebe rechnet.

§. 279.

Weitere Bedingung für die Stärke der Streckbalken aus Anlass ihrer Anspruchsnahme normal auf die Längenrichtung der Fasern. Die in den vorigen §§. 277 und 278 erwähnte Resultirende R ist in der Richtung normal auf die Streckbalken thätig. Es müssen daher diese letzteren auch in dieser Hinsicht die gehörige Stärke besitzen, damit nicht wegen der Tendenz des Uebereinanderverschiebens in der Richtung eines Brückenquerschnittes eine Besorgniss entstehe. Wird, eben so wie im §. 271, der grösste Widerstand per $\square''$ mit a'' Zentnern bezeichnet, welchen das Materiale der Streckbalken der beabsichtigten Verschiebung ohne Gefahr entgegensetzen kann, und ist der Querschnitt aller Streckbalken $= F\square''$, so hat man offenbar die Bedingung

$$a''F \geqq R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (594)$$

zu erfüllen. Der grösste Werth von R ist, wie man gesehen hat, an beiden Brückenenden vorhanden, er ist nämlich daselbst $= \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}gL$. Haben, wie gewöhnlich, die Streckbalken nach der ganzen Brückenlänge eine gleiche Stärke, so ist für den ungünstigsten Fall ($R = \frac{1}{2}Q$) zu untersuchen, ob in der That $a''F \geqq \frac{1}{2}gL$ oder

$$L \leqq \frac{2a''F}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (595)$$

ist. Es ist daher nicht genug, die Maximalspannweite nach der Formel (577) zu berechnen, sondern man hat auch die Ueberzeugung nöthig, dass gleichzeitig der Relation (595) entsprochen werde.

Man kann übrigens auch umgekehrt, wenn die Spannweite bekannt ist, den nöthigen Werth von a'' bestimmen; denn es ist:

$$a'' \geqq \frac{gL}{2F}.$$

Sei z. B., wie im §. 273, $F = (f' + f'') = 957{\cdot}6$ □″, $L = 27{\cdot}8$ Wr. Klftr. und $g = 160{\cdot}3$ Ztr., so muss der aufgestellten Bedingung gemäss $a'' \leqq 2{\cdot}38$ Ztr. sein. Bestehen nun die Streckbalken aus Kieferholz von guter Qualität, so kann man in der Richtung normal auf die Fasern wohl einen solchen Widerstand erwarten, der wenigstens 2·38 Ztr. per □″ beträgt. So gross wäre nämlich die Anspruchsnahme in der Nähe der Brückenenden.

Will man die diessfällige Wirkung auch in anderen Brückenquerschnitten aufsuchen, so hat man in die Relation (595) für R jedesmal den entsprechenden Werth nach Massgabe der Gleichung (592) zu substituiren.

Da die Anspruchsnahme der Streckbalken in der besprochenen Hinsicht von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zunimmt, so wird man es zur Erhöhung der Solidität zuweilen angezeigt finden, den Streckbalken gegen ihre Enden zu eine Verstärkung zu geben. Diess kann auf eine zweckmässige Weise durch die Anbringung von Sattelhölzern geschehen, wenn diese mit den Streckbalken fest verschraubt werden.

Vereinigt man die Relationen (577) und (595), so gelangt man zur Kenntniss, wie weit das Verhältniss zwischen der Höhe und Länge der Tragwände mit Vortheil getrieben werden kann. Denn nach der Gleichung (577) ist einerseits die grösste zulässige Spannweite

$$L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{r' F h}{2 g}},$$

wenn man $f' = f'' = \frac{1}{2}F$, nämlich insbesondere den Fall annimmt, wo die oberen und unteren Streckbalken einen gleichen Querschnitt haben. Nach der Relation (595) aber darf andererseits höchstens

$$L = \frac{2 a'' F}{g}$$

werden, wenn der Querschnitt der Streckbalken nach der ganzen Länge der Tragwände derselbe ist.

Es ist daher im günstigsten Falle, wenn die Streckbalken in keiner der beiden Beziehungen zu stark oder zu schwach sein sollen,

einerseits . . . . . $L^2 = \frac{1}{18} \frac{r' F h}{g}$

und andererseits . . . . . $L = 2 \frac{a'' F}{g}$,

daher durch die Division der beiden Gleichungen

$$L = \frac{r' h}{36 a''} \text{ und hieraus } \frac{L}{h} = \frac{r'}{36 a''}.$$

Man beachte nun, dass L in Klaftern, hingegen h in Zollen zu verstehen ist, und dass man aus diesem Grunde, um L und h gleichnamig zu machen, das gefundene Verhältnis mit 72 zu multipliciren, nämlich zu setzen hat:

$$\frac{L \text{ in Klaftern}}{h \text{ in Klaftern}} = \frac{2r'}{a'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (596).$$

Nimmt man, um den Werth dieses Verhältnisses näher anschaulich zu machen, für r' und a'' die beispielsweisen Resultate für Kieferholz im §. 273 und im gegenwärtigen §., nämlich $r' = 10{\cdot}7$ und $a'' = 2{\cdot}38$ Ztr. an, so erhält man für das fragliche Verhältniss $\frac{2r'}{a''} = 9$, d. h. es hätte die Tragwandhöhe den neunten Theil der Spannweite zu betragen, wenn den Bedingungen des Gleichgewichtes in den beiden obigen Beziehungen zugleich entsprochen werden soll. In diesem Falle dürfte man die Tragwände nicht in der Absicht höher machen, um schwächere Streckbalken anzuwenden, weil dann der Bedingung (795) nicht mehr entsprochen würde, abgesehen davon, dass bei grösseren Tragwandhöhen auch bezüglich der längeren Streben Unzukömmlichkeiten sich ergeben können. Die Tragwände hingegen niedriger und zugleich die Streckbalken stärker zu machen, wäre zwar gestattet, indessen in öconomischer Beziehung nur dann vortheilhaft, wenn das wegen Verminderung der Tragwandhöhe entstehende Mehrerforderniss bei dem Streckbalken durch das mögliche Ersparniss bei der Anordnung der Streben und Hängschrauben mehr als aufgewogen werden würde, was wenigstens bei hölzernen Tragwänden in der Regel nicht der Fall sein wird. Bei diesen wird es gewöhnlich zweckmässig sein, die Tragwandhöhe je nach Umständen mit dem achten, neunten, zehnten oder zwölften Theil der Spannweite zu bemessen.

In Amerika ist man auf rein practische Weise zu demselben Ergebnisse gelangt, wie diess aus den dort ausgeführten Brücken entnommen werden kann.

§. 280.

Bedingung für die Solidität der Verbindung zwischen den Streben und den Streckbalken. Aus den Relationen (590) im §. 276 geht hervor, dass die in einem Brückenquerschnitte vorhandenen Streben eine Pressung Π'' in die Streckbalken zu übertragen haben, welche aus der Gleichung

$$\Pi'' = R\,tg\,w = \frac{\varepsilon}{h} R$$

zu bestimmen ist. Diese Pressung wird am grössten in der Nähe der beiden Brückenenden, für welche man annäherungsweise $R = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} g L$ zu setzen hat, so dass die daselbst entstehende Pressung nach der Gleichung

$$\Pi'' = \tfrac{1}{2} g L\,tg\,w = \frac{\varepsilon}{2h} g L$$

zu beurtheilen ist.

Zufolge dieser Gleichung muss man darauf sehen, dass die Verbindung zwischen den Streben und den Streckbalken die gehörige Solidität besitze. Diese ist im Allgemeinen und namentlich bei längeren Brücken mittelst Nägeln und Schrauben nicht zu erreichen, sondern es muss eine bessere Verbindung angewendet werden. Man wird weiter unten solche Verbindungen kennen lernen, doch kann man sich schon gegenwärtig nicht verhehlen, dass hierin eigentlich die schwache Seite der in diesem Kapitel besprochenen Tragwandconstruction liegt, wesshalb es leicht zu erklären ist, wenn aus Anlass einer ungenügenden Verbindung in der fraglichen Hinsicht das sonst zu erwarten gewesene Tragvermögen der Brücke nicht eintritt. Vorzüglich ist es die Verbindung in der Gegend der Brückenenden, welcher die grösste Aufmerksamkeit zugewendet werden muss.

Wenn diese Verbindung nicht die gehörige Verlässlichkeit darbietet, so ist es offenbar nicht gestattet, die grösste Spannweite nach der Anleitung des §. 273 zu berechnen, sondern es wird sodann umgekehrt aus der Grösse der Pressung Π'', die man mit Rücksicht auf die statthabende Verbindung der Streben mit den Streck-

balken als zulässig erachtet, auf die mögliche Spannweite zu schliessen, und hiernach höchstens

$$L = \frac{2\,\Pi''}{g\,tg\,w} = \frac{2\,h\,\Pi''}{g\,\varepsilon}$$

angenommen werden können.

§. 281.

Gegenstreben. In den vorhergehenden Untersuchungen dieses Kapitels hat man in jeder Hälfte einer Tragwand die Streben nur nach einer Richtung laufend angenommen. Werden aber auch Gegenstreben angebracht, so wird durch diese die Solidität der Construction erhöht. Sodann werden die ersteren zum Unterschiede von den Gegenstreben, Hauptstreben genannt.

§. 282.

Verminderte Anspruchsnahme der Streben und Hängschrauben, wenn diese Constructionstheile sich gegenseitig schneiden. Bisher hat man bezüglich der Streben und Hängschrauben immer eine solche Anordnung betrachtet, wo jede Hängschraube vom Fusse einer Strebe zum Kopfe der nächsten läuft, ohne auf diesem Wege mit einer anderen Strebe zusammenzutreffen. Eine solche Tragwand werde der Kürze wegen eine einfache genannt. Es kann jedoch, wie aus den Fig. 316 und 317

Fig. 316.

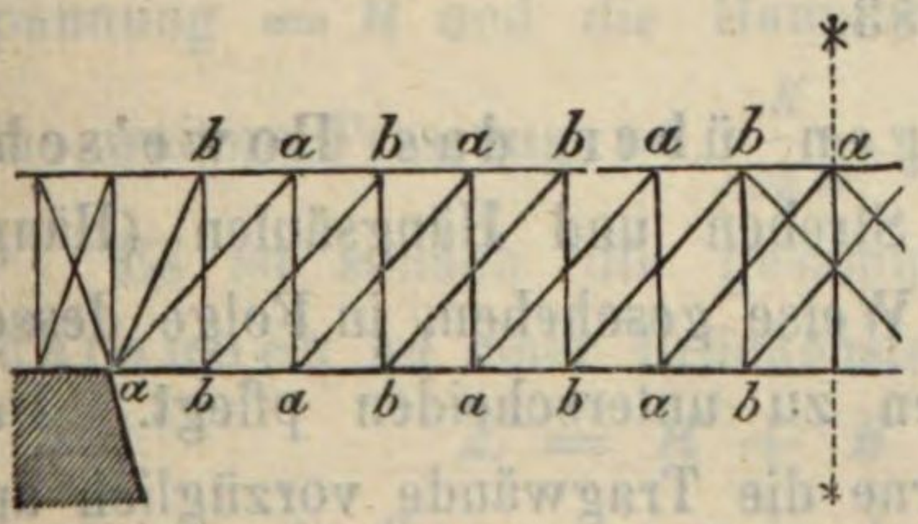
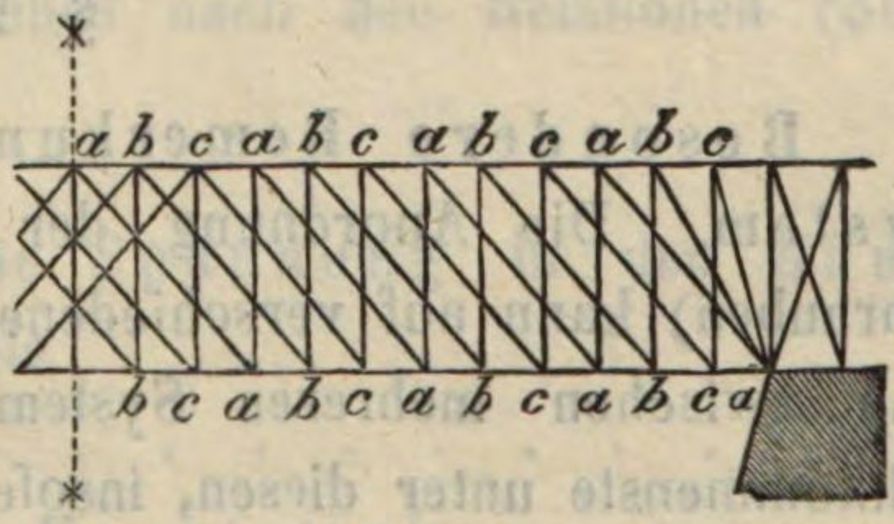


Fig. 317.

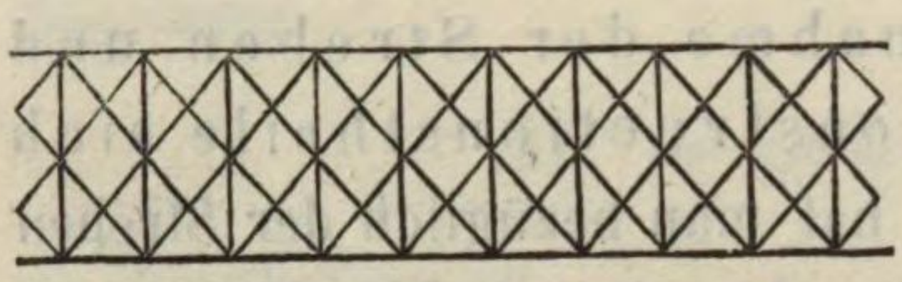


zu entnehmen ist, auch geschehen, dass die Hängschrauben und Streben sich durchschneiden, und dadurch gegenseitig in 2, 3, 4,...n Stücke getheilt werden. Um bei einer Tragwand dieser Art die Anspruchsnahme der Streben und Hängschrauben zu beurtheilen, kann man sich erlauben, dieselbe aus eben so vielen einfachen Tragwänden gebildet anzusehen, als die Anzahl der Stücke beträgt, in welche eine Strebe durch die Hängschrauben, oder umgekehrt eine Häng-

schraube durch die Streben getheilt wird. So kann man z. B. die Tragwand in Fig. 316 sich auch dadurch entstanden denken, dass die 2 einfachen *aaaa..* und *abbb..* zusammengestellt, und fest mit einander verbunden sind, während die in der Fig. 317 dargestellte Tragwand aus den 3 einfachen *aaaa..*, *abbb..* und *accc..* zusammengesetzt zu betrachten wäre. Aus dieser Vorstellung geht unmittelbar hervor, dass die Streben und Hängschrauben in der Tragwand Fig. 316 nur mit der Hälfte, und in der Tragwand Fig. 317 nur mit dem dritten Theile jener Resultirenden in Anspruch genommen werden, welche sich bei einfachen Tragwänden ergeben würde.

Hiernach wird man allgemein bei einer Tragwand, deren Streben und Hängschrauben in Folge ihres gegenseitigen Durchschnittes in n Stücke getheilt werden, den Druck auf eine Strebe und eben so den Zug in einer Hängschraube finden, wenn man zuerst die Berechnung, wie bei einer einfachen Tragwand, durchführt, und sodann die Resultate durch jene Zahl n dividirt.

Fig. 318.

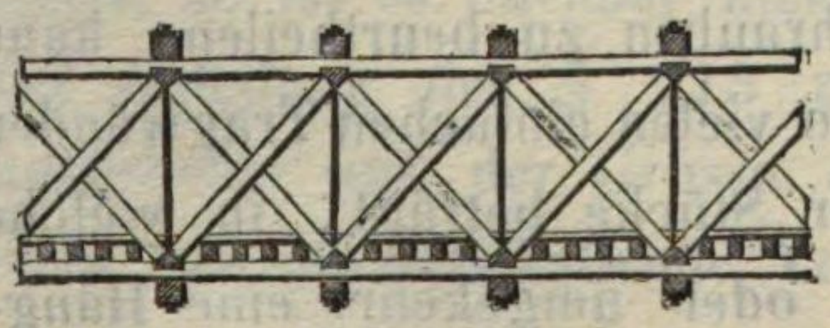


Selbstverständlich gilt dasselbe auch von den Gegenstreben, welche ausser den Hauptstreben zur Vermehrung der Solidität der Construction angebracht werden können (Fig. 318).

§. 283.

Besondere Bemerkungen über das Howe'sche System. Die Anordnung der Streben und Hängsäulen (Hängschrauben) kann auf verschiedene Weise geschehen, in Folge dessen man zwischen mehreren Systemen zu unterscheiden pflegt. Das vollkommenste unter diesen, insoferne die Tragwände vorzüglich aus Holz angefertigt sind, ist das Howe'sche System, welches auch mehrfach in Oesterreich zur Anwendung gekommen ist.

Fig. 319.

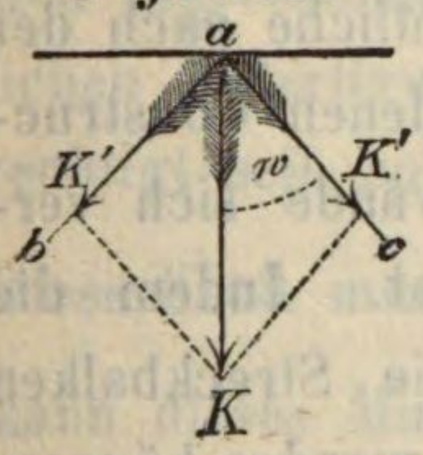


In einer nach dem Howe'schen Systeme construirten Tragwand (Fig. 319) kommen ausser den eigentlichen oder Hauptstreben auch Gegenstreben vor, hölzerne Hängsäulen

werden nicht, sondern nur eiserne Hängschrauben augewendet, und endlich wird die Verbindung zwischen Streben, Hängschrauben und Streckbalken mittelst eigener Querstücke hergestellt, an welche sich die Streben stemmen.

Um auf Grundlage der vorausgegangenen allgemeinen Betrachtungen in eine nähere Untersuchung dieses besonderen Systemes einzugehen, berücksichtige man zunächst, dass die Hängschrauben schon ursprünglich bei der Anfertigung der Tragwände verspannt werden müssen, um einerseits das Lockerwerden der Streben zu verhindern, andererseits aber zu ermöglichen, dass in die Streckbalken die nöthige Pressung übertragen werden kann, ohne dass dadurch die erwähnten Querstücke aus ihrer Lage verschoben werden. Sei K diese Kraft,

Fig. 320.



mit welcher die gesammten Hängschrauben in einem Brückenquerschnitte schon ursprünglich zu verspannen sind, so ist die Pressung, welche dadurch sowohl den Hauptstreben $\overline{ab}$ (Fig. 320), als auch den Gegenstreben $\overline{ac}$ mitgetheilt wird, offenbar

$$K' = \frac{K}{2\cos w}.$$

In Folge der eigenen und zufälligen Belastung der Brücke erleiden aber an der Brückenstelle, zu welcher die Resultirende R gehört, der Gleichung (587) gemäss, die Hängschrauben eine weitere Spannung $= R$ und die Hauptstreben nach den Relationen (590) eine weitere Pressung $= \frac{R}{\cos w}$.

Es ist sonach die gesammte Spannung in den Hängschrauben an einer Brückenstelle

$$\Sigma = R + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (597),$$

die gesammte Pressung in den Hauptstreben

$$\Pi' = \frac{R}{\cos w} + K' = \frac{R + \frac{1}{2}K}{\cos w} \quad . \quad - \quad . \quad . \quad (598)$$

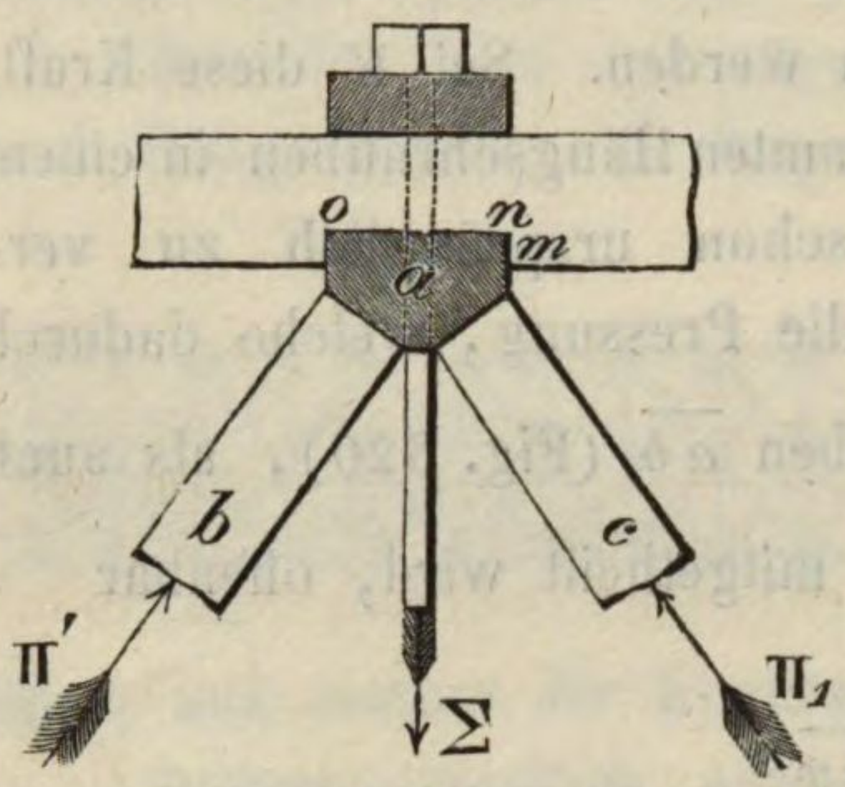
und jene in den Gegenstreben

$$\Pi_1 = \frac{K}{2\cos w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (599).$$

Statt $\cos w$ kann man, wie im §. 276, $\frac{h}{\sigma}$ setzen, wenn h und σ die dortigen Bezeichnungen beibehalten.

Die Gegenstreben haben, wie man aus der Vergleichung der Formeln (598) und (599) erkennt, eine geringere Pressung auszuhalten, als die Hauptstreben. Hieraus folgt, dass man jede Gegenstrebe zwischen zwei Hauptstreben, nicht aber umgekehrt eine Hauptstrebe zwischen zwei Gegenstreben durchlaufen lassen soll, weil auf eine solche Weise die Zahl der Hauptstreben grösser als jene der Gegenstreben, und dadurch die Möglichkeit geboten wird, die ersteren einer grösseren Pressung, als die letzteren auszusetzen, wie diess die obigen Gleichungen bedingen.

Fig. 321.



Die vorerwähnte Kraft K ist nicht ganz beliebig. Man erkennt diess aus der Betrachtung der Fig. 321, in welcher man sämmtliche nach der Brückenbreite vorhandenen Constructionstheile der Tragwände sich vereinigt vorzustellen hat. Indem die Querstücke (a) in die Streckbalken nur wenig eingelassen werden können, um diese nicht zu sehr zu schwächen, kann es geschehen, dass die kleine Stossfläche $\overline{mn}$ in Verbindung mit der Reibung in $\overline{no}$ nicht genügen würde, um diejenige Pressung Π'' (§. 276) ohne Gefahr aufzunehmen, welche von den Hauptstreben b in die horizontalen Streckbalken zu übertragen ist. Sodann muss man durch ein künstliches Verspannen der Hängschrauben in der Berührungsfläche $\overline{no}$ einen hinreichenden Reibungswiderstand zu erzeugen trachten. Die Grösse der hierzu nöthigen Verspannungskraft K kann man auf folgende Weise bestimmen. Es sei die Stossfläche $\overline{mn}$ in sämmtlichen nach der Brückenbreite vorhandenen Streckbalken in $\square''$ . . . . . $= f'''$,
der auf den $\square''$ reducirte grösste zulässige Widerstand der Streckbalken in jener Stossfläche . . . . $= r''$ Ztr.
und der Coefficient der Reibung, welche in der Berührungsfläche $\overline{no}$ stattfindet . . . . . $= \mu$.

Da der Gleichung (597) zufolge $(R+K)$ den Druck auf die Berührungsfläche $\overline{no}$ anzeigt, so ist der Betrag der Reibung $\mu(R+K)$, und da ferner die Stossfläche $\overline{mn}$ den Widerstand $r''f'''$ zu leisten

vermag, so muss für den sicheren Bestand der Verbindung an der betrachteten Stelle die Bedingung

$$\mu (R + K) + r'' f'' \geqq \Pi''$$

vorhanden sein, worin die horizontal zu übertragende Pressung Π'' nach der Relation unter (590) $\Pi'' = R\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{h} R$ bezeichnet, wenn ε der Abstand der Hängschrauben von einander ist.

Hieraus folgt unmittelbar

$$K \geqq \frac{R(tg\, w - \mu) - r'' f'''}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (600),$$

und dieser Bedingung gemäss kann Folgendes behauptet werden:

1. Die in einem Brückenquerschnitte vorhandenen Hängschrauben sind insgesammt mit einer gewissen Kraft K schon bei der ursprünglichen Anfertigung der Tragwände zu verspannen, wenn man berechtigt sein soll, die Brückenlänge nach dem §. 273 zu berechnen. Diese Kraft muss wenigstens den Werth $\frac{R(tg\, w - \mu) - r'' f'''}{\mu}$ erreichen, kann dieses Minimum zwar überschreiten, darf jedoch nicht unter demselben bleiben. Nur in dem Falle, wenn der Minimalwerth von K Null oder negativ würde, entfiele die Nothwendigkeit der in Rede stehenden Schraubenverspannung. Diess würde z. B. für $tg\, w = \mu$, also bei einem solchen Neigungswinkel für die Streben eintreten, welcher gleich dem Reibungswinkel (*arc. tang.* μ) wäre. Da nun der Coefficient der Reibung zwischen den in Betracht stehenden Hölzern gewöhnlich zwischen 0·4 und 0·5 liegen wird, und derselbe mit Rücksicht auf den Umstand, dass auch die Hängschrauben dem horizontalen Verschieben dieser Hölzer widerstehen, wohl bis auf 0·6 gesteigert werden kann, so kommt jener bedingungsweise Stellungswinkel für die Streben zwischen $26\frac{1}{2}$ und 31 Graden zu liegen.

Bei einem solchen Stellungswinkel wird eine besondere künstliche Verspannung der Hängschrauben nicht, oder doch nur insoferne nothwendig, als dem Lockerwerden der Streben vorzubeugen ist; es wird ferner die Reibung in den Berührungsflächen $\overline{no}$ allein schon genügen, um die Streben im Gleichgewichte zu erhalten, und es wird endlich erlaubt sein, die Stossfläche $f''' = 0$ zu setzen, d. i. die Querstücke (a) gar nicht in die Streckbalken einzulassen, wodurch zugleich der Vortheil erreicht werden kann, dass die Streck-

balken in dieser Beziehung nicht geschwächt werden dürfen. Die Zweckmässigkeit einer solchen Anordnung leuchtet ein, und es ist die Realisirung derselben stets zu empfehlen, wenn nicht besondere Verhältnisse eine grössere Strebenneigung bedingen. Aber auch in einem solchen Falle soll die Ueberschreitung jenes Neigungswinkels auf das kleinste zulässige Mass beschränkt werden. In der That findet man bei den ausgeführten Brücken in Amerika den Neigungswinkel w für die Streben gewöhnlich so angenommen, dass $tg\,w$ den Werth von 0·6 entweder gar nicht oder nur wenig überschreitet. So z. B. ist bei der im §. 273 angeführten Brücke über den Chikapoe auf der Connecticut'schen Eisenbahn, deren Tragwände nach dem Howe'schen Systeme hergestellt sind, $tg\,w = \frac{11}{18} = 0{\cdot}611$, daher $w = 31\frac{1}{2}^0$. Auch ist bei dieser Brücke wirklich $f''' = 0$, indem die Querstücke in die Streckbalken nicht eingelassen sind.

2. Das Minimum der Kraft K, wenn eine solche sich als nothwendig zeigt, ist mit der Lage des Brückenquerschnittes veränderlich. Sind die Tragwände in Beziehung auf die Strebenneigung und auf die Verbindung der Querstücke mit den Streckbalken durchaus gleichförmig construirt, so nimmt K nur mit der Resultirenden R, also nach den §§. 277 und 278 von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, so dass für diese letzteren jene Minimalkraft selbst am grössten, nämlich

$$K = \frac{\frac{1}{2} g\,L\,(tg\,w - \mu) - r''\,f'''}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (601)$$

wird.

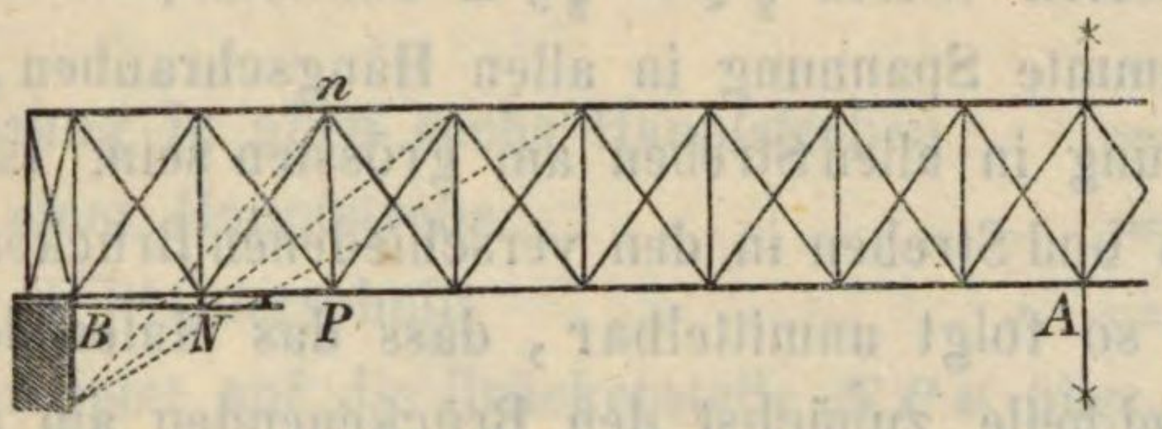
Bei der vorhin angeführten Eisenbahnbrücke würde z. B., wenn man $tg\,w = \frac{11}{18}$, $\mu = 0{\cdot}6$, $f''' = 0$, ferner nach dem §. 273 $g = 160{\cdot}3$ Zt. und $L = 27{\cdot}8$ Klftr. annimmt, die nöthige Kraft zur künstlichen Verspannung der Hängschrauben an jedem Brückenende

$$K \geqq \frac{1}{108} g\,L = 41{\cdot}2 \text{ Ztr.}$$

sein, sonach auf eine Hängschraube, deren sechs nach der Brückenbreite vorhanden sind, eine Verspannung von wenigstens 6·9 Ztr. entfallen. Obwohl nun bei dieser Brücke in der That die gefundene Gesammtverspannung von 41·2 Ztr. die grösste ist, welche mit Rücksicht auf die verschieden gelegenen Brückenquerschnitte nöthig erscheint, so folgt daraus noch nicht, dass jede einzelne Hängschraube an den Brückenenden im Vergleiche zu den übrigen die

grösste Verspannung nöthig hat. Es hängt dieses offenbar davon ab, ob die Zahl der Hängschrauben in den einzelnen Brückenquerschnitten überall dieselbe ist oder nicht. Bei der vorhin angeführten Brücke tritt z. B. der Fall ein, dass nach der Brückenbreite bloss an den beiden Enden die obige Zahl von sechs Hängschrauben vorhanden ist, während an allen übrigen Stellen nur deren vier vorkommen. Aus diesem Grunde werden einzeln genommen, nicht die den Brückenenden zunächst gelegenen, sondern die darauf folgenden Hängschrauben $\overline{Pn}$ (Fig. 322) die grösste

Fig. 322.



Verspannung benöthigen. Um diese zu finden, beachte man, dass vor Allem für die betreffende Brückenstelle $\overline{Pn}$ die massgebende Resultirende R in Gemässheit der Gleichung (592) zu bestimmen ist, und darin statt g_1, g_2, L und $x = \overline{AN}$ die entsprechenden Werthe zu substituiren sind. Im vorliegenden Falle ist $\overline{AN} = \frac{7}{8}\overline{AB} = \frac{7}{16}L$, ferner nach den Daten des §. 273 $g_1 = 40{\cdot}3$ und $g_2 = 120$, und man erhält

$$R = \left(\frac{224\,g_1 + 225\,g_2}{512}\right) L = 1956 \text{ Ztr.},$$

mit Hilfe dieses Werthes aber nach der Gleichung (600)

$$K \geqq 36{\cdot}2 \text{ Ztr.},$$

wenn man statt L, $tg\,w$, μ und f''' aufeinanderfolgend die hieher gehörigen Werthe 27·8, $\frac{11}{18}$, 0·6 und 0 substituirt. Da nun, wie oben erwähnt, an der betrachteten Brückenstelle $\overline{Pn}$ nur 4 Hängschrauben vorhanden sind, so entfällt auf jede derselben eine Verspannungskraft von wenigstens 9·05 Ztr., und diese Hängschrauben sind es, welche einzeln genommen die grösste Verspannung benöthigen.

Es ist übrigens in der Praxis nicht nothwendig, bei der künstlichen Verspannung der Hängschrauben an den verschiedenen Brückenstellen ein bestimmtes Gesetz zu befolgen, sondern es wird schon die Ueberzeugung genügen, dass diese Verspannung an keiner Brückenstelle

in einem geringeren Grade stattfindet, als die Relation (600) bedingt. Indessen darf die Verspannung nicht gar zu weit getrieben werden, um die zulässige Anspruchsnahme der Hängschrauben nicht zu überschreiten.

3. Ist man über die Grösse der Kraft K einig, so unterliegt es keinem Anstande, die Spannung in den Hängschrauben, und eben so die Pressung in den Haupt- und Gegenstreben an jeder Brückenstelle nach den Gleichungen (597), (598) und (599) zu bestimmen. Da in diesen Gleichungen die Resultirende R für die beiden Brückenenden den grössten Werth $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}yL$ annimmt, so wird auch daselbst die gesammte Spannung in allen Hängschrauben, so wie die gesammte Pressung in allen Streben am grössten sein. Ist die Zahl der Hängschrauben und Streben in den verschiedenen Brückenquerschnitten stets dieselbe, so folgt unmittelbar, dass das Materiale dieser Constructionsbestandtheile zunächst den Brückenenden am meisten beansprucht wird. Allein eben in dieser Erkenntniss findet man sich zuweilen veranlasst, die Zahl der Hängschrauben und Streben an den Brückenenden zu vermehren. Es ist sodann möglich, dass die grösste Anspruchsnahme des Materiales der in Rede stehenden Constructionstheile an einer anderen Brückenstelle eintritt. Die Bestimmung dieser Anspruchsnahme hat sodann die Anhaltspuncte zur Beurtheilung zu bieten, welche Dimensionen den Hängschrauben und welche den Streben gegeben werden sollen. Bei den letzteren muss man vorzüglich auf ihre Länge Rücksicht nehmen, weil mit derselben der Widerstand gegen das Zusammendrücken abnimmt (§. 249). Uebrigens wird man bei der Untersuchung von ausgeführten Brücken auch umgekehrt aus den bekannten Kraftwirkungen und aus den gegebenen Dimensionen der betreffenden Constructionstheile auf die thatsächliche Anspruchsnahme des Materiales schliessen können.

Ex. Bei der oben angeführten Brücke über den Chikapoe ist augenscheinlich die ungünstigste Gegend bezüglich der Anspruchsnahme der Hängschrauben und Streben die in der Fig. 322 mit NPn bezeichnete. Es ist nämlich die Zahl der Hängschrauben und Hauptstreben bei den beiden Brückenenden sechs, in dem Querschnitte $\overline{Pn}$ und an den übrigen Stellen aber nur vier. Jede Hängschraube hat einen Querschnitt von 2·236, und jede Hauptstrebe (21′ lang und $\frac{7}{9}$zöllig nach englischem Masse) einen Querschnitt von 58·57 □″.

Führt man die Berechnung zuerst für die den Brückenenden zunächst gelegenen Constructionstheile durch, und setzt man zu diesem Behufe nach der Bemerkung ad 2

$$R = \tfrac{1}{2} Q = 2228{\cdot}2 \text{ Ztr.}, K = 41{\cdot}2 \text{ Ztr.u. } \cos w = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 w}} = 0{\cdot}8533,$$

so findet man

	Ztr.
die Spannung in allen sechs Hängschrauben	= 2269·4
also in einer Hängschraube	= 378·2
und per □″ Querschnitt	= 169·1,

ferner

die Pressung in allen sechs Hauptstreben .	= 2635·4
also in einer Hauptstrebe	= 439·2
und per □″ Querschnitt	= 7·5.

Geht man jetzt auf die Brückenstelle *NPn* über, und setzt für diese nach der Bemerkung ad 2

$$R = 1956 \text{ Ztr. und } K = 36{\cdot}2 \text{ Ztr.},$$

so findet man

	Ztr.
die Spannung in allen vier Hängschrauben	= 1992 2
also in einer Hängschraube	= 498·0
und per □″ Querschnitt	= 222·8,

ferner

die Pressung in allen vier Hauptstreben . .	= 2313·5
also in einer Hauptstrebe	= 578·4
und per □″ Querschnitt	= 9·9,

folglich grösser, als zunächst den Brückenenden. Näher gegen die Mitte der Brücke wird die Anspruchsnahme wieder kleiner.

Bei den zu Grunde gelegten Verhältnissen würde sonach an der Brückenstelle *NPn* das Eisen der Hängschrauben einer Spannung von 222·8 Ztr., das Holzmateriale der Hauptstreben aber einer Pressung von 9·9 Ztr. ausgesetzt sein. Diese Anspruchsnahmen sind nicht unbedeutend, sie werden indessen nicht so hoch anzuschlagen sein, weil bei dieser Brücke ausser den Haupt- und Gegenstreben noch andere Unterstützungsstreben (siehe die punctirten Linien in der Fig. 322) vorkommen, welche die Solidität des ganzen Bauobjectes erhöhen.

Fünftes Kapitel.

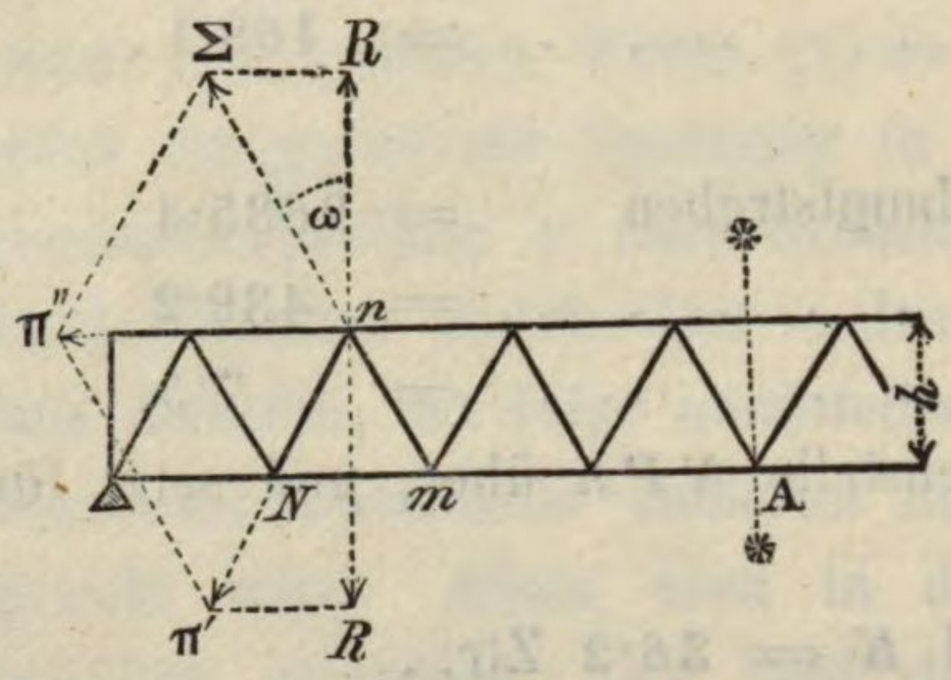
Tragwandbrücken nach dem Neville'schen Systeme.

§. 284.

Construction der Tragwände nach diesem Systeme.

Neville construirt die Tragwände aus Eisen, gibt den Streben Nn (Fig 323) und den Zugstangen mn eine gleiche Länge, so dass diese schmiedeeisernen Stäbe die Seiten von gleichschenkligen Dreiecken (Nmn) sind, und wendet der Verbindung dieser Dreiecksstangen mit den Längenschienen eine besondere Aufmerksamkeit in der Absicht zu, um die Uebertragung der an den Verbindungsstellen auf die horizontalen Längenschienen ausgeübten Pressungen einfach und sicher zu ermöglichen. Das Nähere dieser Verbindungsart wird man im §. 286 kennen lernen.

Fig. 323.



§. 285.

Spannung in den Zugstangen. Pressung auf die Streben. Eben so, wie im §. 276 erwähnt wurde, ist es auch gegenwärtig die Resultirende der einwirkenden Kräfte (R) in Beziehung auf eine Brückenstelle, welche als das Mass für diejenige Kraft zu gelten hat, womit der Abstand der oberen und unteren Streckschienen verändert werden will. Diese Distanzveränderung haben die obbezeichneten Dreiecksstäbe (Streben und Zugstangen) zu verhindern.

Setzt man in dem gleichschenkligen Dreiecke ΔNmn

die Grundlinie $\overline{Nm}$ . . . . . $= \varepsilon$,
die Höhe . . . . . $= h$,
und jede der beiden Seiten $\overline{Nn}$ und $\overline{mn}$ . . . . $= \sigma$,
ferner den Winkel, welchen diese mit der verticalen Höhe bilden . . . . . $= w$,

so hat man zunächst

$$\left.\begin{array}{l|l} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + h^2 = \sigma^2 & \sin w = \frac{\varepsilon}{2\sigma} \\ tg\, w = \frac{\varepsilon}{2h} & \text{und } \cos w = \frac{h}{\sigma} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (602).$$

Nennt man jetzt mit Bezug auf das fragliche ΔNmn die Spannung in allen nach der Brückenbreite vorhandenen Zugstangen (mn) Σ, und die Pressung auf alle Streben daselbst . . . . . Π', so ist offenbar

$$\Sigma = \Pi' = \frac{R}{\cos w} = \frac{\sigma}{h} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (603),$$

indem jede der beiden verticalen Componenten von den Kräften Σ und Π' der Resultirenden R gleich sein muss, während sich die beiden horizontalen Componenten zu derjenigen Pressung Π'' summiren, welche in die horizontalen Streckschienen zu übertragen ist. Man hat daher ausser der obigen Relation noch folgende

$$\Pi'' = (\Sigma \sin w + \Pi' \sin w) = 2 R\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{h} R \quad . \quad (604).$$

Diese findet man übrigens auch aus dem Kräftenparallelogramme, welches in der Fig. 323 mit punctirten Linien angedeutet ist. Indem man nämlich die Kräfte Σ und Π' ihren Richtungen gemäss zeichnet, und sofort auf die resultirende Kraft Π'' schliesst, erhält man die Proportion:

$$\begin{aligned} \Sigma : \Pi' : \Pi'' &= \sin(90 - w) : \sin(90 - w) : \sin 2w, \\ &= \cos w : \cos w : 2 \sin w \cos w \\ &= 1 : 1 : 2 \sin w, \end{aligned}$$

und hieraus wieder, wie unter (604),

$$\Pi'' = 2 \Sigma \sin w = 2 \Pi' \sin w = 2 R\, tg\, w.$$

Auch ist

$$\Sigma : \Pi' : \Pi'' = \overline{mn} : \overline{Nn} : \overline{Nm} = \sigma : \sigma : \varepsilon,$$

wornach die in Rede stehenden Kräfte sich so, wie die correspondirenden Dreiecksseiten verhalten.

Aus diesen Bemerkungen folgt, dass die Streben und Zugstangen an einer Brückenstelle gleiche jedoch entgegengesetzte Anspruchsnahmen erleiden, und dass diese mit der Resultirenden der einwirkenden Kräfte (R), so wie mit der Streben-

neigung zunehmen. Da nun in denjenigen Fällen, welche in der Praxis hinsichtlich der Wirkung der zufälligen Belastung auf die Constructionsstücke zwischen den Streckschienen als die ungünstigsten anzusehen sind, nach den §§. 277 und 278 die Resultirende R von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden wächst, so werden die Dreiecksstangen einer desto grösseren Anspruchsnahme ausgesetzt sein, je näher sie sich an einem der beiden Widerlager befinden. Aus diesem Grunde ist es angezeigt, den Dreiecksstangen von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden hin eine zunehmende Stärke zu geben, und überdiess dafür zu sorgen, dass das Ausbiegen derjenigen Stangen verhindert werde, welche als Streben zu dienen haben.

Für die Brückenenden selbst kann man annäherungsweise

$$R = \tfrac{1}{2} Q = \tfrac{1}{2} g L,$$

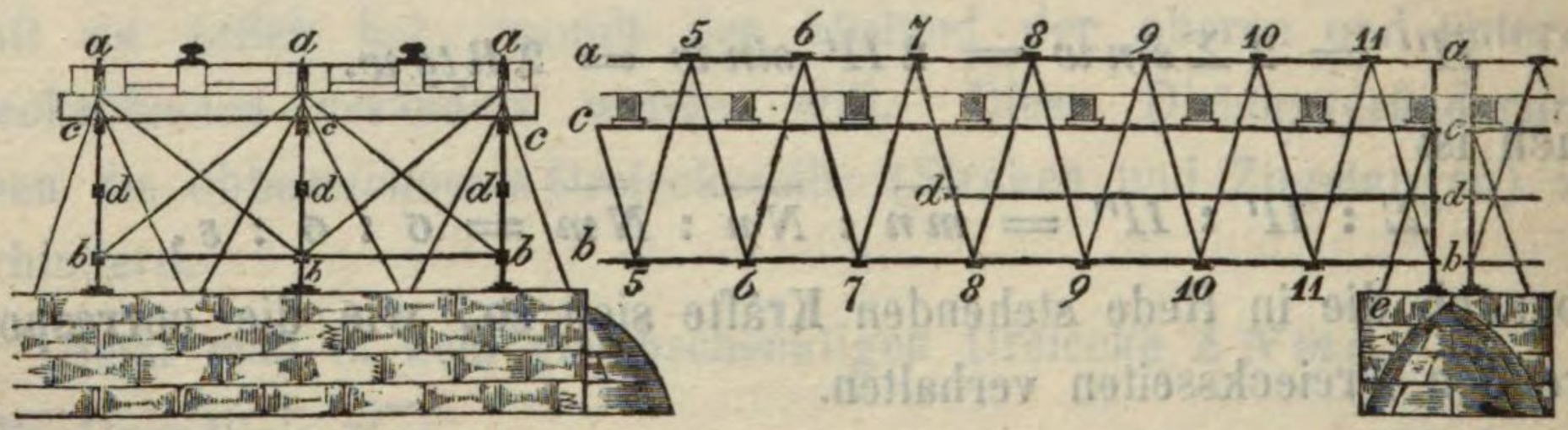
daher

$$\Sigma = \Pi' = \frac{Q}{2 \cos w} = \frac{g L}{2 \cos w} = \frac{Q \sigma}{2 h} = \frac{g L \sigma}{2 h}$$

setzen, und desshalb für die dortigen Zugstangen und Streben eine solche Stärke verlangen, dass sie die so berechnete Spannung und beziehungsweise Pressung aushalten können.

Ex. Auf der Kaiser Ferdinands-Nordbahn bei Prerau in Mähren besteht über den Betschfluss eine Ueberbrückung nach dem Neville'schen Systeme aus fünf gleichen $10\frac{1}{2}^{0}$ weiten Feldern, von welchen jedes für sich als eine besondere Brücke betrachtet werden kann, da die Tragwände der einzelnen Felder nicht zusammenhängen (Fig 324). Bei den Tragwänden dieser Brücke sind

Fig. 324.



ausser den oberen und unteren Längenschienen ($a\,a$ und $b\,b$) noch die horizontalen Schienen $c\,c$ und $d\,d$ angebracht, wovon jene unter $c\,c$ zum Auflager für die Querschwellen der Brückenbahn dienen, die anderen aber den Zweck haben, die Steifigkeit der Streben zu

vermehren. Sämmtliche Längenschienen bestehen eben so, wie die Dreiecksstangen aus Schmiedeeisen. Da die Anspruchsnahme dieser Stangen, wie man gesehen hat, von der Mitte der Tragwände gegen ihre Enden hin zunimmt, so leuchtet die Ursache ein, warum die Schienen *d d* nur in der Nähe dieser Enden angebracht worden sind, ohne sie nach der ganzen Länge durchlaufen zu lassen. Ausserdem aber sind die Streben und Zugstangen in der Strecke *d d* allmälig gegen das Widerlager hin verstärkt, wie man diess zuvor empfehlenswerth gefunden hat. Es ist nämlich die Stangenbreite in der Längenansicht einer Tragwand von der Mitte derselben bis zu

den Stangen . . . . . 8, 8 . . . . . 18‴
hingegen bei den Stangen 8, 9 und 9, 9 19,
ferner „ „ „ 9, 10 20,
„ „ „ „ 10, 10 „ 10, 11 21,
„ „ „ „ 11, 11 22,
endlich „ „ „ 11, *b* „ *a b* 24,

während die Dicke derselben nach der Richtung der Brückenbreite durchgehends 15‴ beträgt. Bei dieser Bezeichnung hat man sich vorzustellen, dass die von der Mitte ausgehenden Zugstangen mit 1, 1 numerirt, und dass in der halben Spannweite 11 aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke vorhanden sind. Somit hat an dem Tragwandende die Strebe 11, *b* einen Querschnitt von $2\frac{1}{2}$ □″, die Zugstange 11, 11 aber einen solchen von $2\frac{7}{24}$ □″. Zur Beurtheilung des Widerstandes dieser Stangen setze man den thatsächlichen Verhältnissen gemäss

die Spannweite L . . . . . $= 10\frac{1}{2}$ Klftr.,

$\frac{1}{\cos w} = \sqrt{1 + tg^2 w}$ (wegen $tg\, w = \frac{1}{3}$) . . . . $= 1{\cdot}054$,

das eigene Gewicht der Brücke per Currentklafter $g_1 = 57$ Ztr. *)
und für das einfach vorhandene Eisenbahngeleise
mit Rücksicht auf die Bemerkungen im § 263 die
grösste zufällige Belastung per Klafter Brückenlänge $g_2 = 140$ Ztr.,
so dass das totale Einheitsgewicht mit $g = (g_1 + g_2) = 197$ Ztr.
sich berechnet.

*) Das Gewicht der Eisenconstruction wird mit 21 Ztr. per Klafter Brückenlänge angegeben, und die Eisenbahnoberbaulast kann mit 36 Ztr. angenommen werden.

Hiernach wird für jedes Tragwandende

$$\Pi' = \Sigma = \frac{gL}{2\cos w} = 1090 \text{ Ztr.},$$

und es entfällt, weil nach der Brückenbreite drei Tragwände vorhanden sind, auf die Strebe 11, *b* eine Pressung von 363·3, somit auf den □″ ihres Querschnittes eine solche von 145·3 Ztr.; ferner auf die Zugstange 11, 11 eine Spannung von 363·3, also auf den □″ ihres Querschnittes eine solche von 158·5 Ztr. Was diese Spannung betrifft, so muss dieselbe unter den vorhandenen Umständen als bedeutend bezeichnet werden. Die grossen Erschütterungen, welche bei dieser verhältnissmässig leichten Brücke durch die Befahrung mit Eisenbahntrains stattfinden, und die lange Dauer, welche von einer Eisenconstruction verlangt wird, lassen jene Anspruchsnahme der Zugstangen nur dann als unbedenklich erscheinen, wenn das verwendete Schmiedeeisen von einer vorzüglichen Qualität ist. Betreffend die Pressung auf die Strebe 11, *b*, so hat man Behufs ihrer Beurtheiluug in Gemässheit des §. 249 nebst den Querschnittsdimensionen noch jene freie Länge zu berücksichtigen, wie solche in der Fig. 282 verstanden ist. In dieser Absicht bemerke man, dass im vorliegenden Falle die Strebe durch die horizontalen Längenschienen *a a*, *b b*, *cc d d* in drei gleiche 15″ lange Stücke getheilt wird, welche an den Kreuzungsstellen mit jenen Längenschienen gezwungen werden, ihre Richtung beizubehalten, so dass jedes Strebenstück die in der Fig 286 dargestellte Schlangenform anzunehmen strebt. Die freie Strebenlänge, wie sie im §. 249 verstanden ist, beträgt daher $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}''$, und sie enthält die Querschnittsdimensionen der Strebe, nämlich ihre Breite von 2″ und ihre Dicke von $1\frac{1}{4}''$ beziehungsweise $3\frac{3}{4}$ und 6mal. Insoferne daher ein Ausbiegen der Strebe, namentlich in der Richtung der Brückenbreite zu besorgen ist, hat man zur Beurtheilung der nöthigen Stärke 6 als die Verhältnisszahl anzunehmen, welche im §. 249 mit *n* bezeichnet wurde. Mit Bezug auf diesen §. folgt nunmehr, dass die grösste Pressung per □″ Querschnitt, welche die betrachtete Strebe erleiden kann, um beiläufig 14% geringer ist, als jene, welche bei einem sehr kurzen Strebenstücke, wo nämlich die erwähnte Verhältnisszahl *n* nur zwischen 1 und 2 liegen würde, gestattet wäre, und welche in der Regel der grössten zulässigen Spannung gleichgehalten werden darf. Hat

man daher gegen die oben gefundene Spannung von 158·5 Ztr. kein Bedenken, und nimmt man für $n = 1$ bis 2 die grösste zulässige Pressung eben so gross an, so findet man, dass die Strebe 11, *b* mit einer Pressung von $158{\cdot}5\ (1 - 0{\cdot}14) = 136{\cdot}3$ Ztr. per □″ Querschnitt in Anspruch zu nehmen erlaubt ist. Die wirkliche Pressung wurde mit 145·3 Ztr., also nicht viel grösser gefunden, so dass die Stärke der Strebe 11, *b* und jene der Zugstange 11, 11 so ziemlich gleiche Sicherheit gewähren.

Die Beurtheilung des Widerstandes der Streben an den Tragwandenden wird immer auf diese Weise stattfinden können, weil das gewünschte Festhalten der Streben an den Kreuzungstellen mit den Längenschienen jedenfalls in einem genügenden Grade als erreichbar anzunehmen ist, wenn man ausser der Steifigkeit der gespannten Längenschienen *b b* und *d d* auch jene der Brückenbahn, und zugleich den Umstand berücksichtigt, dass die Anspruchsnahme der Streben an den Tragwandenden durch den Widerstand der dortigen Verticalstücke *a b* zum Theile vermindert wird.

Auf ähnliche Weise kann die Anspruchsnahme der Dreiecksstangen an einer anderen Brückenstelle beurtheilt werden, nur hat man dann in der Gleichung (603) den entsprechenden Werth für *R* nach Massgabe der Relation (592) zu substituiren. Aus diesem §. geht übrigens deutlich hervor, dass mit der Zunahme der Brückenspannweite es immer schwieriger wird, die Streben in der Nähe der Widerlager genügend stark zu machen, und die Construction der Stangendreiecke in der wünschenswerthen Einfachheit durchzuführen.

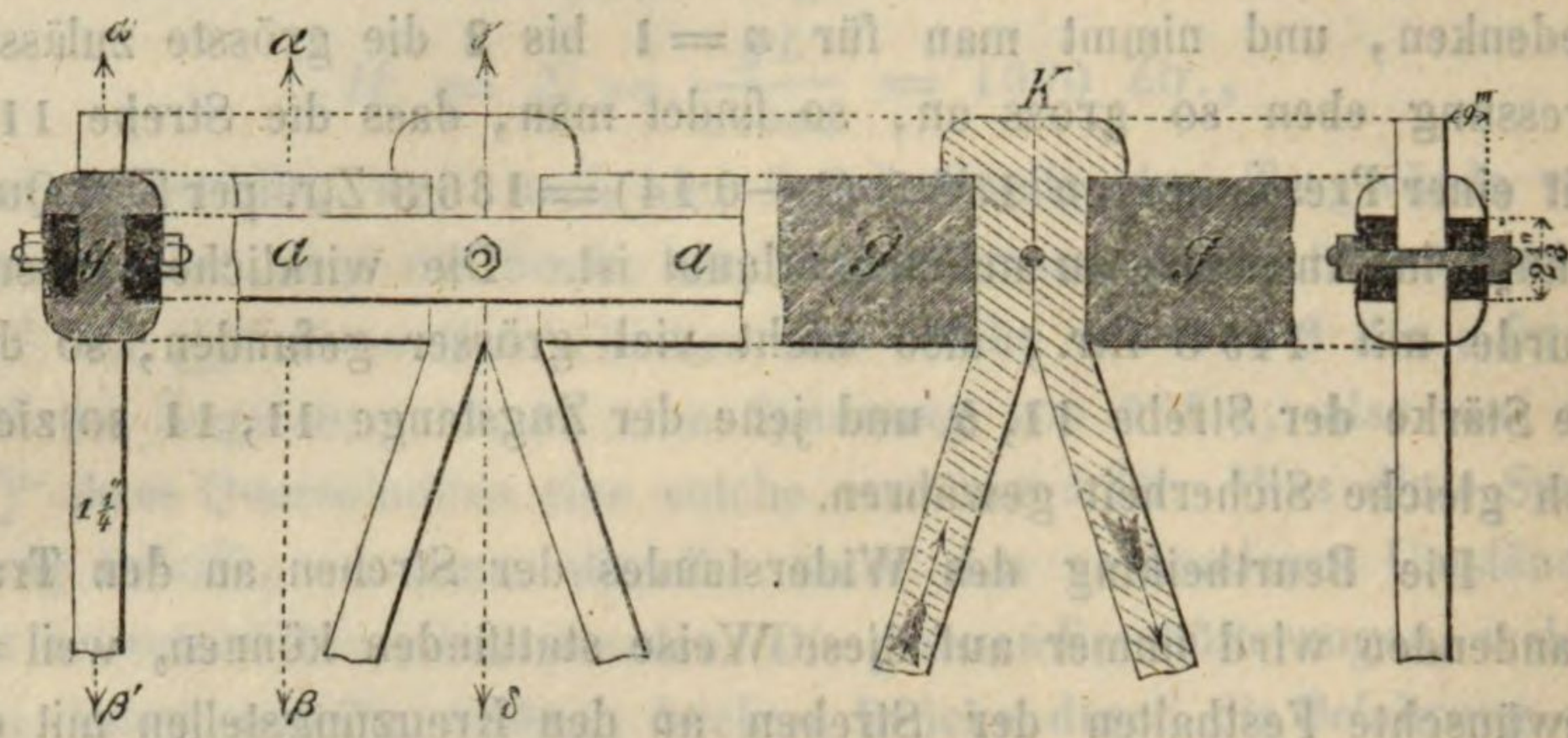
§. 286.

Verbindung der Dreiecksstangen mit den horizontalen Längenschienen. Diese Verbindung ist in den nachstehenden Figuren anschaulich gemacht. Es ist nämlich rücksichtlich einer beliebigen Verbindungsstelle *n* (Fig. 323)

in der Fig. 325 die Längenansicht,
in der Fig. 326 der Querschnitt nach $\alpha\,\beta$,
in der Fig. 327 der Querschnitt nach $\gamma\,\delta$, und
in der Fig. 328 der Längenquerschnitt nach $\alpha'\,\beta'$

dargestellt, wie sich diese Zeichnungen bei der früher als Beispiel gewählten Prerauer-Eisenbahnbrücke ergeben. Die horizontalen

Fig. 326. *Fig. 325.* *Fig. 328.* *Fig. 327.*

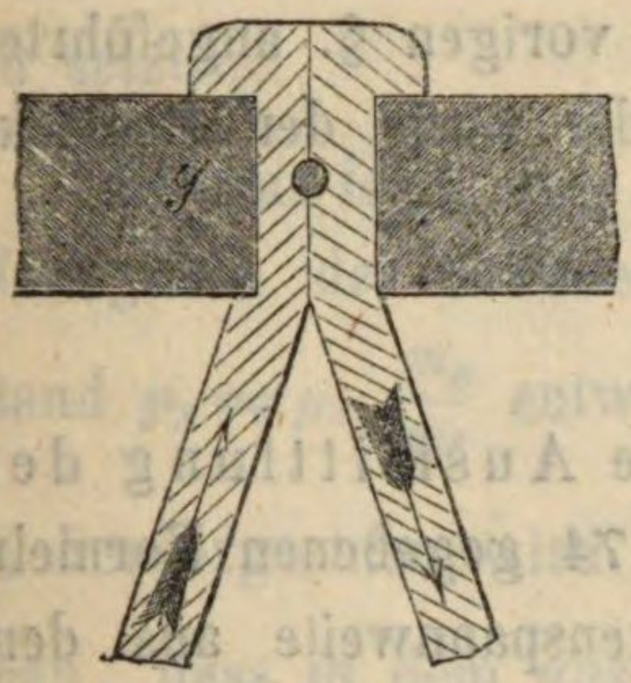


durch Schrauben verbundenen Längenschienen in den beiden Querschnitten sind schwarz angelegt. Gusseisenstücke *g*, *g* mit I förmigen Querschnitten füllen den Raum zwischen den schmiedeeisernen Längenschienen *a*, *a* derart aus, dass diese letzteren nur an ihren verticalen Aussenflächen frei bleiben, und die Köpfe *K* der Dreiecksstangen ruhen unmittelbar auf den erwähnten Gusseisenstücken auf. Bei den unteren Längenschienen *b*, *b* ist die Verbindung in ähnlicher Weise, nur in anderen Dimensionen hergestellt.

Die in Rede stehende Verbindung ist in vielen Beziehungen vortheilhaft. Indem nämlich die Dreiecksstangen den Längenschienen zufolge der Gleichung (604) die Pressung Π'' mitzutheilen haben, geschieht diess hier keineswegs directe, sondern mit Hilfe der gusseisernen Zwischenstücke, ohne dass es nöthig wäre, das Vertrauen in die Sicherheit der Construction auf Schrauben, Nieten u. s. w. setzen zu müssen. Die in den obigen Figuren ersichtliche Schraube wird augenscheinlich von jener Pressung desto weniger zu besorgen haben, je genauer die Gusseisenstücke *g*, *g* an die Dreiecksstäbe stossen, und je weniger die Längenveränderungen der schmiedeeisernen Schienen von jenen der Gusseisenstücke abweichen. Auszustellen jedoch ist bei der fraglichen Verbindung die gleiche Behandlung der Zugstangen und Streben, von welchen die letzteren in jener Art, wie sie bei der obigen Eisenbahnbrücke angebracht erscheinen, ihren Zweck als solche nicht vollkommen erfüllen können, weil die Gusseisenstücke kein eigentliches Auflager haben, und deshalb die Streben die ihnen zukommende Pressung nicht immer mit der nöthigen Sicherheit aufzunehmen im Stande sein werden. Diesem

Uebelstande kann übrigens leicht abgeholfen werden, wenn man den Gusseisenstücken ein entsprechendes Auflager auf die Streben, wie z. B. in der Fig. 329 gibt. Die Anwendung einer solchen Vorsicht ist vorzüglich an den Enden von längeren Brücken zu empfehlen.

Fig. 329.



Diese Bemerkungen stehen mit der Erfahrung in vollkommener Ueberzeugung, denn es hat sich bei der Belastung einer aus Neville'schen Tragwänden probeweise zusammengestellten Brücke in der That gezeigt, dass mehrere Strebenköpfe an den Tragwandenden oben hinausgedrückt worden sind. Nach der vorigen Bemerkung ist es vortheilhaft, die Construction der Tragwände so anzuordnen, dass die Längenveränderungen in den gusseisernen Ausfüllungsstücken in gleichem Masse, wie in den beiderseitigen schmiedeeisernen Längenschienen erfolgen. Diese Absicht wird erreicht, wenn die Dreiecksstangen keinen grösseren Neigungswinkel mit der verticalen Richtung einschliessen, als der Reibungswinkel ist, welcher der zwischen dem Schmiede- und Gusseisen erzeugten Reibung entspricht. Dann ist nämlich der Reibungswiderstand so gross, dass die Spannungen und Pressungen in den schiefen Dreiecksstangen ein Gleiten der gusseisernen Stücke auf den schmiedeeisernen Längenschienen nicht hervorbringen können. In diesem Falle muss, wenn der bezügliche Reibungscoefficient μ heisst, zunächst $tg\,w \leqq \mu$, und — weil in dem Dreiecke $N\,m\,n$ (Fig. 323) $\overline{N\,m} = 2\,h\,tg\,w$ ist — auch $N\,m \leqq 2\,\mu\,h$ sein. Für den Reibungscoefficienten μ kann man höchstens 0·25 bis 0·3 annehmen, und diese Annahme gibt die Relation $N\,m \leqq 0{\cdot}5\,h$ bis $0{\cdot}6\,h$.

Die Basis der gleichschenklichen Stangendreiecke darf daher nur 50 bis 60% ihrer Höhe betragen, wenn die alleinige Reibung zwischen den schmiedeeisernen Längenschienen und den gusseisernen Zwischenstücken das Gleiten dieser Stücke übereinander zu verhindern im Stande sein soll. Da übrigens durch das Verspannen der Schrauben die Reibung vermehrt, und ausserdem durch eine solide Verbindung der Eisenstücke an den Tragwandenden noch ein weiterer Widerstand gegen das erwähnte Gleiten hervorgerufen werden

kann, so wird auch eine gegen das vorige Resultat etwas grössere Strebenneigung immerhin ohne Nachtheil angeordnet werden dürfen.

Das practische Verfahren Neville's steht mit diesen Bemerkungen in Uebereinstimmung. Bei der im vorigen §. angeführten Eisenbahnbrücke ist z. B. $tg\, w = \frac{1}{3}$, also die Basis der Dreiecke zwei Dritttheile oder $66\frac{2}{3}\,\%$ ihrer Höhe.

§. 287.

Besondere Bemerkung über die Ausmittlung der Spannweite. Die in den §§. 273 und 274 gegebenen Formeln und Regeln für die Berechnung der Brückenspannweite aus dem Brückenquerschnitte, und umgekehrt, ferner für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den oberen und unteren Längenschienen, sind auch bei den im gegenwärtigen Kapitel behandelten Brücken nach Neville's System anzuwenden. Nur erübrigt zu untersuchen, wie der vereinte Widerstand der schmiedeeisernen Längenschienen mit den gusseisernen Ausfüllungsstücken in Rechnung genommen werden kann. Bei dem Querschnitte f'' der Längenschienen hat man nämlich auch die gusseisernen Ausfüllungsstücke zu berücksichtigen, indem sie den Widerstand jener schmiedeeisernen Längenschienen $a\,a$ unterstützen. Auf die Art und Weise dieser Berücksichtigung wird man durch folgende Betrachtung geleitet. Der gefährliche Querschnitt in jeder Tragwand liegt in der halben Brückenlänge, wenn man über derselben die grösste zufällige Belastung gleichmässig vertheilt annimmt. Daselbst wird das Gusseisen zwischen den Längenschienen $a\,a$ gezwungen, mit diesen in gleichem Masse nachzugeben, wesshalb die Längenveränderung

$$v = \frac{\text{der Pressung per } \square \text{ Querschnitt}}{\text{den Modul der Längenveränderung}}\ *)$$

in beiden Eisenstücken gleich ist. Nennt man die Pressung per $\square''$ Querschnitt in den schmiedeeisernen Längenschienen $a\,a$ . . p_s,
und in dem gusseisernen Zwischenstücke . . . . . p_g,
ferner den Modul der Längenveränderung bei dem Schmiedeeisen m_s,
bei dem Gusseisen aber . . . . . m_g,

*) Siehe die Gleichung (4).

so ist der vorigen Bemerkung gemäss

$$\frac{p_s}{m_s} = \frac{p_g}{m_g}, \text{ also } p_s : p_g = m_s : m_g$$

zu setzen.

Hieraus folgt, dass bei dem gezwungenen gleichmässigen Nachgeben des Schmiede- und Gusseisens das letztere den Widerstand $p_g = p_s \cdot \frac{m_g}{m_s}$ entwickelt, wenn in dem ersteren der Widerstand p_s hervorgerufen wird. Indem nun ungefähr $\frac{m_g}{m_s} = \frac{1}{2}$ ist, so sieht man, dass in dem gusseisernen Zwischenstücke nur circa der halbe Widerstand von demjenigen hervorgerufen wird, welcher vorhanden wäre, wenn jenes Zwischenstück gleichfalls aus Schmiedeeisen bestehen würde. Das Gusseisenstück könnte zwar für sich allein einen grösseren Widerstand leisten, jedoch ist die Hervorrufung desselben in dem vorliegenden Falle nicht zulässig, weil sonst die Zusammendrückung eine solche Grösse annähme, dass in dem gleichmässig nachgebenden Schmiedeeisen die Sicherheitsgränze überschritten würde, was selbstverständlich nicht stattfinden darf.

Gestützt auf diese Betrachtung, folgt, dass der Werth für f'' aus dem Querschnitte der schmiedeeisernen Längenschienen und aus $\frac{m_g}{m_s}$ *) Theilen des Querschnittes der gusseisernen Zwischenstücke zu bilden, und sodann die Rechnung so durchzuführen ist, wie wenn durchaus Schmiedeeisen vorhanden wäre.

Eine ähnliche Berücksichtigung bei der Ausmittlung des Querschnittes f' der unteren Längenschienen $b\,b$ hat nicht stattzufinden, weil die einzelnen Gusseisenstücke keinen unmittelbaren Zusammenhang besitzen, und desshalb die einem Zuge ausgesetzten schmiedeeisernen Schienen in ihrem Widerstande nicht unterstützen können.

Um das in diesem §. Gesagte näher anschaulich zu machen, führe man die diessfällige Untersuchung für die in den vorigen §§. erwähnte

---

*) Dieser Bruch hat, wie schon früher bemerkt, den Durchschnittswerth $\frac{1}{2}$.

Brücke (Fig. 324) durch. Zu diesem Behufe hat man Folgendes zu beachten:

1. Jede Längenschiene *a a* [siehe die Fig. 325 und 326] ist $\frac{3}{4}''$ breit und $2\frac{1}{3}''$ hoch, hat also einen Querschnitt von $1\frac{3}{4}\square''$, wesshalb alle sechs Längenschienen in den drei Tragwänden zusammen $10{\cdot}5\,\square''$ enthalten. Ein gusseisernes Ausfüllungsstück zwischen jenen Längenschienen enthält ungefähr $6\,\square''$, daher ist der Querschnitt dieser Stücke in den drei Tragwänden $18\,\square''$. Lässt man nun den oben erwähnten Werth $\frac{m_g}{m_s} = \frac{1}{2}$ gelten, so hat man

$$f'' = 10{\cdot}5 + \tfrac{18}{2} = 19{\cdot}5\,\square''.$$

2. Jede der unteren Längenschienen *b b* hat $1''$ Breite und $4''$ Höhe, welche letztere aber wegen der in der Mitte der Tragwände vorhandenen Schraubenöffnung bis auf $3\frac{1}{2}''$ herabzumindern ist, so dass für alle sechs Längenschienen in den drei Tragwänden der Querschnitt nur mit $f' = 6 \times 1 \times 3\frac{1}{2} = 21\,\square''$ eingeführt werden kann.

3. Wegen $f'' < f'$ gibt in der Formel (597) die zweite Alternative den kleineren Werth, zumal für Schmiedeeisen auch $r' < a'$ sein wird. Für den im §. 285 angenommenen Werth $g = 197$ Ztr. und für die vorhandene mittlere Tragwandhöhe $h = 54{\cdot}6''$ findet man sofort

$$L = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{r' f'' h}{g}} = 0{\cdot}87\sqrt{r'}.$$

Man kann jetzt die grösste zulässige Pressung r' des Schmiedeeisens den Umständen anpassend wählen, und die entsprechende Spannweite L berechnen, oder aber umgekehrt aus der bekannten Spannweite auf die entstehende Pressung r' schliessen. In dem behandelten Falle ist z. B. $L = 10{\cdot}5^{0}$, man schliesst daher, dass die fragliche Pressung per $\square''$ $r' = \left(\frac{10{\cdot}5}{0{\cdot}87}\right)^2 = 146$ Ztr. betragen werde, wenn die vorausgesetzte zufällige Belastung von 140 Ztr. per Klftr. Brückenlänge eintritt. Diese Pressung ist beinahe dieselbe, wie man solche bei den Streben gefunden hat.

Um endlich auch die entstehende grösste Biegung zu bestimmen, benütze man die Formel (578)

$$\Delta = 4860\,\frac{g L^4 F}{m' f' f'' h^2}.$$

Setzt man darin $g = 197$, $L = 10{\cdot}5$, $f' = 21$, $f'' = 19{\cdot}5$, $F = (f' + f'') = 40{\cdot}5$ und $h = 54{\cdot}6$, und nimmt ferner den Modul der Längenveränderung für Schmiedeeisen m' mit 210000, nämlich wegen der zusammengesetzten Construction und wegen der Schraubenöffnungen in den Längenschienen geringer, als für ununterbrochenes Schmiedeeisen an, so erhält man

$$\Delta = 1{\cdot}9 \text{ Zoll.}$$

Diese Biegung zerfällt in die zwei Theile, $\frac{g_1}{g}\Delta = 0''{\cdot}55$ und $\frac{g_2}{g}\Delta = 1''{\cdot}35$, wovon der erste Theil durch das eigene Brückengewicht, der zweite Theil aber durch die zu Grunde gelegte zufällige Belastung veranlasst wird. Hiermit stimmen die Resultate der Versuche, welche an dieser Brücke angestellt worden sind, überein.

Bei den Berechnungen in diesem §. hat man keine Rücksicht auf die vorhandenen schmiedeeisernen Längenschienen *c c* (Fig. 324) genommen. Obwohl dieselben nur zum Auflager für die Brückenbahn bestimmt sind, so tragen sie doch auch zur Stärke und Steifigkeit des Ganzen bei.

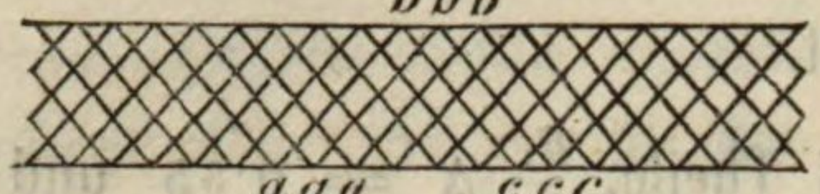
§. 288.

Ueber die practische Anwendbarkeit des Neville'schen Systemes. Die bisherige Anwendung des Neville'schen Systemes für fahrbare Brücken erstreckt sich auf Spannweiten unter 25 Klaftern. Mit Rücksicht auf die Untersuchungen in diesem Kapitel kann man zugestehen, dass für Spannweiten bis zu dieser Grösse die Anordnung von Tragwänden nach dem erwähnten Systeme mit Vortheil stattfinden kann, weil die nöthigen Vorsichten und Hilfsmittel zur Sicherung der Verbindung der einzelnen Constructionstheile und zur Erhaltung der Steifigkeit des Ganzen die charakteristische Eigenschaft dieses Systemes, nämlich die Einfachheit, noch nicht wesentlich beeinträchtigen werden. Hingegen würde bei grösseren Spannweiten das Einfache und mit ihr das Empfehlenswerthe der Construction immer mehr verloren gehen, obwohl desshalb die Unmöglichkeit ihrer Anwendung noch nicht behauptet werden könnte.

Zusatz zum 3. und 4. Kapitel.

Noch kommen diejenigen gegitterten Tragwände in Betracht, wo die Streben und Zugstangen eben so, wie bei dem Neville'schen Systeme gleichschenklige Dreiecke (*abc*) bilden, die sich aber gegenseitig durchschneiden, so dass die Streben durch die Zugstangen, und umgekehrt, in gewisse, z. B. n gleiche Stücke getheilt werden, und wo ausserdem die Verbindung der einzelnen Theile untereinander, sowohl an den Dreiecksenden *a*, *b*, *c*, als auch an den Kreuzungsstellen, mittelst Nägeln, Nieten u. s. w. zu geschehen pflegt.

Fig. 330.



Bei der Beurtheilung von Brücken mit solchen Tragwänden hat man in Uebereinstimmung mit den Untersuchungen der beiden vorgehenden Kapitel zu Werke zu gehen.

Was zuerst die Bedingungen betrifft, welche hinsichtlich der Anordnung der oberen und Streckbalken im Vergleiche zu der Brückenspannweite und der zu tragenden Gesammtlast erfüllt werden müssen, so sind dieselben jenen gleich, auf welche in den §§. 273 und 274 hingewiesen worden ist. Nur sind bei der Bestimmung der dort mit f' und f'' bezeichneten Querschnitte der Streckbalken die allfälligen Durchlochungen in Abschlag zu bringen. Betreffend die weiteren Bedingungen rücksichtlich der Anordnung der Streben und Zugstangen, so hat man offenbar zu ihrer Auffindung die Bemerkungen der §§. 282 und 285 zu combiniren, wornach als Anspruchsnahme dieser Stücke nur der n^{te} Theil der nach der Formel (603) berechneten Resultate zu gelten hat. Endlich ist noch der Bedingungen zu gedenken, welche in Absicht auf die Verbindung der einzelnen Theile unter einander und mit den oberen und unteren Längenbalken zu erfüllen sind, und die sich ebenfalls aus der Combinirung der vorerwähnten §§. ergeben. Man hat nämlich die auf die Streckbalken horizontal wirkende Pressung, welche von den Streben und Zugstangen dahin übertragen wird, nach der Formel (604) zu berechnen, davon aber wieder nur den n^{ten} Theil zu nehmen, so dass auch in dieser Hinsicht das mehrfache Kreuzen der Streben und Zugstangen einen gewissen Vortheil gewährt.

Um somit nicht in eine einseitige Anschauung des Gegenstandes zu gerathen, muss man alle angeführten Bedingungen unverrückt im Auge behalten, und dieselben gleichzeitig zu erfüllen anstreben. Mit Unrecht würde man daher auf die Stärke der Streckbalken das grösste Gewicht legen, da doch die Anordnung der Streben und Zugstangen, insbesondere aber deren Verbindung mit den Streckbalken in vielen Fällen weit wichtiger ist. Augenscheinlich ist es keine leichte Aufgabe, so bedeutende Kraftwirkungen, wie sie vorzüglich bei grösseren Brücken auftreten, mittelst Nägeln, Nieten u. s. w. mit Sicherheit und Ausdauer zu begegnen, und in dieser Schwierigkeit liegt unzweifelhaft die Ursache, dass bei Gitterbrücken dieser Art in der Regel der Erfolg hinter den Erwartungen zurückbleibt.

Sechstes Kapitel.

Eiserne Röhrenbrücken.

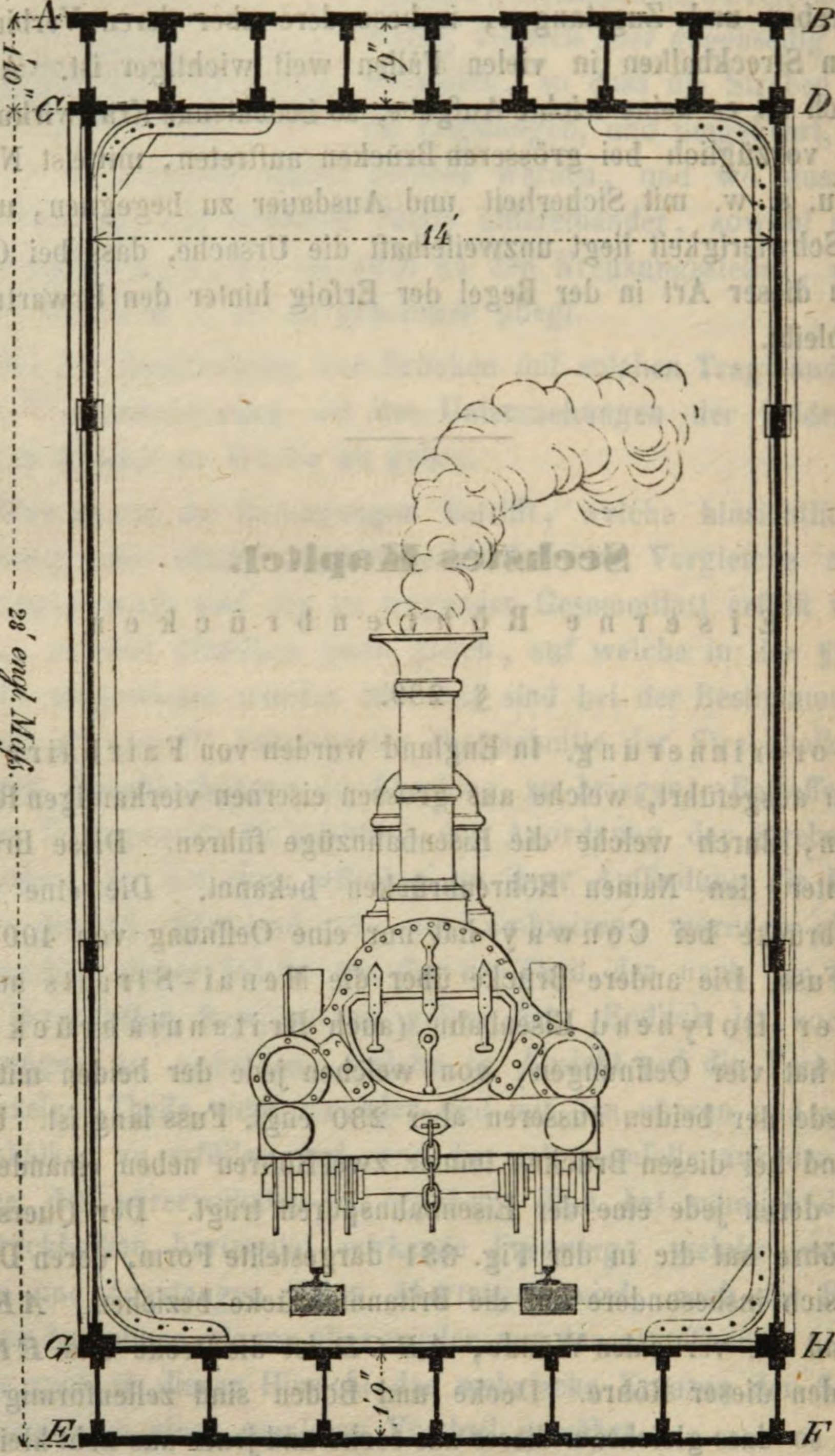
§. 289.

Vorerinnerung. In England wurden von Fairbairn zwei Brücken ausgeführt, welche aus grossen eisernen vierkantigen Röhren bestehen, durch welche die Eisenbahnzüge führen. Diese Brücken sind unter den Namen Röhrenbrücken bekannt. Die eine dieser Röhrenbrücke bei Conway hat nur eine Oeffnung von 400 englische Fuss. Die andere Brücke über die Menai-Straits auf der Chester-Holyhead Eisenbahn (auch Britanniabrücke genannt) hat vier Oeffnungen, von welchen jede der beiden mittleren 460, jede der beiden äusseren aber 230 engl. Fuss lang ist. Uebrigens sind bei diesen Brücken immer zwei Röhren neben einander gelagert, deren jede eine der Eisenbahnspuren trägt. Der Querschnitt einer Röhre hat die in der Fig. 331 dargestellte Form, deren Dimensionen sich insbesondere auf die Britanniabrücke beziehen. *AE* und *BF* sind die verticalen Wände, *ABCD* ist die Decke und *EFGH* der Boden dieser Röhre. Decke und Boden sind zellenförmig construirt, so dass gleichsam dieser aus sechs und jener aus acht kleineren

Britannia-Röhrenbrücke.

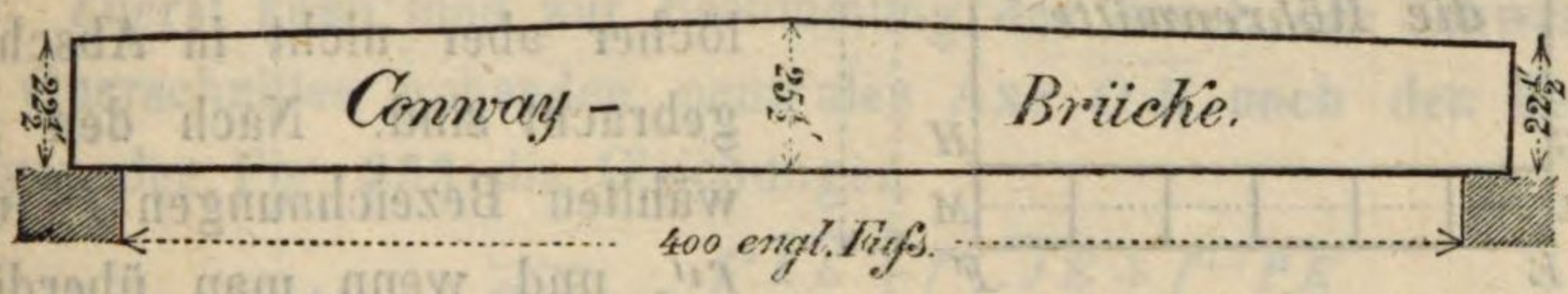
Querschnitt durch die Röhrenmitte.

Fig. 331.



Röhren besteht. Sämmtliche Wände sind aus schmiedeeisernen Platten ($\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}''$ dick) und zwar so zusammengenietet, wie diess schon mittelst der Fig. 301 und 302 anschaulich gemacht wurde. Diese zeigt nämlich die Art der Vernietung in den horizontalen Wänden des Röhrenbodens (*EF* und *GH*), jene die Art der Vernietung in den sämmtichen verticalen Zellenwänden. Im Uebrigen sind bei den beiden erwähnten Brücken die Röhren ganz gleich construirt, nur haben sie verschiedene Längen- und Höhendimensionen. Auch ist die Höhe einer und derselben Röhre nicht überall dieselbe, indem sie von den Landpfeilern gegen die Mitte der Ueberbrückung allmälig

Fig. 332.



zunimmt. So ist z. B. diese Höhenzunahme bei den beiden Röhren der Conway-Brücke in der Fig. 332 ersichtlich gemacht.

§. 290.

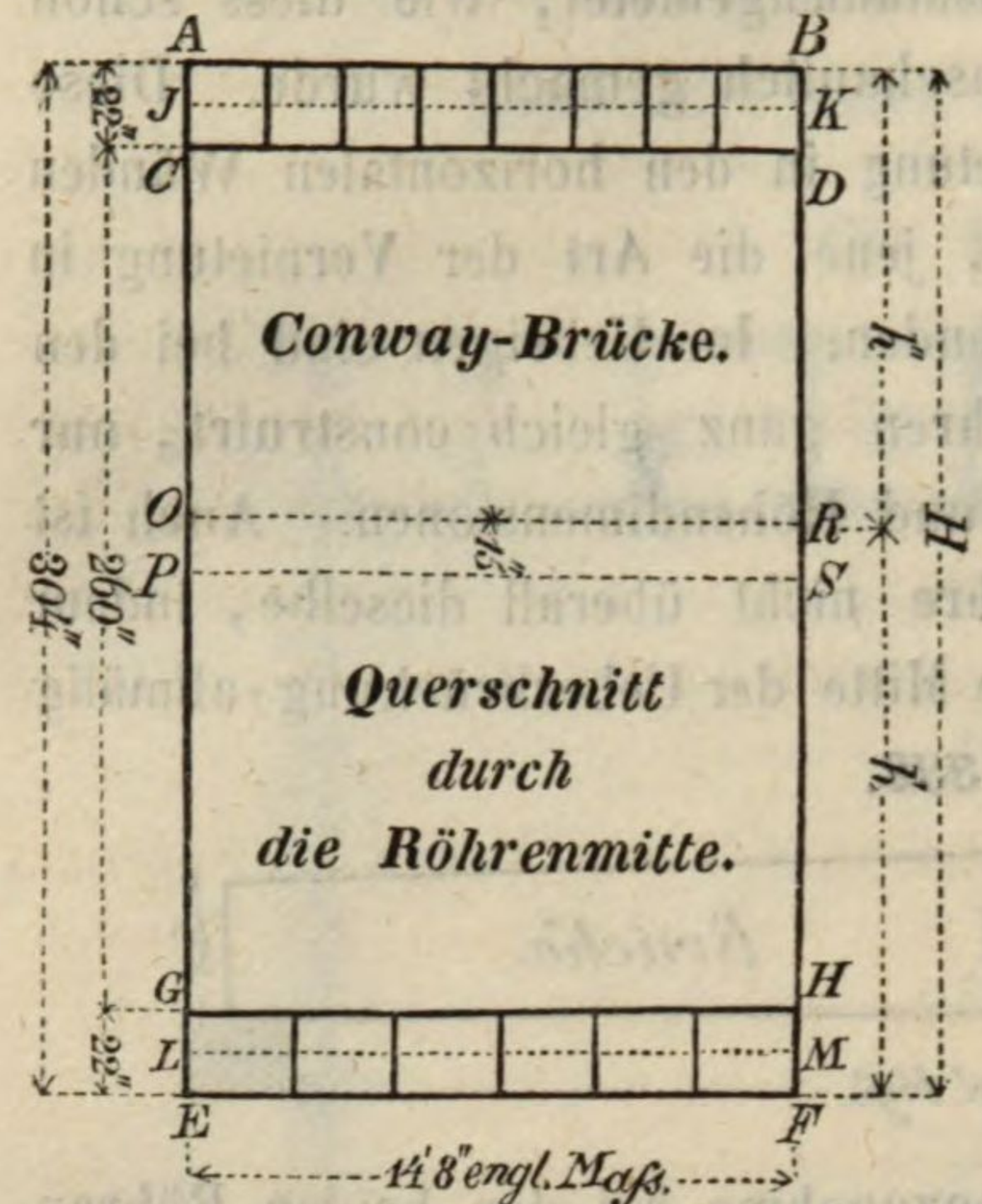
Bemerkungen über die Zweckmässigkeit des gewählten Röhrenquerschnittes. In dem §. 145 hat man die Bedingungen kennen gelernt, welche zu erfüllen sind, um in einem Trägerquerschnitte das Materiale auf die vortheilhafteste Weise in Absicht auf das Tragvermögen zu vertheilen. Hiernach ist bei der Construction eines Querschnittes für eine Röhre der oberwähnten Art dahin zu wirken:

1. Die verticalen Röhrenwände so dünn, als es die Umstände gestatten, zu machen, das übrige Materiale aber nach Zulässigkeit zur Herstellung des Bodens und der Decke der Röhre zu verwenden, und

2. Die Grösse des Bodenquerschnittes (f') zu der Grösse des Querschnittes der Decke (f'') in dasselbe Verhältniss zu bringen, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung per □″ in dieser und der grössten zulässigen Spannung per □″ in jenem stattfindet.

Wie bereits im §. 145 bemerkt wurde, ist diesen beiden Anforderungen bei den englischen Röhrenbrücken auf eine sinnreiche Art entsprochen worden. Durch versteifende Rippen wurde es vor Allem möglich gemacht, den verticalen Röhrenwänden bloss eine $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ zöllige Dicke zu geben, so dass z. B. bei der Conway-

Fig. 333.



Brücke (Fig. 333) die beiden Röhrenwände ($CG + DH$) nicht mehr als 256 engl. □″ enthalten, während der Querschnitt f' des Bodens ($GEHF$) 517, und jener der Decke ($f'' = ABCD$) sogar 670 engl. □″ hat, in welchen letzteren übrigens auch die verticalen Zellenwände, so wie die Winkeleisen und Deckplatten berücksichtigt, die Nietlöcher aber nicht in Abschlag gebracht sind. Nach den gewählten Bezeichnungen f' und f'', und wenn man überdiess den Querschnitt der beiden Verticalwände f''' nennt, ist daher bei der Conway-Brücke

$f' = 517$
$f'' = 670$
$f''' = 256$

hiernach $F = (f' + f'' + f''') = 1443$ engl. □″,

und das Verhältniss, welches zwischen f' und f'' stattfindet,

$$f' : f'' = 517 : 670 = 1 : 1{\cdot}18,$$

welches bekanntlich Fairbairn auf Grundlage der Resultate seiner Versuche zur Anwendung gebracht hat, und das auch in der That mit den theoretischen Betrachtungen (§. 145) in Uebereinstimmung steht. Dort ist zwar nur von den Querschnittstheilen f' und f'' die Rede, ohne dass, wie im vorliegenden Falle noch ein dritter Theil f''' in Betracht kommt; dieser Umstand kann aber die allgemeinen Schlussfolgerungen nicht wesentlich beirren, weil der Einfluss des Flächentheiles f''' auf das Tragmoment des Röhrenquerschnittes augenscheinlich nur ein geringfügiger ist.

§. 291.

Tragmoment des Röhrenquerschnittes. Bemerkungen über die Spannweite und die Anspruchsnahme des Materiales bei Röhrenbrücken. Die genaue Berech-

nung des Tragmomentes ist bei derartigen Querschnitten, wie solche bei den englischen Röhrenbrücken angewendet worden sind, ziemlich umständlich, sie kann indessen um so weniger einem Anstande unterliegen, als die einzelnen Bestandtheile des Querschnittes durchaus Rechtecke sind. Gleichwohl kann man auch ein einfacheres Verfahren anwenden, welches, ob zwar eine angenäherte, dennoch hinreichende Genauigkeit für die Praxis darbietet, so dass man dasselbe unbedenklich jener genauen Berechnung vorziehen wird. Aus dem Nachstehenden ist dieses angenäherte Verfahren zu entnehmen, und dasselbe zur besseren Versinnlichung sogleich auf die Conway-Brücke angewendet:

1. Zuerst kann man zur Bestimmung der durch den Schwerpunct des Querschnittes gehenden neutralen Axe $\overline{OR}$ nach den Bezeichnungen der Fig. 333 die Gleichungen

$$h' = \overline{OE} = \frac{f'\overline{LE} + f''.\overline{JE} + f'''\overline{PE}}{F}$$

und

$$h'' = \overline{AO} = (H - h')$$

benützen, wenn in der genannten Figur $\overline{JK}$ durch den Schwerpunct der Decke, $\overline{LM}$ durch jenen des Bodens, und $\overline{PS}$ durch jenen der beiden verticalen Röhrenwände, daher stets in der halben Höhe dieser Bestandtheile horizontal gezogen wird, so dass $\overline{AJ} = \overline{CJ}$, $\overline{EL} = \overline{GL}$ und $\overline{CP} = \overline{GP}$ ist.

Ex. Für die Conway-Brücke gelten die in der Fig. 333 cotirten Dimensionen, welche sich auf englisches Mass beziehen. Lässt man dieses Mass vorläufig gelten, und benützt zugleich die im vorigen §. für die Querschnittstheile angegebenen Flächenmasse, so ist für jede Röhre der in Rede stehenden Brücke in den obigen Formeln.

f'	= 517 □″	ferner $\overline{EL}$	= 11″
f''	= 670 „	$\overline{EJ}$	= 293″
f'''	= 256 „	$\overline{PE}$	= 152″
F	= 1443 „	und H	= 304″

zu setzen, und man findet hiermit

$$h' = 137'' = 0{\cdot}4507\,H$$

und $h'' = 167'' = 0{\cdot}5493\,H$.

2. Auf das Trägheitsmoment des Bodenquerschnittes f' übergehend, beachte man, dass seine dünnen Wände sowohl nach horizontaler als nach verticaler Richtung als Linien angesehen werden dürfen. Bezeichnet man von dem Querschnitt f' den Antheil, welcher in den beiden horizontalen Wänden $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ vereinigt ist, mit . . . . . f_h,
jenen aber, welcher in den sieben verticalen Zellenwänden vorhanden ist, mit . . . . . f_v,
so hat man zunächst

$$f' = f_h + f_v$$

und es ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe $\overline{LM}$
für die Fläche f_h nach der Gleichung (231)

$$= \tfrac{1}{4} f_h \,.\, \overline{GE}^2,$$

und für die Fläche f_v nach der Gleichung (51)

$$= \tfrac{1}{12} f_v \,.\, \overline{GE}^2,$$

daher für die Fläche f' die Summe beider Werthe

$$= \tfrac{1}{12}(f_v + 3f_h)\,\overline{GE}^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{f_v + 3f_h}{f_v + f_h}\right) f' \,.\, \overline{GE}^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right) f' \,.\, \overline{GE}^2,$$

wenn man der Kürze wegen $\frac{f_v}{f_h} = n$ setzt, welche Verhältnisszahl bei beiden englischen Röhrenbrücken wegen $f_h = 2 f_v$ mit $n = \frac{1}{2}$ angenommen werden kann, wodurch obiger Coefficient

$$\tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right) = \tfrac{7}{36}$$

wird.

Uebersetzt man das für den Bodenquerschnitt gefundene Trägheitsmoment auf die neutrale Axe $\overline{OR}$, und nennt das Resultat t', so ist offenbar

$$t' = \left[\tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right)\overline{GE}^2 + \overline{OL}^2\right] f',$$

also für die Conway-Brücke
wegen $n = \frac{1}{2}$, $\overline{GE} = 22''$, $\overline{OL} = 156''$ und $f' = 517\,\square''$ insbesondere,

$$t' = 12630362.$$

3. Eben so kann man für die Decke der Röhre das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{OR}$

$$t'' = (\tfrac{7}{36}\overline{AC}^2 + \overline{OJ}^2) f''$$

setzen, weil für die Vertheilung des Querschnittes in den horizontalen und verticalen Wänden der oben mit n bezeichnete Werth gleichfalls mit $\frac{1}{2}$ angenommen werden kann. Für die Conway-Brücke ist insbesondere

$$\overline{AC} = 22'', \ \overline{OJ} = 126'' \text{ und } f'' = 670\,\square'',$$

daher

$$t'' = 10699967.$$

4. Das Trägheitsmoment t''' des Querschnitts f''' der beiden Röhrenwände $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ ist in Beziehung auf die neutrale Axe $\overline{OR}$

$$t''' = (\tfrac{1}{12}\overline{CG}^2 + \overline{OP}^2) f''',$$

daher für die Conway-Brücke, wegen $\overline{CG} = 260''$, $\overline{OP} = 15''$ und $f''' = 260$, insbesondere

$$t''' = 1499725.$$

5. Das Trägheitsmoment T des ganzen Röhrenquerschnittes ist nunmehr die Summe von t', t'' und t''', daher in dem betrachteten speciellen Falle

$$T = 24835054 = 0{\cdot}1862\ FH^2.$$

Der letzte Werth $0{\cdot}1862\ FH^2$ gilt jetzt auch für Wiener Mass, indem der Coefficient 0·1862 lediglich eine absolute von der Masseinheit unabhängige Zahl vorstellt.

6. Nach den §§. 77 und 145 ist das Tragmoment des Röhrenquerschnittes

$$M = \frac{a' T}{h'} = \frac{r' T}{h''}$$

zu setzen, weil die im Allgemeinen verschiedenen Alternativwerthe für dasselbe im vorliegenden Falle, wo die Vertheilung des Materiales in den Zellen auf die vortheilhafteste Art geschehen ist, als gleich anzunehmen kommt. Auch ist bezüglich der grössten zulässigen Spannung und Pressuug (a' und r') zu bemerken, dass diese Anspruchsnahmen wegen der durch die Nieten geschwächten Wände in Gemässheit der §§. 258, 259, 260 und 261 nicht so gross, wie jene sein können, welche für homogenes Schmiedeeisen stattfinden dürften,

weil der Inhalt der obigen Querschnitte f' und f'' ohne Abzug der Nietlöcher angegeben ist, aus welchem Grunde auch die in den §§. 77 und 145 mit a und r bezeichneten Anspruchsnahmen hier in Uebereinstimmung mit dem Vorgange in jenen vier citirten §§. je mit einem Striche versehen sind.

Aus der obigen Formel findet man analog mit der Formel (250)

$$a' : r' = h' : h'',$$

und dieses Verhältniss wird mit Rücksicht auf die für h' und h'' gegebenen speciellen Werthe

$$a' : r' = 1{\cdot}22 : 1.$$

Dass das Verhältniss $h' : h''$ nicht so genau mit jenem zwischen f'' und f' übereinstimmt, wie diess in den Formeln (250) und (254) der Fall war, hat darin den Grund, weil hier die Flächentheile f' und f'' eine gewisse Höhe einnehmen, was bei dem im §. 145 untersuchten imaginären Falle nicht berücksichtigt erscheint.

Lässt man vor der Hand die eigentlichen Werthe von a' und r' unbestimmt, und setzt in die obigen Formeln für das Tragmoment die bereits für die Conway-Brücke berechneten Werthe, nämlich

$$T = 0{\cdot}1862\,FH^2,\ h' = 0{\cdot}4507\,H \text{ und } h' = 0{\cdot}5493\,H,$$

so erhält man

$$M = 0{\cdot}3390\,a'FH = 0{\cdot}4131\,r'FH.$$

Dieser auf doppelte Weise dargestellte Werth des Tragmomentes ist offenbar unabhängig von der Mass- und Gewichtseinheit, indem die vorkommenden numerischen Coefficienten absolute Zahlen sind. Man wird jetzt, um das Resultat auf Wiener Mass und Gewicht beziehen zu können, nur nöthig haben, H und F entsprechend auszudrücken. Nun ist

$F =$ 1443 engl. $=$ 1341 Wiener Quadrat-Zoll,
und $H =$ 304 „ $=$ 293 „ Current „

daher nach Benützung dieser Werthe.

$$M = 133197\,a' = 162311\,r'.$$

Um nach diesen Berechnungen gleich auf die Brückenspannweite überzugehen, beachte man, dass zu diesem Behufe für Brücken, welche bloss auf beiden Enden aufliegen, die Formel (571) $L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{g}}$

zum Anhaltspuncte zu dienen hat, in welcher M das zuvor besprochene Tragmoment und g das Totalgewicht bezeichnet, welches auf die Klafter Brückenlänge entfällt. Für die Conway-Brücke z. B. beträgt das eigene Gewicht einer Röhre per Längenklafter circa 382 Wr Ztr., und nimmt man noch die zufällige Belastung gleichfalls per Currentklafter mit 130 Ztr. an, so wird das Totalgewicht $g = (g_1 + g_2) = (382 + 130) = 512$ W. Ztr.

Nach diesen Daten findet man

$$L = \sqrt{28{\cdot}91\, a'} = \sqrt{35{\cdot}22\, r'}.$$

Ist man bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen so weit gelangt, so kann man nun entweder die grössten zulässigen Anspruchsnahmen a' und r' den Umständen entsprechend wählen, und die Spannweite L berechnen, oder aber umgekehrt die bekannte oder gewünschte Spannweite zu Grunde legen, und auf die bezüglichen Anspruchsnahmen a und r schliessen. Befolgt man für das behandelte Beispiel der Conway-Brücke das letztere Verfahren, so hat man wegen $L = 64{\cdot}28$

die grösste Spannung per □″ Querschnitt im Röhrenboden . . . . $a' = \frac{L^2}{28{\cdot}91} = 143{\cdot}0$ Wr. Ztr.

und die grösste Pressung per □″ Querschnitt in der Röhrendecke . $r' = \frac{L^2}{21{\cdot}76} = 117{\cdot}2$ Wr. Ztr.

Der □″, auf welchen sich diese Anspruchsnahmen a' und r' beziehen, ist jedoch nicht als voll, sondern als durch die Nieten geschwächt anzusehen, so dass auf den vollen Quadratzoll in dem Verhältnisse grössere Anspruchsnahmen a und r zu repartiren sind, als der Röhrenquerschnitt durch die Nietlöcher vermindert worden ist. Berücksichtigt man nach den Bemerkungen im §. 260 die solide Vernietung, wie solche bei den englischen Röhrenbrücken ausgeführt worden ist, so muss man zugeben, dass sich das Verhältniss $\frac{a'}{a}$ und $\frac{r'}{r}$ von der Einheit weniger entfernen wird, als bei den gewöhnlichen Vernietungen, so dass dieses Verhältniss ohne Besorgniss mit $\frac{5}{6}$ angenommen, und demgemäss $a = \frac{6}{5} a' = 171{\cdot}6$ u. $r = \frac{6}{5} r' = 140{\cdot}8$ Ztr. per □″ gesetzt werden kann. Diese Anspruchsnahmen erscheinen

im vorliegenden Falle für Schmiedeeisen von entsprechender Qualität um so weniger bedenklich, als das eigene Gewicht der Brückenröhren viel grösser, als die eintretende zufällige Belastung ist, daher die Erschütterungen durch die Befahrung mit Eisenbahntrains bei Weitem nicht in jenem Grade nachtheilig werden können, wie diess in der Regel bei leichten Brückenconstructionen zu besorgen ist.

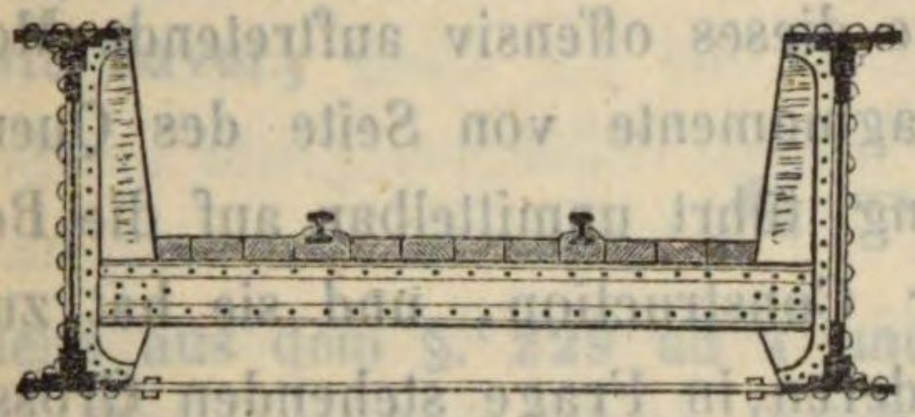
§. 292.

Steifigkeit der Röhrenbrücken. Die Steifigkeit von Röhren überhaupt ist verhältnissmässig gross, wenn man den Querschnitt in seiner Form erhalten kann. Die zu diesem Behufe nöthigen Rippen und Streben werden aber desto umfangreicher, aus je dünneren Wänden die Röhre zu bestehen hat. Es ist daher erklärlich, dass bei den englischen Röhrenbrücken der zu solchen auf die Formerhaltung abzielenden Rippen und Streben erforderliche Materialaufwand sogar bis auf den vierten Theil desjenigen gesteigert werden musste, welcher zu dem eigentlichen Röhrenquerschnitte gehört. Aber ausserdem wurden auch die Seitenwände der Röhren von der Mitte gegen die Enden derselben verstärkt. Die Dicke dieser Wände in der Mitte ist $\frac{1}{2}$, an den Enden hingegen $\frac{3}{4}$ engl. Zoll. Diese Verstärkung erscheint dadurch begründet, dass die normal auf die Längenrichtung der Röhren wirkende Resultirende der offensiven Kräfte, welche in den §§. 271, 277 und 278 mit R bezeichnet wurde, von der Mitte gegen die Enden zunimmt, dieser Anspruchsnahme aber überall in genügender Weise zu begegnen ist. Noch sind zur Vermehrung des Widerstandes in der eben erwähnten Beziehung die Röhrenenden in starke gusseiserne Rahmen eingeschoben werden, welche wesentlich zur Erhaltung der Querschnittsform beitragen.

Anmerkung. Die im vorstehenden Kapitel behandelten Brücken erfordern je nach ihrer Bestimmung für die Brückenröhren eine Höhe von mehreren Klaftern, damit durch dieselben entweder die Eisenbahnzüge oder andere Gattungen Fuhrwerke anstandslos passiren können. Eine so bedeutende Röhrenhöhe ist aber aus Rücksicht für das Tragvermögen solcher Brücken nur bei entsprechend grossen Spannweiten nothwendig, während bei kleineren Brückenlängen die Construction von Brückenröhren der bezeichneten Art offenbar in öconomischer Beziehung höchst unvortheilhaft wäre. Durch diese Betrachtung wird man unmittelbar auf solche Blechbrücken geleitet, deren Träger bloss aus verticalen Wänden bestehen, die

zur Vermehrung der Steifigkeit und des Tragvermögens mit horizontalen Flanschen begränzt werden, so dass dieselben eigentlich I förmig gebildet erscheinen (Fig. 334). Brücken dieser Art eignen sich vorzugsweise für

Fig. 334.



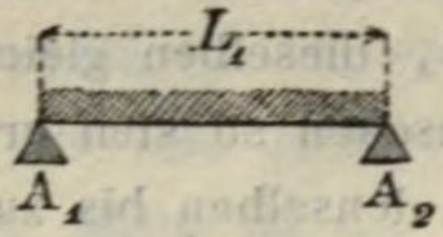
Spannweiten bis zu 20 Klaftern, und ihre Ausführbarkeit ist durch viele practische Fälle bereits sichergestellt. Bei der Ausführung derselben ist insbesondere auf die Formerhaltung des Ganzen durch die Verwendung von Flach- und Winkeleisen zur Anordnung von Verstärkungen und Rippen, so wie durch entsprechende horizontale Verspannungen oder Verstrebungen nach der Quere und nach diagonalen Richtungen, gleichzeitig aber auch auf die Erreichung des grössten Tragvermögens durch eine möglichst solide Vernietung der einzelnen Constructionstheile, und durch die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den oberen und unteren Flanschen der I förmigen Blechwände hinzuwirken, und es sind zu diesem Behufe hauptsächlich die in den §§. 148, 258, 259, 260 und 261 vorgetragenen Lehren zu berücksichtigen. Hiernach wird man die oberen und unteren Flanschen ihrer Grösse nach nur wenig von einander differiren lassen, falls man es nicht vorzuziehen findet, dieselben gleich gross anzuordnen, wie z. B. dann, wenn die oberen Flanschen so steif erhalten werden können, dass die Pressung per □″ in denselben bis zur Sicherheitsgränze in der gleichen Intension zulässig erscheint, wie die Spannung in den unteren Flanschen. Die näheren Berechnungen bei solchen Brücken können der Hauptsache nach eben so, wie bei den Röhrenbrücken vorgenommen werden.

Zusatz zum fünften Abschnitte.

In dem §. 263 wurde bei der Bildung der Formel (571) für die grösste zulässige Spannweite vorausgesetzt, dass die Brückenträger an ihren Enden einfach aufruhen, und im Weiteren diese Formel auch nur auf solche Fälle angewendet, wo die gemachte Voraussetzung zugelassen werden konnte. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn die Brückenträger über mehrere Joche oder Pfeiler so fortlaufen, dass sie nach der ganzen Brückenlänge zusammenhängen. Die im letzten Kapitel erwähnte Britannia-Röhrenbrücke ist ein Beispiel dieser Art, und sie unterscheidet sich solchergestalt von der Conway-Brücke, welche nur einfach an beiden Enden aufruht. Die Untersuchung derartiger Fälle geschieht der Wesenheit

nach eben so, wie bei dem Vorhandensein von nur einer Brückenöffnung. Man bestimme nämlich zuerst den Ort des gefährlichen Querschnittes oder die schwächste Stelle der Brückenträger, so wie die Grösse des statischen Momentes (Rz) der einwirkenden Kräfte in Bezug auf diese Stelle, und setze dieses offensiv auftretende Moment gleich dem widerstehenden Tragmomente von Seite des Querschnittes. Die so gebildete Gleichung führt unmittelbar auf die Bedingungen des Gleichgewichtes der Construction, und sie hat zur Bestimmung der einen oder der anderen in Frage stehenden Grösse zu dienen. Sind die Brückenträger prismatisch geformt und gleichmässig construirt, ferner die Brückenfelder alle gleich lang, und stellt man sich vor, dass die grösste zufällige Belastung über alle gleichförmig vertheilt sei, so finden die Resultate in den §§. 218 bis 229 Anwendung. Unter diesen besonderen Verhältnissen lassen sich folgende Betrachtungen anstellen:

Fig. 335.



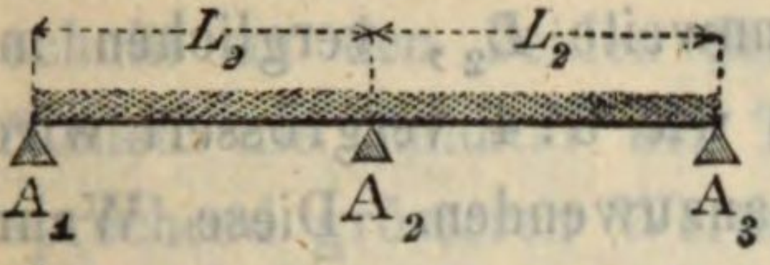
1. Vor Allem werde (Fig. 335) bei dem Vorhandensein von nur Einer Brückenöffnung die grösste zulässige Spannweite mit L_1 bezeichnet, und dieselbe in Wiener Klaftern verstanden. Es sei ferner die Totalbelastung per Klafter Brückenlänge g Ztr., und es werde der Einfachheit wegen angenommen, dass das Tragmoment M des Brückenquerschnittes dasselbe bleibe, ob in diesem letzteren die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, oder umgekehrt. Nach dem §. 81 kann diese Annahme zugelassen werden, einerseits bei jeder Materialgattung, wenn die neutrale Axe in die halbe Höhe des Querschnittes fällt, und dieser zugleich in seiner Form erhalten werden kann, andererseits bei jeder Querschnittsform, wenn die Elasticitätsgränzwerthe für die Ausdehnung und Zusammendrückung als gleich gelten können. Die besagte Annahme wird daher in der That grösstentheils gestattet sein. Sodann ist nach der Gleichung (571) für Eine Brückenöffnung (Fig. 335)

$$L_1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{g}} \text{ Wiener Klafter.}$$

Dieser Fall werde als der erste bezeichnet.

2. Sind in einem zweiten Falle zwei Brückenöffnungen von der Länge L_2 Klafter (Fig. 336) vorhanden, und kann jeder Träger von

Fig. 336.



A_1 über A_2 bis A_3 als ein Ganzes betrachtet werden, so muss das Tragvermögen eines jeden Brückenfeldes $g\,L_2$ sein. In diesem Falle wird eben so, wie zuvor,

$$L_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{g}},$$

denn aus dem §. 229 ad 1 und 2 geht hervor, dass für $L_1 = L_2$ das Tragvermögen eines Brückenfeldes in den verglichenen Fällen unverändert bleibt, wenn die Träger prismatisch geformt, und gleichförmig construirt sind. In dem betrachteten 2. Falle liegt der gefährliche Querschnitt an der Stelle A_2 (Fig. 336), wie diess aus dem §. 228 für $M_1 = M_2$ hervorgeht. Wenn aber dem Querschnitte der Träger an der schwächsten Stelle in A_2 eine Verstärkung gegeben, und dadurch die Solidität der Construction erhöhet wird, so kann allerdings eine dieser Verstärkung entsprechende Vergrösserung der Spannweite L_2 stattfinden. Die Anbringung von Füllhölzern an der erwähnten Stelle, wie z. B. bei Traggeländerbrücken, dann die Anbringung von Sattelhölzern und Streben daselbst sind einer solchen Verstärkung gleichzuhalten. Diese Bemerkung hat man zu berücksichtigen, wenn man das von mehreren Fachmännern empfohlene Verhältniss $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{4}$ in Anwendung bringen will. Auf diesen Umstand wird insbesondere darum aufmerksam gemacht, weil es eine gewöhnliche Meinung ist, dass die Anwendung des fraglichen Verhältnisses $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{4}$ schon bei den rein prismatischen Trägern ohne jener erwähnten Verstärkung zulässig wäre, indem man von der Ansicht auszugehen pflegt, dass die Sache so wie in den Fig. 337 und 338 betrachtet werden könne, wornach

Fig. 337.

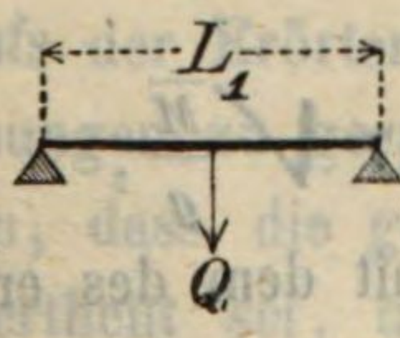
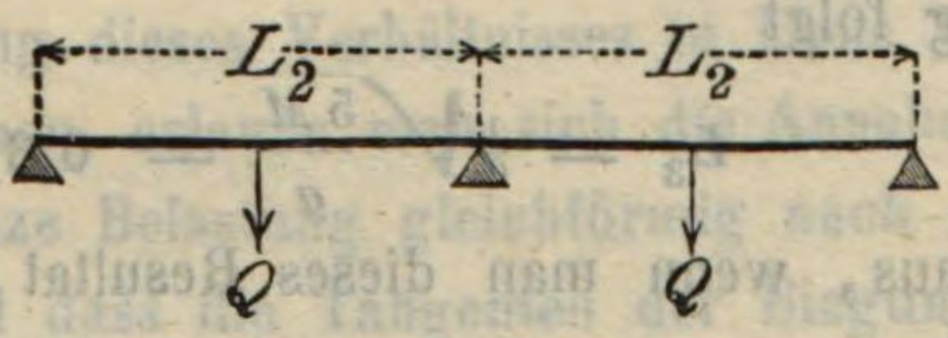


Fig. 338.

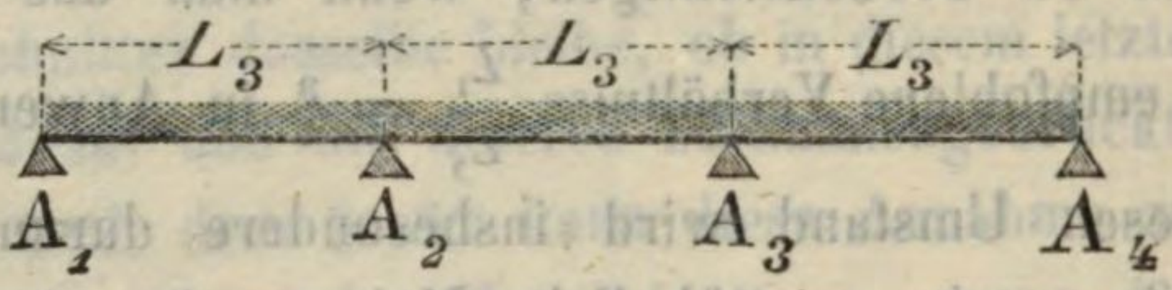


man sich nämlich erlaubt, die Belastung eines jeden Brückenfeldes stets in der Mitte desselben concentrirt anzunehmen. Bei dieser An-

nahme ist es allerdings richtig, dass die Brückenfelder ein gleiches Tragvermögen besitzen, wenn die Spannweite L_2, verglichen mit der Spannweite L_1, in dem Verhältnisse wie 3:4 vergrössert wird, ohne eine weitere Vorsichtsmasssregel anzuwenden. Diese Wahrheit bestätigen die Formeln im §. 217 ad 3, nach welchen die Tragfähigkeiten in den beiden verglichenen Fällen bei gleich grossen Brückenfeldern, wie $4 : 5\frac{1}{3} = 12 : 16 = 3 : 4$ sich verhalten, also auch umgekehrt die Brückenfelder bei dem Verhältnisse $L_1 : L_2 = 3 : 4$ ein gleiches Tragvermögen besitzen werden. Allein diese einseitige Betrachtung kann nicht massgebend für die Anwendung sein, indem der erwähnte Vortheil nicht mehr vorhanden ist, wenn die grösste zufällige Belastung die ganze Brücke bedeckt; daher man, weil diese Belastungsweise den thatsächlichen Verhältnissen gemäss als die ungünstigste zu gelten hat, zu dem auf die Fig. 335 und 336 Bezug nehmenden Resultate zurückkehren, und die Zulässigkeit der Vergrösserung der Spannweite L_2 im Vergleiche zu der Spannweite L_1 jedenfalls an die Bedingung knüpfen muss, dass die Stärke der Träger an der Stelle A_2 (Fig. 336) angemessen erhöht werde.

3. Sind in einem dritten Falle (Fig. 339) drei Brückenöffnungen, jede von der Spannweite L_3 vorhanden, und die Träger über alle

Fig. 339.



continuirlich fortlaufend, übrigens prismatisch geformt und durchaus gleichförmig construirt, so ist das Tragvermögen eines Brückenfeldes $g L_3$, und dasselbe nach dem §. 229 ad 2 dem Werthe $\frac{10 M}{72 L}$ gleich zu setzen, wenn man beachtet, dass die Spannweite L_3 gegenwärtig die Benennung Klafter hat, während sie in der betreffenden Formel im §. 229 in Zollen verstanden ist. Aus der so gebildeten Gleichung folgt

$$L_3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{5 M}{g}} = 0{\cdot}3727\sqrt{\frac{M}{g}},$$

und hieraus, wenn man dieses Resultat mit dem des ersten Falles vergleicht

$$L_1 : L_3 = \tfrac{1}{3} : \frac{\sqrt{5}}{6} = 1 : 1{\cdot}118 \text{ nahe wie } 17 : 19.$$

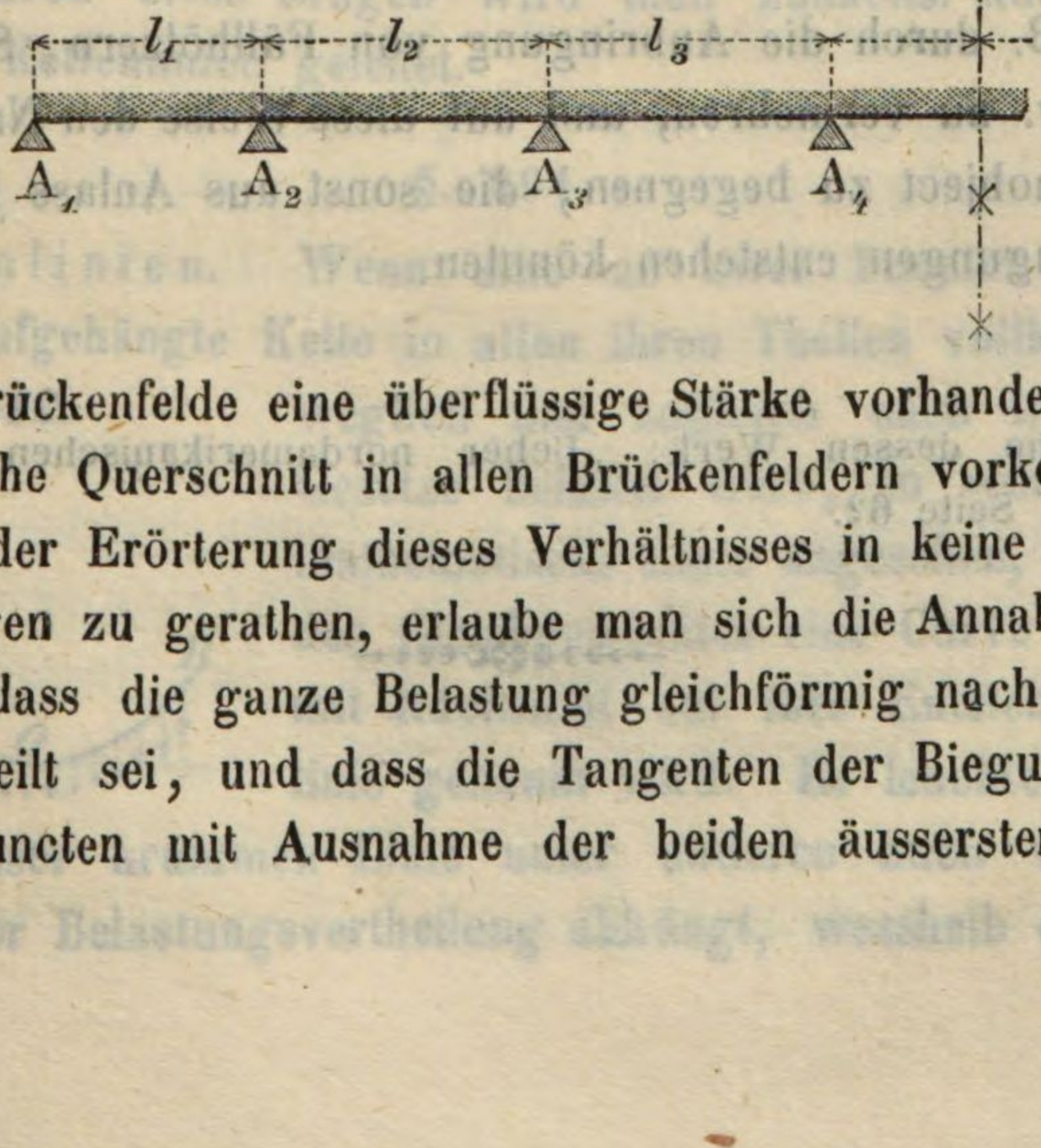
In dem betrachteten dritten Falle liegt der gefährliche Querschnitt an den beiden Stellen A_2 und A_3. Erhöht man an diesen Stellen die Solidität der Träger, so kann man für L_3 einen entsprechend grösseren Werth zulassen.

4. Sind mehr als drei Brückenfelder vorhanden, und haben von diesen alle die gleiche Spannweite, so kann man für continuirliche Träger das dem dritten Falle correspondirende Resultat beibehalten, weil sodann den Gleichungen (508) zufolge der Zustand der äusseren Brückenfelder von jenem des dritten Falles nicht wesentlich abweicht.

Die vorstehenden Betrachtungen sind unter anderen auch auf die Voraussetzung gegründet, dass in einem und demselben Falle die Brückenöffnungen alle gleich gross sein sollen. Man hat gesehen, dass unter dieser Bedingung der gefährliche Querschnitt stets bei dem zweiten und vorletzten Stützpuncte liegt, und dass die zwischen diesen liegenden Brückenfelder eine grössere Stärke, als nöthig, besitzen. Daraus schliesst man, dass es vortheilhaft sein wird, die Brückenfelder nicht gleich weit, sondern die den Landpfeilern zunächst gelegenen enger, als die übrigen anzuordnen.

Das vortheilhafteste Verhältniss, welches zwischen l_1, l_2, l_3... (Fig. 340) stattfindet, ist offenbar an die Bedingung zu knüpfen, dass

Fig. 340.



in keinem Brückenfelde eine überflüssige Stärke vorhanden sein, also der gefährliche Querschnitt in allen Brückenfeldern vorkommen soll. Um Behufs der Erörterung dieses Verhältnisses in keine weitläufigen Untersuchungen zu gerathen, erlaube man sich die Annahme der Bedingungen, dass die ganze Belastung gleichförmig nach der ganzen Länge vertheilt sei, und dass die Tangenten der Biegungscurve an allen Stützpuncten mit Ausnahme der beiden äussersten horizontal gehen.

Unter diesen Bedingungen kann man

$$M = \tfrac{1}{8} g l_1^2 = \tfrac{1}{12} g l_2^2$$

setzen, wenn man beachtet, dass in Bezug auf die schwächste Stelle A_2 nach den Relationen (353) $\frac{1}{8} g l_1^2$ das statische Moment der Belastung $g l_1$ des ersten Brückenfeldes $A_1 A_2$, ferner nach den Relationen (404) $\frac{1}{12} g l_2^2$ das statische Moment der Belastung $g l_2$ des zweiten Brückenfeldes $A_2 A_3$ vorstellt.

Daraus findet man

$$l_1 : l_2 = \sqrt{2} : \sqrt{3} = 1 : 1{\cdot}225 \text{ nahe wie } 4 : 5.$$

Selbstverständlich bezieht sich dieses Verhältniss auch auf das letzte und vorletzte Brückenfeld. Für alle übrigen Felder kann man als Spannweite ebenfalls den Werth l_2 gelten lassen.

Nach diesem Resultate kann also die Spannweite zwischen den Mittelpfeilern im Vergleiche mit den beiden äussersten Brückenöffnungen im Verhältnisse wie 5:4 vergrössert werden, was mit dem Vorschlage Ghega's*) und anderer anerkannter Fachmänner übereinstimmt.

Da übrigens die zufällige Belastung auch anders, als gleichförmig nach der ganzen Länge, z. B. nur auf einige Brückenfelder vertheilt sein kann, dadurch aber die oben angenommenen Bedingungen mehr oder weniger verändert werden, so erfordert es die Vorsicht, die Solidität der Träger an ihren Auflagestellen in angemessener Weise, z. B. durch die Anbringung von Füllhölzern, Satteln, Streben u. s. w. zu vermehren, und auf diese Weise den Nachtheilen für das Brückenobject zu begegnen, die sonst aus Anlass jener veränderten Bedingungen entstehen könnten.

---

*) Siehe dessen Werk: „Ueber nordamerikanischen Brückenbau" (Wien 1845), Seite 62.

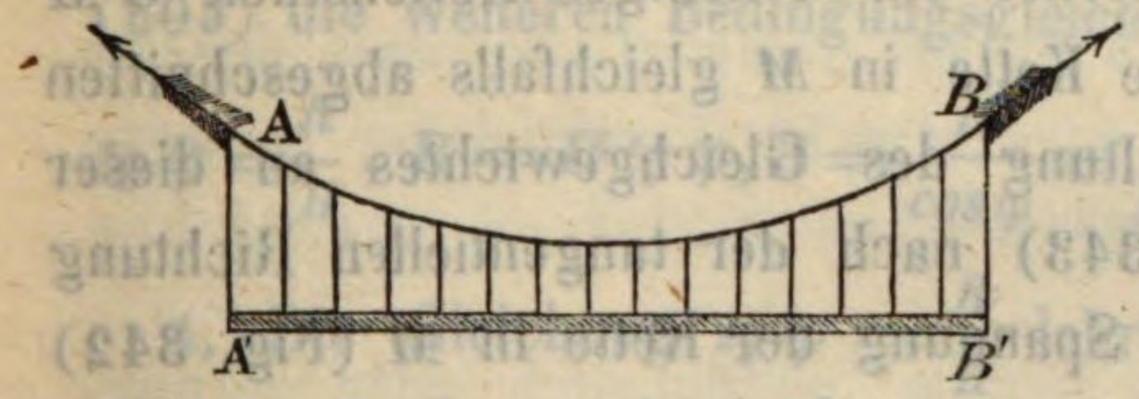
Sechster Abschnitt.

Kettenbrücken.

§. 293.

Vorerinnerung. Bei den Kettenbrücken wird die Brückenbahn $A'B'$ (Fig. 341) von eisernen Ketten AB getragen, welche desshalb auch Tragketten genannt werden. Diese Tragketten bilden das Wesentlichste einer solchen Brückenconstruction. Sie werden bloss nach der Länge gezogen. Es handelt sich vor Allem um die Aufklärung, welche krumme Linie die Tragketten zu bilden anstreben, und welche Spannungen in denselben entstehen. Durch diese Fragen wird man zunächst auf die Untersuchung der Kettenlinien geleitet.

Fig. 341.



§. 294.

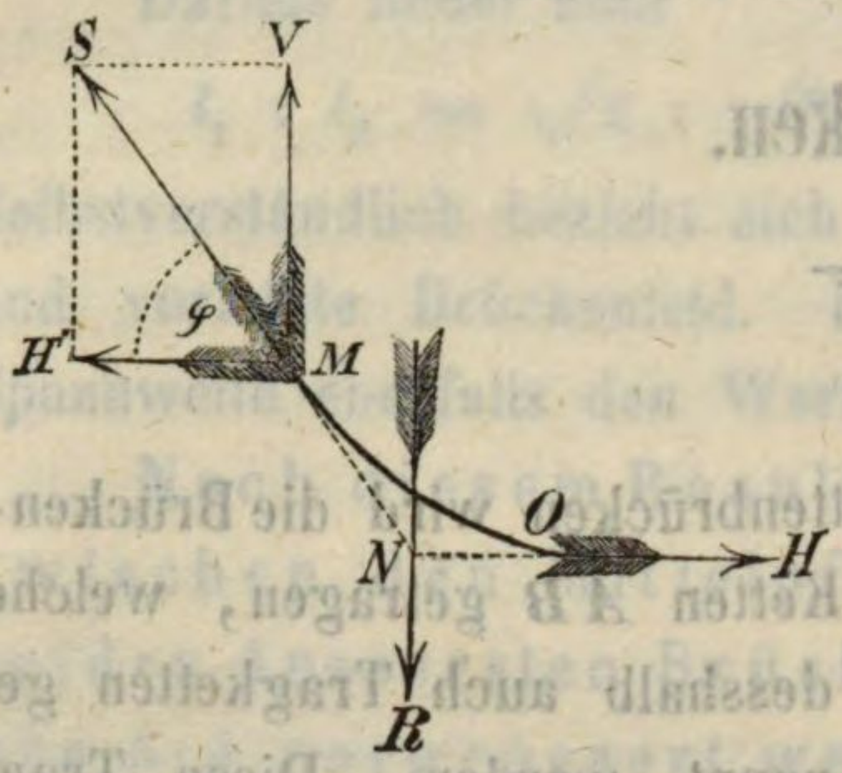
Kettenlinien. Wenn eine an zwei Puncten A und B (Fig. 342) aufgehängte Kette in allen ihren Theilen vollkommen beweglich und zugleich nach irgend einem Gesetze belastet wäre, so würde sie, als mathematische Linie angesehen, im Zustande des Gleichgewichtes eine Curve bilden, die mit Rücksicht auf ihre Entstehung Kettenlinie genannt wird. Es leuchtet ein, dass die Form dieser krummen Linie unter anderen auch von der Art und Weise der Belastungsvertheilung abhängt, wesshalb es unzählige

Fig. 342.

Arten von Kettenlinien geben kann. Wie aber auch die Belastung vertheilt sein mag, so lassen sich doch immerhin mehrere Eigenschaften auffinden, die für alle Kettenlinien giltig sind. Diese allgemeinen Eigenschaften sind im Nachstehenden angegeben:

1. Ist die Kettenlinie lang genug, so wird es einen tiefsten Punct *O* (Fig. 342) geben, wo die Tangente an die Kettenlinie horizontal geht. Dieser Punct werde der Scheitel der Kettenlinie genannt. Wäre daselbst die Kette abgeschnitten, so müsste man, um das Gleichgewicht nicht zu stören, in der horizontalen Richtung der Tangente eine Kraft *H* (Fig. 343) anbringen, und zwar eben so gross, wie die Spannung, welche die Kette an dieser Stelle erleidet. Betrachtet man ferner ein beliebiges Kettenstück $\overset{\frown}{OM}$ (Fig. 342) und stellt sich die Kette in *M* gleichfalls abgeschnitten vor, so muss man zur Erhaltung des Gleichgewichtes an dieser Stelle sich eine Kraft *S* (Fig. 343) nach der tangentiellen Richtung angebracht denken, welche der Spannung der Kette in *M* (Fig. 342) gleich ist. Den beiden Kräften *H* und *S* ist nun die Bestimmung zugewiesen, dem belasteten Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$, also dem resultirenden Gewichte *R* Gleichgewicht zu halten. Diese Resultirende *R* ist nämlich durch den Schwerpunct der ganzen Belastung zu ziehen, welche von dem Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$ getragen wird, wobei auch das eigene Gewicht der Kette zu berücksichtigen ist. Aus dieser Darstellung geht zunächst hervor, dass der Horizontalzug *H* unabhängig von der Grösse des Kettenstückes $\overset{\frown}{OM}$ ist.

Fig. 343.



2. Um die näheren Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen den erwähnten drei Kräften *H*, *S* und *R* zu finden, beachte man, dass in dem Kräftensysteme weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung stattfinden darf. Zur Hintanhaltung einer fortschreitenden Bewegung muss offenbar

$$\left.\begin{aligned} H' &= H \\ \text{und } V &= R \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (605)$$

sein, wenn H' und V die Componenten der Tangentialspannung S nach horizontaler und nach verticaler Richtung vorstellen.

Zur Verhinderung einer drehenden Bewegung müssen sich aber noch die Richtungen der drei Kräfte H, S und R in einem Puncte N durchschneiden.

Den Gleichungen (605) zufolge ist die horizontale Componente H' in der ganzen Ausdehnung der Kette eine constante Grösse, indem der ihr gleiche Werth H von der Lage des Punctes M nicht abhängt, während die verticale Componente V der gesammten von dem Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$ zu tragenden Belastung gleich, daher mit der Lage der Puncte M variabel ist.

3. Bezeichnet man den Stellungswinkel des Kettenelementes in M, welcher nämlich von den Kräften S und H' eingeschlossen wird, mit φ, so folgen aus dem von den Componenten H' und V gebildeten Kräftenparallelogramme und mit Rücksicht auf die Relationen (605) die weiteren Bedingungsgleichungen:

$$tg\,\varphi = \frac{R}{H},\ R = H\,tg\,\varphi,\ S = \frac{H}{\cos\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi} = \sqrt{R^2 + H^2}. \quad . \quad (606).$$

4. Die Gleichung $tg\,\varphi = \frac{R}{H}$ lehrt, dass $tg\,\varphi$ mit dem Gewichte R im geraden und einfachen Verhältnisse wächst, wesshalb φ immer grösser wird, je mehr M sich dem Aufhängepuncte A nähert. Jede Kettenlinie muss daher gegen den durch den Scheitel O gelegten Horizont convex geformt sein. Da ferner $\varphi = o$ nur für $R = 0$ folgt, jedenfalls aber $\varphi < 90^0$ sein muss, weil offenbar nur endliche Werthe von R und H in Betracht kommen, so schliesst man, dass eine Kettenlinie niemals eine gerade Linie bilden, aber auch niemals verticale Tangenten an ihren Aufhängepuncten besitzen kann. Im Uebrigen hängt die Gestalt der Curve von der Art und Weise der Belastung ab. Ist z. B. die Belastung nach der Länge der Kette gleichförmig vertheilt, hat somit jedes Kettenelement gleich viel zu tragen, so entsteht die gemeine Kettenlinie. Man kann übrigens auch umgekehrt jede krumme Linie, welche die zuvor angegebenen allgemeinen Eigenschaften besitzt, als eine Kettenlinie gelten lassen, und sodann auf das diessfalls nöthige Gesetz der Belastungsvertheilung schliessen. So z. B. kann ein Kreissegment, dessen Centri-

winkel 180° nicht erreicht, ganz wohl eine Kettenlinie repräsentiren.

5. Die Relationen $H = \frac{R}{tg\,\varphi}$ und $S = \frac{R}{sin\,\varphi}$ lassen entnehmen, dass die Tangentialspannung S und ihre horizontale Componente H mit der Abnahme von φ zunehmen, also desto grösser werden, je flächer das Curvenstück $\overset{\frown}{OM}$ ist. Für $\varphi = o$ würden die Kräfte H und S unendlich gross, wenn R einen von o verschiedenen endlichen Werth hat, woraus in Uebereinstimmung mit der Bemerkung ad 4 hervorgeht, dass eine Kette, wie sie auch belastet sein möge, niemals geradlinig sein kann.

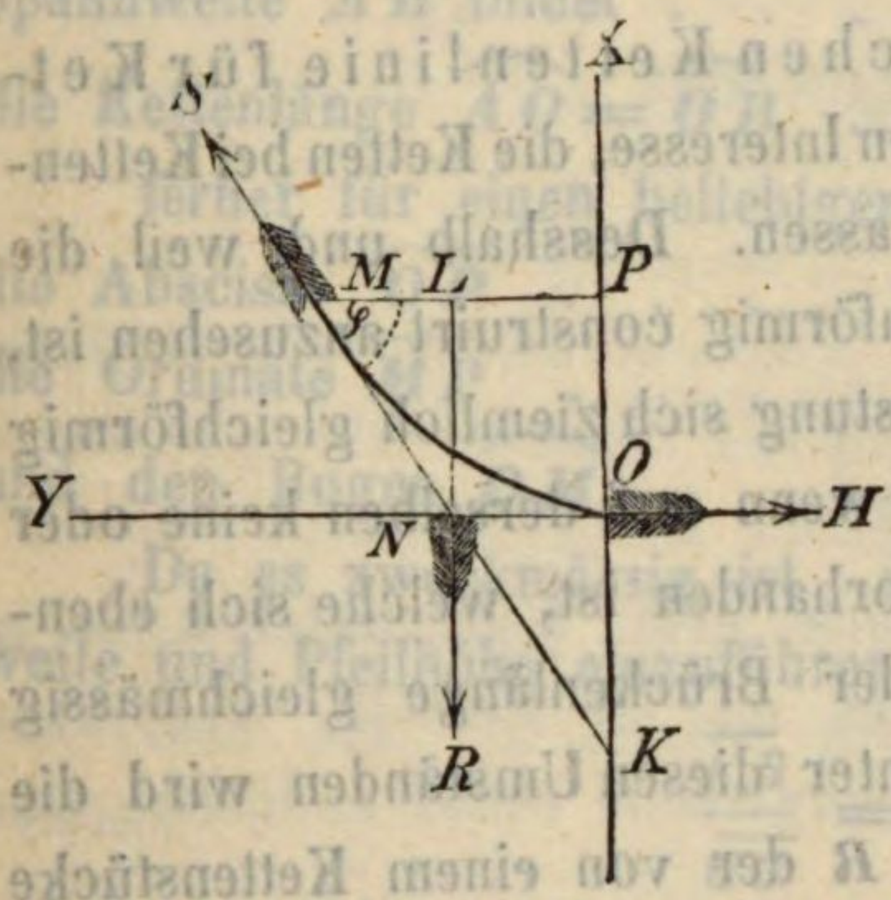
6. Die Relation $S = \frac{H}{cos\,\varphi} = \sqrt{H^2 + R^2}$ zeigt deutlich, dass die Tangentialspannung S mit dem Winkel φ, also auch mit dem Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$ zunimmt. Daraus folgt, dass die Kettenspannung S im Scheitel O am kleinsten, nämlich $S = H$ ist, und von da aus gegen die Aufhängepuncte der Kette hin zunimmt, so dass dieselbe in diesen letzteren am grössten wird. Die Kette wird daher an ihren verschiedenen Stellen ungleich gespannt.

7. Wegen $tg\,\varphi = \frac{R}{H}$ ändert sich φ continuirlich oder sprungweise, je nachdem R in der einen oder der anderen Weise mit der Lage des Punctes M veränderlich ist. Im ersten Falle kommt auf jedes Kettenelement eine unendlich kleine Belastung, und die Curve ist continuirlich, d. h. zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten schliessen einen Winkel ein, der nur unendlich wenig von 180 Graden verschieden ist. Im zweiten Falle hingegen hat man sich die sprungweise Veränderung in der Belastungsvertheilung dadurch entstanden vorzustellen, dass sich an der betreffenden Stelle M (Fig. 344) noch eine besondere Belastung Q concentrirt, so dass daselbst das Kettenelement nicht unendlich wenig, sondern eben diese Last Q zu tragen hat. In diesem Falle wird die Curve in M eine Ecke bilden, nämlich gleichsam

Fig. 344.

aus zwei Curvenstücken $\overset{\frown}{AM}$ und $\overset{\frown}{BM}$ zusammengesetzt sein, welche an ihrem Zusammenstosse M keine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Fig. 345.



8. Legt man durch den Scheitel O (Fig. 345) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, bei welchem die Abscissen vertical und die Ordinaten horizontal angenommen werden, und setzt man für einen beliebigen Punct M die Abscisse $\overline{OP} = x$ und die Ordinate $\overline{MP} = y$, so findet man mit Rücksicht auf die Bemerkung ad 2, wornach die Kräfte S, H und R sich in einem Puncte schneiden müssen, und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LMN und MPK die Proportion

$$\overline{ML} : \overline{MP} = \overline{LN} : \overline{PK},$$

oder

$$\overline{ML} : y = x : \overline{PK},$$

und hieraus die Subtangente des Punctes M

$$\overline{PK} = \frac{xy}{ML} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (607).$$

Diese Relation kann benützt werden, um die Gleichung der Kettencurve zu finden, wenn die Lage des Schwerpunctes der Belastung zwischen O und M, durch welchen die Resultirende R gezogen ist, also auch das Stück $\overline{LM}$ bekannt erscheint. In diesem Falle hat man nur für die Subtangente $\overline{PK}$ den Werth $y\,tg\,\varphi = y\frac{dx}{dy}$ zu setzen, und von der so entstehenden Diflerentialgleichung

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{xy}{ML} \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\overline{LM}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (608)$$

den entsprechenden Gebrauch zu machen. Liegt z. B. der Schwerpunct der Belastung für den Kettentheil $\overset{\frown}{OM}$ so, dass die durch denselben gezogene Resultirende R die Ordinate $\overline{PM}$ stets halbirt, ist nämlich $\overline{LM} = \frac{1}{2}y$, so erhält man nach der Gleichung (607)

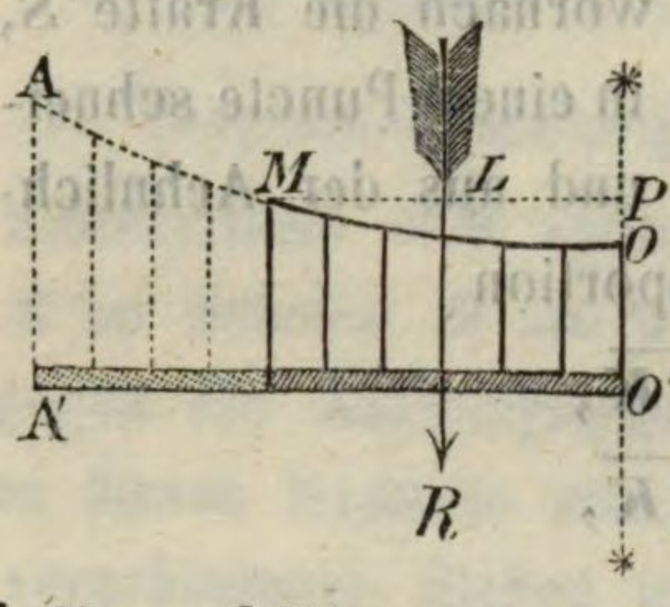
$$\overline{PK} = 2x,$$

also die Subtangente gleich der doppelten Abscisse. Diese Eigenschaft besitzt bekanntlich eine gemeine Parabel, welche ihren Scheitel in *O* hat, und deren Axe vertical liegt.

§. 295.

Zulassung der parabolischen Kettenlinie für Kettenbrücken. Es liegt im mehrseitigen Interesse, die Ketten bei Kettenbrücken nur flache Curven bilden zu lassen. Desshalb und weil die Brückenbahn nach der Länge als gleichförmig construirt anzusehen ist, wird die von der Kette zu tragende Belastung sich ziemlich gleichförmig nach horizontaler Richtung vertheilen, wenn auf derselben keine oder aber eine solche zufällige Belastung vorhanden ist, welche sich ebenfalls nach der Brückenlänge gleichmässig vertheilt. Unter diesen Umständen wird die Resultirende *R* der von einem Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$ (Fig. 346) getragenen Belastung die Ordinate $\overline{MP}$ in *L* sehr nahe halbiren, und man wird sich der Wahrheit genügend annähern, wenn man mit Rücksicht auf den vorigen §. ad 8 die von einer Brückenkette gebildete krumme Linie als eine gemeine Parabel annimmt. Man lasse daher unter den vorausgesetzten Umständen diese Annahme in der Ueberzeugung gelten, dass dadurch ein wesentlicher Irrthum nicht entstehen kann.

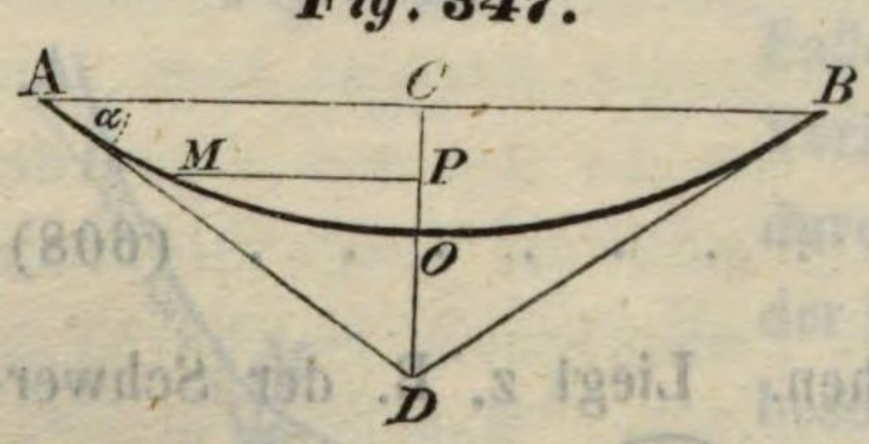
Fig. 346.



§. 296.

Spannweite, Pfeilhöhe, Aufhängewinkel und Länge der Tragketten. Es sei $\overset{\frown}{AOB}$ (Fig. 347) eine Tragkette, deren Form in Gemässheit des vorigen §. als parabolisch angenommen wird, wenn keine oder eine solche zufällige Belastung, welche sich nach der Bahnlänge gleichförmig vertheilt, vorhanden ist; auch sei die Linie $\overline{AB}$ horizontal und daher die Curve auf beiden Seiten der Parabelaxe symmetrisch gebildet; endlich stelle man sich in $\overset{\frown}{AOB}$ alle vorhandenen Ketten vereinigt vor.

Fig. 347.



Man setze die Spannweite $\overline{AB}$ . . . . . $= 2h$,
nämlich jede ihrer Hälften $\overline{AC} = \overline{BC}$ . . . . . $= h$,
die Pfeilhöhe $\overline{CO}$ . . . . . $= f$,
den Aufhängewinkel, welchen die Tangente $\overline{AD}$ mit der Spannweite $\overline{AB}$ bildet . . . . . $= \alpha$,
die Kettenlänge $\overset{\frown}{AO} = \overset{\frown}{OB}$ . . . . . $= l$,

ferner für einen beliebigen Punct M
die Abscisse $\overline{OP}$ . . . . . $= x$,
die Ordinate $\overline{MP}$ . . . . . $= y$
und den Bogen $\overset{\frown}{OM}$ . . . . . $= s$.

Da es zweckmässig ist, das Verhältniss zwischen der Spannweite und Pfeilhöhe einzuführen, so setze man dasselbe

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CO}} = \frac{2h}{f} = n,$$

und bemerke, dass in den practisch vorkommenden Fällen n in der Regel zwischen 12 und 18 liegt. Diesen Bezeichnungen gemäss ist zunächst die Gleichung der parabolischen Curve

$$y^2 = \frac{h^2}{f} x \text{ oder } \left(\frac{y}{h}\right)^2 = \frac{x}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (609),$$

und weil die Subtangente des Punctes A gleich der doppelten Pfeilhöhe, also $CD = 2f$ ist, auch

$$tg\,\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{2f}{h} = \frac{4}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (610),$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Aufhängewinkels α ist gleich dem 4fachen reciproken Werthe jener Verhältnisszahl n.

Hiernach ist insbesondere

für $n = 12$, $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 18^0\ 26'$
„ $n = 13$, $tg\,\alpha = \frac{4}{13}$ „ $\alpha = 17^0\ 6'$
„ $n = 14$, $tg\,\alpha = \frac{2}{7}$ „ $\alpha = 15^0\ 57'$
„ $n = 15$, $tg\,\alpha = \frac{4}{15}$ „ $\alpha = 14^0\ 56'$
„ $n = 16$, $tg\,\alpha = \frac{1}{4}$ „ $\alpha = 14^0\ 2'$
„ $n = 17$, $tg\,\alpha = \frac{4}{17}$ „ $\alpha = 13^0\ 14'$
„ $n = 18$, $tg\,\alpha = \frac{2}{9}$ „ $\alpha = 12^0\ 32'$ *).

*) Man bemerkt nicht ohne Interesse, dass, während n von 12 bis 18 steigt, der Winkel α (beiläufig genommen) von 18^0 bis 12^0 sich vermindert,

Um sogleich auf die Berechnung der Bogenlänge überzugehen, benütze man nach den Lehren der analytischen Geometrie für das Bogenelement ds die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

und beachte, dass nach der Gleichung (609)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2fy}{h} = \frac{4y}{nh},$$

somit

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2}$$

zu setzen ist. Das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen ist in den vorkommenden Fällen viel kleiner als die Einheit, man kann daher die Wurzelgrösse in eine convergirende Reihe auflösen, und hiernach die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dy} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{4}{n}\right)^4 \left(\frac{y}{h}\right)^4 + \tfrac{1}{16}\left(\frac{4}{n}\right)^6 \left(\frac{y}{h}\right)^6 - \ldots$$

benützen, woraus man durch Integration zwischen den Gränzen 0 und y

$$s = y\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\frac{4}{n}\right)^4 \left(\frac{y}{h}\right)^4 + \tfrac{1}{112}\left(\frac{4}{n}\right)^6 \left(\frac{y}{h}\right)^6 - \ldots\right] \quad (611)$$

findet.

Zur Bestimmung der Bogenlänge $\overset{\frown}{AO} = \overset{\frown}{BO} = l$ substituire man in dieser Relation $y = h$ und $s = l$. Dadurch erhält man

$$l = h\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\frac{4}{n}\right)^4 + \tfrac{1}{112}\left(\frac{4}{n}\right)^6 - \ldots\right] \quad . \quad . \quad (612).$$

---

wornach die Summe $(n + \alpha)$, wenn α in Gradmass verstanden ist, immer beinahe 30 wird, was zu wissen zuweilen nützlich sein kann. So z. B. springt die Unrichtigkeit sogleich in die Augen, wenn man in der deutschen Uebersetzung des Navier'schen Werkes über Kettenbrücken (übersetzt von J. G. Kutschera 1829) für das dort besprochene Project einer Kettenbrücke (Seite 194) den Winkel $\alpha = 10^0\,28'\,9''$ angegeben findet, während die Dimensionen h und f mit 75 und 10 Metern angenommen sind, so dass obige Verhältnisszahl $n = 15$ zu setzen, und hiernach augenblicklich zu erkennen ist, dass jener Winkel α nur wenige Minuten von 15 Graden abweichen kann.

So z. B. ist

$$\text{für } n=12,\ l=1{\cdot}01822\,.h$$
$$\text{„ } n=13,\ l=1{\cdot}01556\,.h$$
$$\text{„ } n=14,\ l=1{\cdot}01344\,.h$$
$$\text{„ } n=15,\ l=1{\cdot}01172\,.h$$
$$\text{„ } n=16,\ l=1{\cdot}01032\,.h$$
$$\text{„ } n=17,\ l=1{\cdot}00915\,.h$$
$$\text{„ } n=18,\ l=1{\cdot}00817\,.h$$

wornach also in den practisch vorkommenden Verhältnissen l und h nur wenig von einander abweichen.

Die Reihe (612) ist umzukehren, wenn man die Pfeilhöhe f aus der Spannweite $2h$ und aus der Kettenlänge $\overset{\frown}{AOB} = 2l$ zu bestimmen hat. In diesem Falle erhält man nach gehöriger Reduction

$$\left(\frac{4}{n}\right)^2=\left(\frac{2f}{h}\right)^2=6\left[\left(\frac{l-h}{h}\right)+\frac{9}{10}\left(\frac{l-h}{h}\right)^2-\frac{54}{175}\left(\frac{l-h}{h}\right)^3+..\right] \quad (613).$$

Kann man sich, wie in vielen Fällen der Praxis, schon mit den beiden ersten Gliedern der Reihe (612) begnügen, so hat man

$$l=h\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2\right]=h\left[1+\frac{8}{3n^2}\right]=h\left[1+\frac{2f^2}{3h^2}\right]=h+\frac{2}{3}\frac{f^2}{h},$$

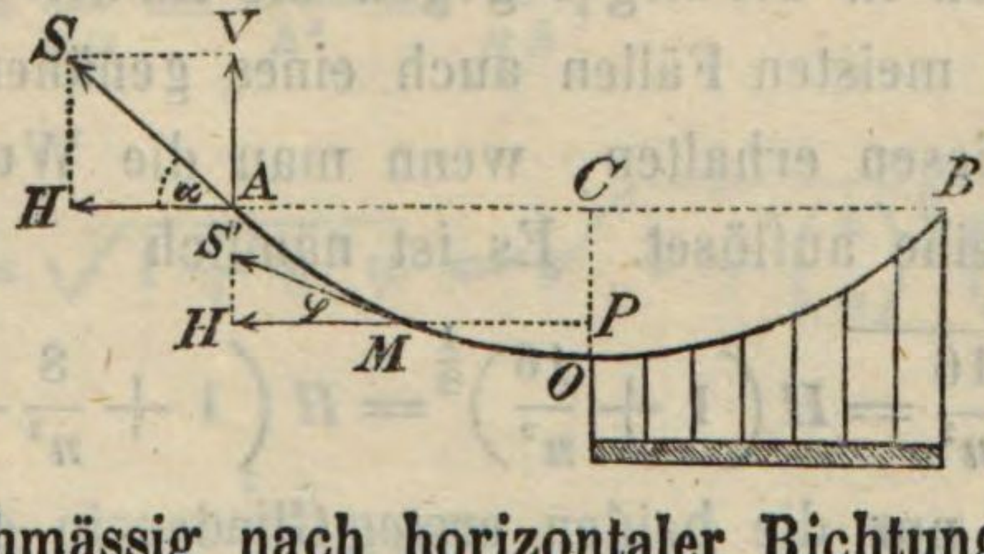
daher mit demselben Grade der Annäherung auch

$$n=4\sqrt{\frac{h}{6(l-h)}} \text{ und } f=\sqrt{\frac{3}{2}h(l-h)}.$$

§. 297.

Spannungen in der parabolischen Kettenlinie. (Fig. 348.) Es sei die ganze von der Kette zu tragende Belastung,

Fig. 348.



welche sich gleichmässig nach horizontaler Richtung vertheilt $= P$,
die Tangentialspannung in dem Aufhängepuncte A . . . . $= S$,

ihre horizontale Componente . . . . . $= H$,
ihre verticale Componente aber . . . . . $= V$,
und man behalte die Bezeichnungen des vorigen §., so wie die Vorstellung bei, dass in $\overset{\frown}{AOB}$ alle Ketten vereinigt seien.

Sowohl der Aufhängepunct, als auch die halbe Kette $\overset{\frown}{AO}$ haben die Hälfte des Gewichtes P zu tragen, es ist daher nach den Gleichungen (605) und (606) $V = \frac{1}{2}P = H\,tg\,\alpha$, woraus

$$H = \frac{P}{2\,tg\,\alpha} = \frac{n}{8}P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (614)$$

folgt, wenn unter Einem für $tg\,\alpha$ der Werth (610) substituirt wird.

Die Horizontalkraft H ist daher gleich dem Totalgewichte P, multiplicirt mit dem achten Theile des Verhältnisses n, welches zwischen der Spannweite, und der Pfeilhöhe stattfindet. Innerhalb der gewöhnlichen practischen Gränzen für Kettenbrücken ($n = 12$ bis 18) wird demnach H von $1\frac{1}{2}P$ bis $2\frac{1}{4}P$ variiren.

Was die Tangentialkraft S betrifft, so ist dieselbe

$$S = \frac{H}{cos\,\alpha} = \frac{P}{2\,sin\,\alpha} = \sqrt{H^2 + \tfrac{1}{4}P^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}P\sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}} \quad . \quad . \quad (615).$$

So z. B. wird

für $n = 12$, $S = 1{\cdot}5811\,P$
„ $n = 16$, $S = 2{\cdot}0616\,P$
„ $n = 18$, $S = 2{\cdot}3049\,P$.

Da in der Formel $S = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}}$ das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen in der Regel gegen die Einheit klein ist, so kann man sich in den meisten Fällen auch eines genäherten Werthes für S bedienen, und diesen erhalten, wenn man die Wurzelgrösse in eine convergirende Reihe auflöset. Es ist nämlich

$$S = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}} = H\left(1 + \frac{16}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = H\left(1 + \frac{8}{n^2} - \frac{32}{n^4} + \frac{256}{n^6} - ..\right)$$

somit, wenn man nur die beiden ersten Glieder in den Klammern beibehält, annäherungsweise

$$S = H\left(1 + \frac{8}{n^2}\right) = \frac{Pn}{8}\left(1 + \frac{8}{n^2}\right) = \frac{Pn}{8} + \frac{P}{n} = H + \frac{P}{n},$$

so wie

$$(S - H) = \frac{P}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (616).$$

Es ist also die Differenz zwischen dem Tangentialzuge am Aufhängepuncte und seiner horizontalen Componenten sehr nahe dem n^{ten} Theile der Gesammtbelastung P gleich.

So z. B. hat man für $n = 18$ zuerst

$$H = \frac{n}{8} P = 2{\cdot}25\, P, \text{ sodann aber}$$

$$S = H + \frac{1}{n} P = 2{\cdot}25\, P + \tfrac{1}{18} P = 2{\cdot}3055\, P,$$

welcher Werth sich von dem der Relation (615) entsprechenden in der That nicht wesentlich unterscheidet. Die Formel (616) ist insbesondere wegen ihrer Einfachheit zum practischen Gebrauche geeignet.

Der Tangentialzug S' an einer anderen Stelle M der Curve, für welche die Coordinaten $\overline{OP} = x$ und $\overline{MP} = y$ sind, ist, wie bereits bekannt, kleiner, als die Tangentialspannung S an dem Aufhängepuncte A. In der That hat man wegen der Gleichheit der horizontalen Componenten jener Tangentialspannungen in A und M

$$S = \frac{H}{\cos\alpha},\ S' = \frac{H}{\cos\varphi},\ S' : S = \frac{1}{\cos\varphi} : \frac{1}{\cos\alpha},$$

sonach

$$S' = \frac{S\cos\alpha}{\cos\varphi}.$$

Es ist aber

$$tg\,\varphi = \frac{dx}{dy} = \frac{2fy}{h^2} = \frac{4y}{nh},$$

folglich

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2},$$

und

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{n}\right)^2}},$$

daher

$$S' = H\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2} = S\sqrt{\frac{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}} \quad . \quad (617),$$

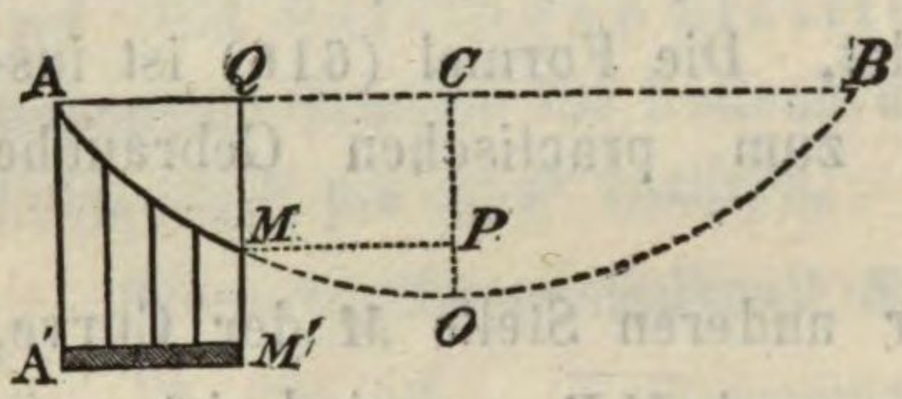
also für $y < h$ auch $S' < S$.

Aus der Relation (617) erhält man übrigens ganz ordnungsmässig für $y = o$, d. i. am Scheitel O, $S' = H$, und für $y = h$, d. i. am Aufhängepuncte A, $S' = S$.

§. 298.

Von einem Stücke der parabolischen Kettenlinie aus gewissen Daten auf die Lage ihres Scheitels zu schliessen. Es sei (Fig. 349) der eine Aufhängepunct der parabolischen Kettenlinie in . . . . A, und für den Endpunct des gegebenen Stückes $\overset{\frown}{AM}$ . . $\overline{AQ} = c$ u. $\overline{MQ} = d$, es sei ferner der Verticaldruck in A . . . . . $= V$, und der auf die Längeneinheit der Spannweite entfallende Belastungsantheil . . . . . $= p$.

Fig. 349.



Man suche jetzt aus diesen Daten die Lage des Scheitels O der Kettenlinie, nämlich die unbekannten Grössen $\overline{AC} = h$ und $\overline{CO} = f$.

Das Gewicht, welches zu der halben Kette $\overset{\frown}{AO}$ gehört, ist offenbar ph, und dem verticalen Drucke V gleich. Aus der hiernach gebildeten Gleichung folgt zunächst

$$h = \frac{V}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (618),$$

d. h. die halbe Spannweite ist gleich dem verticalen Drucke an dem Aufhängepuncte, dividirt durch die Belastung per Längeneinheit der Spannweite.

Die Pfeilhöhe $\overline{CO} = f$ findet man jetzt in Berücksichtigung der Relation (609) aus der Gleichung

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}},$$

welche wegen $\overline{AC} = h$, $\overline{MP} = (h-c)$, $\overline{OC} = f$ und $\overline{OP} = (f-d)$ übergeht in:

$$\left(\frac{h-c}{h}\right)^2 = \left(\frac{f-d}{f}\right), \text{ oder in } \left(1-\frac{c}{h}\right)^2 = \left(1-\frac{d}{f}\right),$$

woraus folgt

$$f = \frac{dh^2}{(2ch-c^2)} = \frac{d}{(2v-v^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (619),$$

wenn der Kürze wegen das bereits bekannte Verhältniss $\frac{c}{h} = v$ gesetzt wird.

Von diesen Formeln kann man erforderlichen Falles Gebrauch machen, wie man diess aus dem §. 301 ersehen wird.

§. 299.

Wirkung einer zufälligen Belastung bei Kettenbrücken auf die Form der Ketten und auf die Spannungen in denselben. Man hat gesehen, dass bei Kettenbrücken die von den Ketten gebildeten Curven als parabolisch gelten können, wenn auf der Brückenbahn keine zufällige Belastung vorhanden ist. Unter dieser Voraussetzung ist man nach den §§. 296 und 297 im Stande, die Form der Ketten, so wie auch die in denselben entstehenden Spannungen zu bestimmen, indem nämlich die Belastung P im §. 297 das ganze eigene Gewicht der Brücke zwischen den Aufhängepuncten A und B vorstellt. Es entsteht nunmehr die Frage, welche Veränderungen in der Form und in der Anspruchsnahme der Ketten durch eine zufällige Belastung hervorgebracht werden. Zu ihrer Beantwortung hat man offenbar auf die verschiedene Art und Weise, in welcher sich die zufällige Belastung über die Brückenbahn vertheilen kann, Rücksicht zu nehmen. Man wird in dieser Beziehung die wesentlichsten Fälle untersuchen.

§. 300.

Gleichförmig vertheilte Belastung nach der ganzen Bahnlänge. Bei dem Stattfinden einer solchen Belastung kann nach Inhalt des §. 295 die parabolische Kettenlinie für die unbelastete Brücke unverändert beibehalten werden, wenn man von der Dehnbarkeit der Ketten absieht, so dass man sodann die Grössen h, f, n, α und l als constant zu betrachten, und nur die Ver-

grösserung der Kettenspannungen zu bestimmen hat. Es leuchtet ein, dass diese letzteren genau so, wie die von den Ketten zu tragende Belastung zunehmen müssen. Stellt man sich nämlich sämmtliche Ketten vereinigt vor, und heisst man das eigene Brückengewicht P, die an jedem der beiden Aufhängepuncte entstehende Tangentialspannung . . . . . S,
ferner deren horizontale Componente . . . . . H,
und bezeichnet man die zufällige Belastung mit . . . . . ΔP,
so wie die dadurch in den Kräften S und H hervorgerufene Vergrösserung beziehungsweise mit . . . . . ΔS und ΔH,
so ist unter den oben angenommenen Umständen nach den Relationen (614) und (615)

$$H = \frac{n}{8} P \quad \text{und} \quad S = \frac{P}{2 \sin \alpha},$$

daher auch

$$\Delta H = \frac{n}{8} \Delta P \quad \text{und} \quad \Delta S = \frac{\Delta P}{2 \sin \alpha},$$

und durch Vergleichung

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta P}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (620).$$

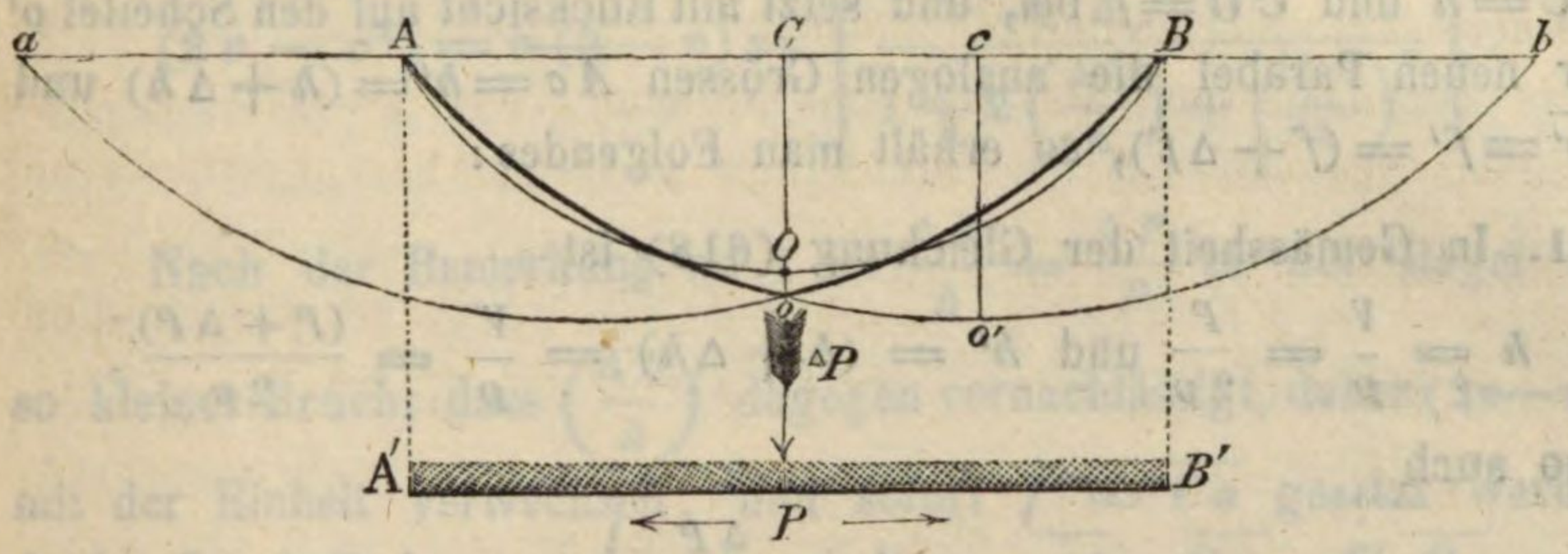
Da die grösste Veränderung in den Kettenspannungen mit der grössten zufälligen Belastung correspondirt, so ist der Fall des Eintrittes dieser letzteren in der betrachteten Hinsicht als der ungünstigste anzusehen. Es wird allgemein angenommen, dass bei gewöhnlichen Strassenbrücken durch Menschengedränge die grösste zufällige Belastung auf der Brückenbahn entsteht, und dass in diesem ungünstigsten Falle 25 bis 30 Zentner auf die $\square^0$ Bahnfläche als zufällige Belastung zu rechnen sind. (Siehe §. 263.) Man wird in der Folge sehen, dass das eigene Gewicht der Brücke in der Regel viel geringer ist, als die grösste zufällige Belastung, und dass diese von jenem nur bei sehr grossen Brückenspannweiten erreicht werden kann. Es wird daher mit Rücksicht auf die grösste zufällige Belastung in der Regel $\Delta P > P$, daher auch $\Delta H > H$ und $\Delta S > S$ sein, woraus auf die bedeutende Vermehrung in den Kettenspannungen zu schliessen ist, welche möglicher Weise stattfinden kann.

§. 301.

Zufällige Belastung in der Mitte der Bahn (Fig. 350).

Wenn in der Mitte der Brückenbahn eine zufällige Belastung sich

Fig. 350.



concentrirt, welche also gleichsam den Angriffspunct im Kettenscheitel hat, so wird sich letzterer senken und dadurch die ganze Form der Kettenlinie verändern. Um diese Veränderung kennen zu lernen, sei

$\overset{\frown}{AOB}$ die parabolische Kettenlinie mit Rücksicht auf das eigene Brückengewicht, welches

P genannt, und in seiner Projection auf den Horizont $\overline{A'B'}$ als gleichförmig nach der Längenrichtung der Bahn vertheilt angenommen wird, so dass der Gewichtsantheil

$p = \frac{P}{2h}$ auf die Längeneinheit der Spannweite entfalle, und

$\frac{P}{2}$ den verticalen Druck V an dem Aufhängepuncte A bezeichnet; es sei ferner

ΔP die zufällige Belastung in der Mitte der Brückenbahn, so dass

$\left(\frac{P+\Delta P}{2}\right)$ den hiernach veränderten verticalen Druck $V' = (V + \Delta V)$ an dem Aufhängepuncte A, und

$\overset{\frown}{AoB}$ die veränderte Form der Kettenlinie und zwar unter der Voraussetzung vorstellt, wenn die Brückenbahn gar keine Steifigkeit besitzen würde, sondern einer jeden Veränderung in der Kettenform vollkommen nachgeben könnte.

Es ist leicht einzusehen, dass unter dieser Voraussetzung die Curvenstücke $\overset{\frown}{Ao}$ und $\overset{\frown}{Bo}$ gleichfalls parabolisch geformt sein, jedoch dem §. 294 ad 6 zufolge in o eine Ecke bilden werden, welche als der Durchschnitt der zwei symmetrischen Parabeln $\overset{\frown}{Aob}$ und $\overset{\frown}{Boa}$ anzusehen ist. Behält man die früheren Bezeichnungen $\overline{AC}=h$ und $\overline{CO}=f$ bei, und setzt mit Rücksicht auf den Scheitel o' der neuen Parabel die analogen Grössen $\overline{Ac}=h'=(h+\Delta h)$ und $\overline{co'}=f'=(f+\Delta f)$, so erhält man Folgendes:

1. In Gemässheit der Gleichung (618) ist

$$h=\frac{V}{p}=\frac{P}{2p} \text{ und } h'=(h+\Delta h)=\frac{V'}{p}=\frac{(P+\Delta P)}{2p},$$

also auch

$$\left.\begin{aligned}\Delta h &= \frac{\Delta P}{2p}\\ \text{und } \frac{\Delta h}{h} &= \frac{\Delta P}{P}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (621).$$

Da die zufällige Belastung ΔP, welche sich in der Mitte der Brücke concentriren kann, in der Regel gegen das ganze Brückengewicht P nicht gross ist, so wird $\frac{\Delta h}{h}$ zumeist ein ziemlich kleiner Bruch sein. Sei z. B. die halbe Spannweite $h=30$ Klftr., das eigene Brückengewicht per Current-Klafter Bahn $p=100$ Ztr., und die zufällige Belastung $\Delta P=200$ Ztr., so findet man $P=2ph=6000$ Ztr., $\frac{\Delta h}{h}=\frac{1}{30}$ und $\Delta h=1$ Klftr.

Die Veränderung Δh hängt, wie man bemerkt, bloss von p und ΔP ab, und wird desto geringer, je grösser unter sonst gleichen Umständen das eigene Brückengewicht ist. Da übrigens die Brückenbahn nicht, wie vorausgesetzt wurde, vollkommen nachgiebig sein, sondern jedenfalls eine gewisse Steifigkeit besitzen wird, so ist der nach den Formeln (621) berechnete Werth von Δh eigentlich nur als ein Gränzwerth zu betrachten, der niemals erreicht werden kann.

2. In Gemässheit der Gleichung (619) hat man

$$\overline{co'}=f'=\frac{\overline{Co}}{(2v-v^2)}, \text{ wenn } v=\frac{\overline{AC}}{\overline{Ac}}=\frac{h}{h'}, \text{ gesetzt wird.}$$

Es ist aber

$$\frac{h}{h'} = \frac{h}{(h+\Delta h)} = \frac{1}{\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)},$$

sonach

$$(2v - v^2) = v\,(2-v) = \left\{\frac{1+2\left(\frac{\Delta h}{h}\right)}{1+2\left(\frac{\Delta h}{h}\right)+\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}\right\}.$$

Nach der Bemerkung ad 1 ist $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta P}{P}$ in der Regel ein so kleiner Bruch, dass $\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2$ dagegen vernachlässigt, daher $(2v-v^2)$ mit der Einheit verwechselt, und sofort $f' = \overline{Co}$ gesetzt werden darf. Desshalb kann man sich erlauben, $\overline{co'} = \overline{Co} = f'$, $\overline{Oo} = \Delta f$ und $\widehat{oo'} = \overline{Cc} = \Delta h$, also die Senkung $\overline{Oo}$ des Kettenscheitels O eben so gross, wie die Differenz (Δf), welche zwischen den beiden Pfeilhöhen $\overline{co'}$ und $\overline{CO}$ stattfindet, anzunehmen, so dass man aus der Bestimmung von Δf unmittelbar auf die Senkung des Kettenscheitels schliessen wird. Um nun den Werth von Δf selbst aufzufinden, lasse man noch die angenäherte Gleichung für die Bogenlänge nach dem §. 296 gelten. In diesem Falle wird

$$\widehat{AO} = h + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{h} \text{ und } \widehat{Ao'} = h' + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{h'}, \text{ ferner}$$

$$\widehat{Ao'} - \widehat{AO} = \widehat{oo'} = \Delta h = (h'-h) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{f'^2}{h'} - \frac{f^2}{h}\right),$$

und hieraus wegen $(h'-h) = \Delta h$ zunächst

$$\frac{f'^2}{h'} = \frac{f^2}{h},$$

ferner

$$f' = f\sqrt{\frac{h'}{h}} = f\sqrt{1+\frac{\Delta h}{h}} = f\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta h}{h}\right) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \ldots\right].$$

Substituirt man statt $\frac{\Delta h}{h}$ den Werth $\frac{\Delta P}{P}$ aus den Gleichungen (621), und vernachlässiget die höheren Potenzen von $\frac{\Delta P}{P}$ in der Voraussetzung ihrer Kleinheit, so erhält man

$$f' = f\left(1 + \frac{\Delta P}{2P}\right) = f + \frac{f}{2}\left(\frac{\Delta P}{P}\right),$$

daraus aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \tfrac{1}{2}\frac{\Delta P}{P} \\ \text{und } \Delta f &= \frac{f}{4ph}\Delta P = \frac{\Delta P}{2pn} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (622),$$

wenn noch das im §. 296 eingeführte Verhältniss $n = \frac{2h}{f}$ berücksichtigt wird.

Ex. Für $h = 30^0$, $f = 4^0$, $p = 100$ Ztr. und $\Delta P = 200$ Ztr., erhält man wegen $n = 15$ und $P = 6000$ Ztr.,

$$\frac{\Delta f}{f} = \tfrac{1}{60} \text{ und } \Delta f = \overline{Oo} = \tfrac{1}{15} \text{ Klftr.} = 4{\cdot}8 \text{ Zoll.}$$

Aus den Gleichungen (622) schliesst man rücksichtlich der Senkung des Kettenscheitels O, welche durch eine zufällige Belastung in der Mitte der Brückenbahn angestrebt wird, dass das Verhältniss dieser Senkung zur ganzen Pfeilhöhe nur von jenem Verhältnisse abhängig ist, welches zwischen der zufälligen Belastung und dem ganzen Brückengewichte stattfindet. Was die eigentliche Grösse dieser Kettensenkung anbelangt, so hängt dieselbe augenscheinlich nicht von der Grösse der Brücke, sondern nur von p und n ab. Bei zwei Brücken von verschiedenen Spannweiten, welche jedoch ähnlich geformte Ketten besitzen, und bei welchen überdiess das von ihnen getragene Gewicht per Current-Klafter Spannweite dasselbe ist, würde daher durch den Eintritt einer und derselben zufälligen Belastung in der Mitte der Brücke auch ein und dieselbe Senkung des Kettenscheitels entstehen, wenn die Brückenbahn in beiden Fällen vollkommen nachgeben könnte, und wenn man nur die Veränderung in den Gleichgewichtscurven ohne Rücksicht auf die Kettenausdehnung, welche durch die vermehrte Spannung entsteht, betrachtet. Gewöhnlich sind grosse Kettenbrücken massiver als kleine construirt, somit die Werthe von p bei diesen kleiner, als bei jenen, es wird daher in der Regel die Senkung des Kettenscheitels in dem vorigen Sinne unter sonst gleichen Umständen bei grossen Kettenbrücken sogar geringer, als bei kleinen anzunehmen sein. Dieses Resultat ist insoferne merkwürdig, als es lehrt, dass man bei Kettenbrücken

mit der Zunahme der Spannweite keineswegs auch eine Zunahme der Veränderung der Kettenform in Folge einer zufälligen Belastung zu besorgen hat.

Bei der Aufstellung der Gleichungen (622) ging man zwar von der Voraussetzung aus, dass die Ketten vollkommen beweglich, und die Brückenbahn der beabsichtigten Veränderung der Kettenform vollkommen nachgeben könne. In der Wirklichkeit ist diese Voraussetzung, jedoch zu Gunsten der Stabilität der Construction nicht vorhanden, es wird daher die nach den Formeln (622) berechnete Senkung des Kettenscheitels eigentlich nur als eine Gränze anzusehen sein, deren Erreichung bloss angestrebt wird. Uebrigens ist Δf nur diejenige Senkung, die von dem Unterschiede der verglichenen Gleichgewichtscurven herrührt. Eine andere Senkung wird noch aus dem Grunde stattfinden, weil durch die in Folge der zufälligen Belastung entstehende grössere Spannung in den Ketten diese letzteren etwas ausgedehnt werden.

Gleichwohl führen diese Bemerkungen zu dem Schlusse, dass bei einer Kettenbrücke die Kettenform desto weniger sich verändern wird, je flächer die Kettencurve, dann je schwerer und steifer die Brückenbahn construirt ist, endlich je kürzer die Hängestangen insbesondere in der Nähe des Kettenscheitels sind, um nämlich das Ausweichen des Kettenscheitels auch nach horizontaler Richtung möglichst zu beschränken.

3. Nachdem in der Fig. 349 die halbe Spannweite

$$\overline{Ac} = h' = (h + \Delta h)$$

und die Pfeilhöhe $\overline{co'} = f' = (f + \Delta f)$ der veränderten Kettencurve $\overset{\frown}{Ao'b}$ bekannt ist, so kann man auch die Veränderung von $n = \frac{2h}{f}$ bestimmen. Sei diese Veränderung Δn, so hat man in der Ueberzeugung, dass es sich überhaupt nur um geringe Differenzen handeln wird, und desshalb bei der Entwicklung derselben die Regeln der Differentialrechnung mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden können,

$$\Delta n = 2\Delta\frac{h}{f} = 2\left(\frac{f\Delta h - h\Delta f}{f^2}\right) = \frac{2h}{f}\left(\frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta f}{f}\right) = \frac{n}{2}\frac{\Delta P}{P},$$

und hieraus

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (623).$$

4. Auf ähnliche Weise findet man die Veränderung ΔH, welche in der horizontalen Kettenspannung H durch die zufällige Belastung ΔP hervorgebracht wird. Es ist nämlich nach der Formel (614) $H = \frac{1}{8} n P$, daher annäherungsweise

$$\Delta H = \tfrac{1}{8}(n\Delta P + P\Delta n) = \frac{Pn}{8}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \tfrac{3}{2} H \frac{\Delta P}{P},$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta H}{H} &= \tfrac{3}{2}\frac{\Delta P}{P} \\ \text{so wie } \Delta H &= \frac{3n}{16}\Delta P \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (624).$$

Endlich ist nach der genäherten Gleichung (616) $S = \left(H + \frac{1}{n} P\right)$, daher die Differenz ΔS in der Tangentialspannung S, welche die zufällige Belastung ΔP hervorzubringen strebt,

$$\Delta S = \Delta H + \Delta\frac{P}{n} = \Delta H + \frac{n\Delta P - P\Delta n}{n^2} = \Delta H + \frac{P}{n}\left(\frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta n}{n}\right)$$

$$= \Delta H + \frac{P}{n}\cdot\frac{\Delta P}{2P} = \frac{3n}{16}\Delta P + \frac{1}{2n}\Delta P = \frac{3n}{16}\Delta P\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right)$$

$$= \Delta H\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right),$$

woraus sich das Verhältniss

$$\Delta S : \Delta H = \left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) : 1 = l : h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (625)$$

ergibt, wenn man nach dem §. 296 die angenäherte Relation

$$\widehat{AO} = l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right)$$

einführt.

Lässt man in Uebereinstimmung mit den practischen Verhältnissen die Zahl n von 12 bis 18 variiren, so sieht man, dass die Aenderung ΔH des Horizontalzuges H zwischen $2\frac{1}{2}\Delta P$ und $3\frac{3}{4}\Delta P$ sich bewegen, also im Verhältnisse zu dem ursprünglichen Horizontalzuge gewöhnlich nicht bedeutend sein wird, da die zufällige Belastung ΔP, welche in der Mitte der Brückenbahn stattfinden kann, im Vergleiche zu dem ganzen Brückengewichte, wenigstens bei nicht zu kleinen Brücken, ebenfalls nicht gross sein wird. Ist z. B. wie ad 1 und 2, $P = 6000$ Ztr., $\Delta P = 200$ Ztr. und $n = 15$, so erhält man $\Delta H = \frac{1}{20} H = 562\frac{1}{2}$ Ztr.

So gross wäre übrigens diese Veränderung nur in dem Falle anzunehmen, wenn die Brückenbahn vollkommen nachgeben könnte. Da nun dieselbe jedenfalls eine gewisse Steifigkeit besitzen wird, so wird natürlicher Weise die obige Veränderung $\frac{\Delta H}{H} = \frac{3\Delta P}{2P}$ nur angestrebt werden, ohne dass sie in der Wirklichkeit diese Höhe erreichen kann. Wäre die Brückenbahn vollkommen steif, und könnte sich desshalb die Kettenform in Folge einer zufälligen Belastung gar nicht verändern, so dass also auch von der Ausdehnung der Ketten aus Anlass ihrer vermehrten Spannung abgesehen würde, so dürfte offenbar wegen $H = \frac{n}{8}P$ und wegen des constant bleibenden Verhältnisses n die Vermehrung in der Horizontalspannung nicht höher, als

$$\Delta H = \frac{n}{8}\Delta P, \text{ oder } \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta P}{P}$$

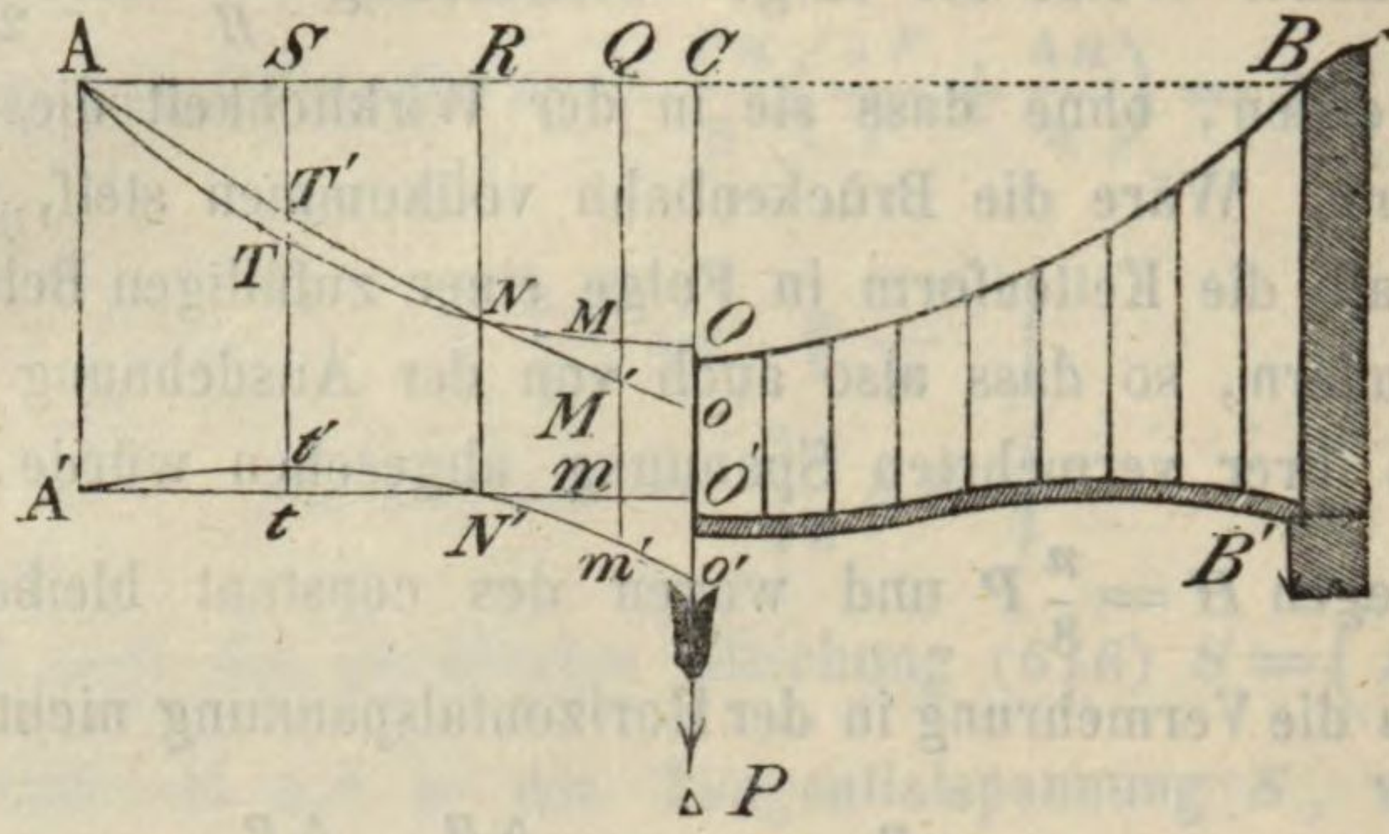
angenommen werden, wornach man in diesem Falle unter Zugrundelegung der obigen speciellen Daten $\frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{30}$ und $\Delta H = 375$ Ztr. erhalten würde. Allein auch diese Annahme der vollkommenen Steifigkeit der Brückenbahn entspricht der Wirklichkeit nicht, und desshalb wird der letztgefundenene Werth für ΔH ebenfalls nur als eine Gränze anzusehen sein, die nicht erreicht werden kann. Auf diese Weise hat man zwei Gränzen kennen gelernt, zwischen welchen ohne Zweifel das wahre Resultat liegen muss, und es kann nunmehr behauptet werden, dass die wirkliche Veränderung $\frac{\Delta H}{H}$ zwischen die Gränzwerthe $\frac{\Delta P}{P}$ und $\frac{3}{2}\frac{\Delta P}{P}$ fallen, und nach Umständen sich bald diesem, bald jenem Werthe annähern werde, je nachdem die Brückenbahn eine geringere oder grössere Steifigkeit besitzt.

Jedenfalls aber muss ΔH mit n zunehmen, also ein und dieselbe zufällige Belastung ΔP in der Mitte der Brücke die Kettenspannungen desto mehr vergrössern, je flächer die Kettenform ist.

Anmerkung. Die Resultate der vorstehenden Untersuchung eignen sich zur Vorstellung über die Form der krummen Fläche, welche die Brückenbahn in Folge der zufälligen Belastung ΔP annimmt. Es sei nämlich

(Fig. 351) $\overset{\frown}{A\,O}$ die ursprüngliche, $\overset{\frown}{A\,o}$ aber die durch die zufällige Belastung ΔP veränderte Kettencurve, wenn die Brückenbahn keine Steifigkeit hätte,

Fig. 351.



sondern vollkommen nachgiebig wäre. Sodann hätte man die Veränderung der ursprünglichen geraden Bahnrichtung $\overline{A'\,O'}$ mittelst der krummen Linie $\overset{\frown}{A'\,o'}$ anschaulich zu machen, und hierbei $\overline{O\,o} = \overline{O'\,o'} = \Delta f$, ferner für einen beliebigen Punct (M) $\overline{M\,M'} = \overline{m\,m'}$ zu setzen, wenn die verticalen Abstände zwischen der Kettencurve und der Brückenbahn unverändert bleiben sollen.

Um unter diesen Voraussetzungen die Curve für die Brückenbahn $\overset{\frown}{A\,o'}$ zu bestimmen, behalte man die obigen Bezeichnungen bei, und setze noch für den gewählten Punct M die ursprünglichen Coordinaten $\overline{A\,Q} = u$ und $\overline{Q\,M} = v$, ferner seine Ortsveränderung $\overline{M\,M'} = \Delta v$.

Vor Allem ist die Gleichung der ursprünglichen Parabel $\overset{\frown}{A\,O}$

$$\left(\frac{h-u}{h}\right)^2 = \left(\frac{f-v}{f}\right) \text{ oder } \frac{v}{f} = \frac{2u}{h} - \frac{u^2}{h^2},$$

also auch die Gleichung der veränderten Kettenlinie $\overset{\frown}{A\,o}$

$$\frac{v+\Delta v}{f'} = \frac{2u}{h+\Delta h} - \frac{u^2}{(h+\Delta h)^2},$$

indem zu den Puncten M und M' dieselbe Abscisse u gehört. Hiernach hat man

$$\frac{v}{f}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)\left(1+\frac{\Delta f}{f}\right)^{-1} = \frac{2u}{h}\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^{-1} - \frac{u^2}{h^2}\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^{-2},$$

$$\frac{v}{f}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)\left(1+\frac{\Delta P}{2P}\right)^{-1} = \frac{2u}{h}\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)^{-1} - \frac{u^2}{h^2}\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)^{-2},$$

daher annähernd, wenn die Brüche $\frac{\Delta v}{v}$ und $\frac{\Delta P}{P}$ sehr klein sind,

$$\frac{v}{f}\left(1+\frac{\Delta v}{v}-\frac{\Delta P}{2P}\right)=\frac{2u}{h}\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)-\frac{u^2}{h^2}\left(1-\frac{2\Delta P}{P}\right).$$

Wird von diesem Ausdrucke die ursprüngliche Curvengleichung zwischen $\frac{v}{f}$ und $\frac{u}{h}$ abgezogen, so findet man aus der Differenz

$$\frac{\Delta v}{f}=\frac{\Delta P}{2P}\left(\frac{v}{f}-\frac{4u}{h}+\frac{4u^2}{h^2}\right)=\frac{\Delta P}{2P}\left(-\frac{2u}{h}+\frac{3u^2}{h^2}\right)=\frac{\Delta f}{f}\left(\frac{3u^2}{h^2}-\frac{2u}{h}\right),$$

und hieraus die Gleichung der fraglichen Curve $\widehat{A'o'}$

$$\frac{\Delta v}{\Delta f}=\frac{u}{h}\left(\frac{3u}{h}-2\right) \quad \ldots\ldots \quad (626),$$

wenn dabei für den Curvenpunct m' die Coordinaten $\overline{A'm}=u$ und $\overline{mm'}=\Delta v$ gesetzt, und auf den Ursprung A' bezogen werden.

Diese Gleichung ist in Bezug auf Δv vom zweiten Grade, sie repräsentirt somit eine gemeine Parabel, deren Axe durch den Scheitel t' vertical geht. Die Lage dieses Scheitels bestimmt sich aus den Relationen

$$\overline{A't}=\tfrac{1}{3}\overline{A'O'}=\tfrac{1}{3}h \text{ und } \overline{tt'}=-\tfrac{1}{3}\Delta f=-\tfrac{1}{3}\overline{O'o'},$$

wesshalb derselbe oberhalb der ursprünglichen Bahnfläche liegt.

Der Durchschnittspunct N' von den verglichenen Bahnlinien zeigt diejenige Stelle an, welche durch die zufällige Last weder gehoben, noch gesenkt würde, und die Lage dieses Punctes findet man aus der Gleichung (626) für $\Delta v=o$, wornach

$$u=\overline{A'N'}=\tfrac{2}{3}h=\tfrac{1}{3}AB$$

wird, so dass die Ordinaten Δv zwischen A' und N' negativ, d. i. nach aufwärts gekehrt, hingegen zwischen N' und o' positiv, d. i. nach abwärts gekehrt sind.

Unter den angenommenen Umständen würde daher in Folge der zufälligen Belastung das mittlere Längendrittel der Bahn gesenkt, die beiden anderen Drittel aber gehoben werden. Zwar sind jene Umstände imaginär, gleichwohl wird das gefundene Resultat auch in der Wirklichkeit, wo die Brückenbahn eine gewisse Steifigkeit besitzt, nicht weit von der Wahrheit sich entfernen können. Nur die Form der gebogenen Brückenbahn wird eine ganz andere als die parabolische sein, ungefähr eine solche, wie die Zeichnung auf der rechten Seite der Fig. 350 anzeigt, vorausgesetzt, dass das Ende B' gezwungen wird, seine Lage beizubehalten, weil sonst ein Verbiegen der daselbst befindlichen Hängstangen durch den nach aufwärts stattfindenden Druck, und hiernach eine Hebung des Brückenbahnendpunctes über das eigentliche Niveau zu besorgen wäre, was sowohl aus technischen, als auch aus Communicationsrücksichten nicht zugelassen werden soll.

§. 302.

Ungünstigste Belastungsweise der Kettenbrücken. Es wird allgemein angenommen, dass die ungünstigste Belastungsweise bei Kettenbrücken diejenige ist, wenn die grösste zufällige Belastung nach der ganzen Brückenlänge sich gleichmässig vertheilt, insoferne nämlich in der Praxis die grösste Kettenspannung zu berücksichtigen ist. In der That berechtigen die Resultate der beiden vorhergehenden §§. mit Rücksicht auf die gewöhnlichen practischen Verhältnisse zu dieser Annahme. Betreffend die Grösse der zufälligen Belastung selbst, welche per □° benützbarer Bahnfläche als Maximum anzunehmen kömmt, so hat man schon im §. 263 gesehen, dass dieselbe mit Rücksicht auf die Möglichkeit des Entstehens vom Menschengedränge mit 25 bis 30 Ztr. bemessen werden muss.

§. 303.

Berechnung des Querschnittes für die Tragketten. Behufs dieser Berechnung nenne man

G_1 das Gewicht der Tragketten,

G_2 jenes der Brückenbahn sammt den Hängstäben,

G_3 die auf der Brücke stattfindende zufällige Belastung, und

$G = (G_1 + G_2 + G_3)$ das totale Brückengewicht (in Wiener Zentnern);

ferner

F die bei dem Verkehre benützte Bahnfläche (in Wiener □ Klftrn.),

$g_1 = \frac{G_1}{F}$, $g_2 = \frac{G_2}{F}$, $g_3 = \frac{G_3}{F}$ und $g = (g_1 + g_2 + g_3) = \frac{G}{F}$ die per Quadratklafter dieser Bahnfläche durchschnittlich entfallenden Antheile der obigen Gewichte,

$L = 2l$ die nach §. 296 zu berechnende Länge der Kettencurve,

q den fraglichen Querschnitt aller Tragketten in Wiener □ Zollen,

k in Zentnern das Gewicht eines Kettenstückes von einer Klafter Länge und 1 □'' Querschnitt mit Rücksicht auf die Verbindungen der Kettenglieder, und

a in Zentnern die grösste Spannung per □'' Querschnitt, welche man in dem Kettenmateriale mit Rücksicht auf die besonderen Umstände ohne Gefahr zulassen darf;

endlich behalte man die Bezeichnungen h, f, n, α, S und H nach den früheren §§. bei.

Hiernach hat man

$$G_1 = kqL,\ G_2 = g_2 F,\ G_3 = g_3 F,$$

daher

$$G = kqL + (g_2 + g_3) F,$$

und nach der Gleichung (615) die Totalspannung an den Aufhängepuncten

$$S = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{G}{2} \sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = G\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right) = cG,$$

wenn man den Coefficienten von G, d. i.

$$\frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right) = c$$

setzt.

Sonach ist einerseits

$$S = c\,[kqL + (g_2 + g_3) L],$$

andererseits aber

$$S = aq,$$

somit durch Vergleichung

$$c\,[kqL + (g_2 + g_3) F] = aq,$$

und hieraus findet man den Kettenquerschnitt q mit

$$q = \frac{(g_2 + g_3) F}{\left(\frac{a}{c} - kL\right)} \square'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (627).$$

Bezüglich dieser Formel ist Folgendes zu bemerken:

1. Das Einheitsgewicht g_2 variirt je nach der Constructionsweise der Brückenbahn mit Rücksicht auf ihre Bestimmung in der Regel von 8 bis 20 Zentnern.

2. Die zufällige Belastung g_3 ist nach dem vorigen §. mit 25 bis 30 Zentnern zu bemessen.

3. Bei der Bestimmung der Bahnfläche $F = 2bh$ ist zu beachten, dass die Bahnlänge $2h$ und die Bahnbreite b in Wiener Klaftern zu substituiren sind, wobei diese nicht die Breite der ganzen Brücke, sondern nur diejenige vorstellt, welche bei der Passage wirklich benützt wird. Selbstverständlich ist auf diesen Umstand bei der Ausmittlung des Einheitsgewichtes g_2 Rücksicht zu nehmen.

4. Die grösste zulässige Spannung a per $\square''$ ist je nach der Gattung und Qualität des Kettenmateriales verschieden. In der

Regel wird dazu Schmiedeeisen verwendet *). Bei diesem wird man die obige Spannung a ungefähr mit $\frac{5}{6}$ von jener, welche den Versuchen zufolge den günstigsten Umständen entspricht, annehmen können. (Siehe §. 18.) In der Regel liegt der zulässige Werth für a zwischen 100 und 220 Ztr., so dass $a = 180$ schon einer guten Eisengattung zugehören wird.

5. Das Einheitsgewicht k hängt von dem Materiale und von der Art und Weise ab, wie die Kettenglieder unter sich verbunden sind. Für Schmiedeeisen ist das Gewicht einer Stange von einer Klafter Länge und einem Quadratzoll Querschnitt ungefähr 18 Pfund. Der Werth von k wird daher mit Rücksicht auf die Verbindungen der Kettenglieder zwischen 0·2 und 0·3 Ztr. zu liegen kommen.

Ex. Bei der über den Donaucanal in Wien anno 1824 und 1825 erbauten Sophienbrücke ist

$$2h = 37^\circ 3' 0'' = 37^\circ\!\cdot\!5 \qquad l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) = 1\cdot013\,h,$$

$$f = 2^\circ 4' 1'' 5''' = 2\cdot686 \qquad L = 2l = 37\cdot987$$

$$n = 14 \qquad b = 2^\circ 1' 6'' = 2^\circ\!\cdot\!25$$

$$c = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n}\right) = 1\cdot821 \qquad F = 2bh = 84\cdot375\,\square^\circ.$$

Setzt man noch $g_2 = 11$, $g_3 = 30$, $a = 200$ und $k = 0\cdot25$ Ztr., so findet man nach der Formel (627)

$$q = 32\,\square''.$$

Mit diesem Resultate steht die Ausführung in Uebereinstimmung. Die Brückenbahn hängt nämlich an vier Ketten, deren zwei auf jeder Seite vertical über einander situirt sind. Eine Kette besteht aus vier Gliedern à 2″ Höhe und 1″ Breite. Der ausgeführte Kettenquerschnitt misst daher in der That $4 \times 4 \times 2 \times 1 = 32\,\square''$.

Bei der Vertheilung des nach der Formel (627) berechneten Kettenquerschnittes auf die einzelnen Ketten ist darauf zu sehen, dass alle auf eine gleiche Weise in Anspruch genommen werden. Die weitere Auflösung einer Kette in mehrere Glieder geschieht in der

---

*) Auch Stahl- und Drahtseile sind zu diesem Zwecke in Anwendung gekommen. Die Karlsbrücke über den Donaucanal in Wien hat Ketten aus Stahl; sie ist die einzige dieser Art. Drahtseilbrücken sind mehrere ausgeführt worden. Die bekannteste unter diesen ist die Brücke bei Freiburg in der Schweiz.

Regel auf die in der Fig. 297 angezeigte Art. Zu solchen Gliedern pflegt man flache Schienen zu verwenden, die im Vergleiche zur Breite eine nur geringe Dicke besitzen, wie diess bereits im §. 19 erwähnt wurde.

Die Formel (637) kann auch benützt werden, um die grösste Spannung des Kettenmateriales per □″ Querschnitt, d. i. a zu finden, wenn der Kettenquerschnitt q bekannt ist.

Ex. Die grosse Kettenbrücke über den Meeresarm Menai-Strait zur Verbindung der Insel Anglesey bei Bangor mit dem festen Lande von England, welche nach Telford's Project im Jahre 1825 ausgeführt worden ist, enthält drei Oeffnungen, von denen die mittlere und zugleich grösste eine Länge von circa 90 Wiener Klaftern hat. Die Brückenbahn ist in zwei Fahrbahnen à 12 engl. Fuss Breite für die hin- und herfahrenden Wägen und einem dazwischen liegenden 4 engl. Fuss breiten Gehweg abgetheilt. Die benützbare Bahnbreite ist daher $b = 28$ engl. Fuss $= 4\frac{1}{2}$ Wiener Klafter. Die Verhältnisszahl n ist nahe $13\frac{1}{2}$, und der ausgeführte Kettenquerschnitt 260 engl. $= 241{\cdot}7$ Wiener □″.

Hiernach hat man für die mittlere Kettenbrücken-Oeffnung

$2h = 90$	$F = 2bh = 405$
$b = 4\frac{1}{2}$	$l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) = 1{\cdot}015\,h$
$n = 13\frac{1}{2}$	$L = 2l = 91{\cdot}35$
$c = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n}\right) = 1{\cdot}762$	$q = 241{\cdot}7.$

Setzt man noch $g_2 = 16$, $g_3 = 30$ und $k = 0{\cdot}3$, so findet man aus der Formel (627) für die grösste Spannung des Schmiedeeisens per □″

$$a = c\left[kL + \frac{1}{q}(g_2 + g_3)F\right] = 177 \text{ Wr. Ztr.}$$

Anmerkung 1. Die Formel (627) kann durch eine annäherungsweise Darstellung auf eine noch einfachere Form gebracht werden. Nimmt man z. B. für Kettenbrücken von gewöhnlicher nicht allzuschwerer Construction durchschnittlich $g_2 = 12$ Ztr., ferner $g_3 = 30$ Ztr., $k = \frac{1}{4}$ Ztr. und für Schmiedeeisen von guter Qualität $a = 190$ Ztr. an, und setzt man noch beiläufig $c = \frac{n}{8}$ und $L = 2h$, so erhält man für den Kettenquerschnitt

$$q = \frac{84F}{\left(\frac{3040}{n} - h\right)} = \frac{84Fn}{(3040 - hn)},$$

zu dessen Bestimmung nur die Bahnlänge $2h$, die benützbare Bahnbreite b (wegen $F = 2bh$), und die Verhältnisszahl n (§. 296) benöthigt wird.

Ex. Für die in den Jahren 1827 und 1828 über den Wienfluss ausgeführte fahrbare Kettenbrücke ist $2h = 14^\circ$, also $h = 7^\circ$, ferner $n = 16$, $b = 5\frac{1}{4}^\circ$ und $F = 73{\cdot}5\,\square^\circ$; man findet somit nach der obigen Formel $q = 33\,\square''$, welches Resultat sehr nahe mit der Ausführung übereinstimmt. Die Brücke hängt nämlich an vier Ketten, deren jede vier Glieder à 2″ Höhe und 1″ Dicke hat, wornach der wirkliche Kettenquerschnitt $4\times4\times2\times1=32\,\square''$ beträgt.

Anmerkung 2. Dividirt man den für q gegebenen Werth durch F, so gelangt man offenbar zur Kenntniss, wie viel von dem ganzen Kettenquerschnitte durchschnittlich auf $1\,\square^\circ$ Brückenbahn entfällt. Man findet nämlich allgemein aus der Formel (627)

$$\frac{q}{F} = \frac{(g_2 + g_3)}{\left(\frac{a}{c} - kL\right)}\,\square''.$$

Dieser Werth nimmt unter sonst gleichen Umständen mit L, also mit der Spannweite zu, so dass der gesammte Kettenquerschnitt in einem grösseren Verhältnisse wächst, als die Bahnfläche F.

Legt man auch die vorige annäherungsweise Formel für q zu Grunde, so erhält man

$$\frac{q}{F} = \frac{84}{\left(\frac{3040}{n} - h\right)} = \frac{84\,n}{(3040 - n\,h)},$$

$$\text{also für } n = 12 \text{ und } 2h = \begin{cases} 10^\circ \\ 50^\circ, \\ 100^\circ \end{cases} \frac{q}{F} = \begin{cases} 0{\cdot}34\,\square'' \\ 0{\cdot}37\ \text{„} \\ 0{\cdot}41\ \text{„} \end{cases}$$

$$\text{und für } n = 18 \text{ und } 2h = \begin{cases} 10^\circ \\ 50^\circ, \\ 100^\circ \end{cases} \frac{q}{F} = \begin{cases} 0{\cdot}51\ \text{„} \\ 0{\cdot}58\ \text{„} \\ 0{\cdot}71\ \text{„} \end{cases}$$

In der Praxis liegen die Werthe für n in der Regel zwischen 12 und 18, und jene der Spannweite zwischen 10 und 100 Klaftern, es wird somit für gewöhnliche aus gutem Schmiedeeisen construirte Kettenbrücken der Kettenquerschnitt per $\square^\circ$ Bahn zwischen 0·34 und 0·71 $\square''$ fallen. Der Mittelwerth hierans ist ungefähr $\frac{1}{2}\,\square''$. Diese Bemerkung kann als Anhaltspunct zu einer beiläufigen Beurtheilung der Grösse des Kettenquerschnittes dienen.

§. 304.

Gränzen der Spannweiten für Kettenbrücken. Zufolge der Formel (627) nimmt der erforderliche Kettenquerschnitt mit der Spannweite $2h$ zu; jene Formel ist aber nur so lange brauchbar, als der Nenner $(a - ckL)$ einen positiven Werth hat. Hiernach erhält man die Bedingung

$$L < \frac{a}{ck},$$

aus welcher mit Rücksicht auf die §§. 296 und 303 wegen

$$L = 2l = 2h\left(1 + \frac{8}{3n^2} - \ldots\right)$$

$$\text{und } c = \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{n}{8} + \frac{1}{n} - \ldots$$

die weitere

$$2h < \frac{a}{\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)k}$$

folgt.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung bezeichnet offenbar die Gränze der Spannweite (*lim.* $2h$), welche nie erreicht werden darf.

Es ist nämlich

$$lim.\ 2h = \frac{a}{\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)k}$$

$$= \frac{8a}{\left(1 + \frac{8}{n^2} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)nk}$$

$$= \frac{8a}{\left(1 + \frac{32}{3n^2} - ..\right)nk}$$

$$= \frac{8a}{nk}\left(1 - \frac{32}{3n^2} + ..\right),$$

somit annähernd

$$lim.\ 2h = \frac{8a}{nk}\left(1 - \frac{32}{3n^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (628).$$

Nach dieser Formel wurde folgende Tabelle zusammengestellt:

Die Gränzen der Spannweite bei Kettenbrücken werden			
für n	allgemein $lim.\ 2\,h$	und insbesondere für $k = \frac{1}{4}$ und	
		$a = 100$	$a = 220$
12	$0{\cdot}617\ \frac{a}{k}$	247 Klafter	543 Klafter
13	$0{\cdot}577\ \frac{a}{k}$	231 „	508 „
14	$0{\cdot}540\ \frac{a}{k}$	216 „	475 „
15	$0.508\ \frac{a}{k}$	203 „	447 „
16	$0{\cdot}479\ \frac{a}{k}$	192 „	422 „
17	$0{\cdot}453\ \frac{a}{k}$	181 „	399 „
18	$0{\cdot}430\ \frac{a}{k}$	172 „	378 „

In der Praxis pflegen die Werthe von n zwischen 12 und 18, jene von a zwischen 100 und 220 Ztr. zu liegen, und $\frac{1}{4}$ bezeichnet so ziemlich den Durchnittswerth von k. Es fallen daher die Gränzen der Spannweiten in der Regel zwischen 172 und 543 Klaftern. Das Mittel aus diesen Zahlen gibt $357\frac{1}{2}$ Klafter.

Gleichwohl können die wirklichen Spannweiten die obigen Gränzen nicht erreichen, sondern sie werden offenbar viel geringer sein müssen. Die Gründe hiefür sind practischer und öconomischer Natur. Bei verhältnissmässig grossen Brückenspannweiten wären nämlich so starke Ketten und so hohe Pfeiler erforderlich, dass die bedeutenden Schwierigkeiten in der Ausführung und die Kostspieligkeit eines solchen Bauobjectes Veranlassung geben, die

practischen Gränzen der Spannweiten für Kettenbrücken weit unter den obigen Zahlenwerthen anzunehmen.

Die grösste bisher ausgeführte Kettenspannung ist bei der Kettenbrücke über die Donau zwischen Ofen und Pesth vorhanden. Diese enthält drei Oeffnungen, von welchen die mittlere 100 und jede der beiden andern 50 Klafter misst.

§. 305.

Gewicht der Tragketten. Das Gewicht der Tragketten, welches im §. 303 mit G_1 bezeichnet und mit kqL ausgedrückt wurde, kann nunmehr nach erlangter Kenntniss des Kettenquerschnittes (q) berechnet werden.

Man hat nämlich wegen der Gleichung (627)

$$G_1 = kqL = \frac{kL(g_2+g_3)F}{\frac{a}{c} - kL} = \frac{kL(G_2+G_3)}{\frac{a}{c} - kL} \quad (629).$$

Auch folgt hieraus

$$\frac{a}{k} G_1 = c\,(G_1+G_2+G_3)\,L = cGL,$$

und da mit Rücksicht auf die Entstehung der Gleichung (628)

$$\frac{a}{k} = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right) \textit{lim.}\, 2h,$$

ferner

$$cL = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right) 2h$$

ist, so erhält man nach gehöriger Reduction überdiess

$$G_1 \,.\, \textit{lim.}\, 2h = G \,.\, 2h,$$

und demgemäss die eben so einfache wie merkwürdige Proportion

$$G_1 : G = 2h : \textit{lim.}\, 2h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (630).$$

Es verhält sich daher das Kettengewicht (G_1) zum Totalgewichte ($G = G_1 + G_2 + G_3$), wie die wirkliche Spannweite ($2h$), zur Gränze der Spannweite ($\textit{lim.}\, 2h$).

Hätte man z. B. mit Rücksicht auf die betreffenden Werthe von a, k und n die Gränze der Spannweite nach der Gleichung (628) mit $\textit{lim.}\, 2h = 300^0$ gefunden, so würde bei jenen Werthen und bei einer Spannweite von $2h = 60^0$ das fragliche Kettengewicht

$$G_1 = \frac{2h}{lim.\ 2h} G = \tfrac{1}{5} G = 20\,\%_0 \text{ von } G$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{4}(G_2 + G_3) = 25\,\%_0 \text{ von } (G_2 + G_3)$$

sein. Dieses Kettengewicht ist übrigens nur dasjenige, welches auf die Länge der Brückenbahn ($2h$) entfällt.

Es leuchtet ein, dass zwischen den per $\square^0$ Brückenbahn entfallenden Gewichtsantheilen g_1, g_2, g_3 und g dieselben Beziehungen stattfinden, wie zwischen den Gewichten G_1, G_2, G_3 und G. Wäre also in dem obigen Beispiele $g_2 = 10$ und $g_3 = 30$, somit

$$(g_2 + g_3) = 40 \text{ Zentner.},$$

so entfiele von den Tragketten per $\square^0$ Bahn durchschnittlich der Gewichtsantheil

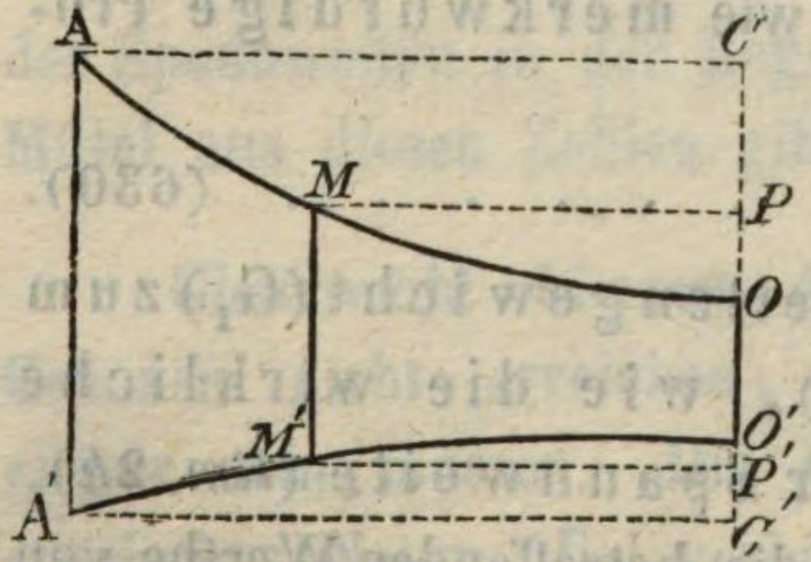
$$g_1 = \tfrac{1}{4}(g_2 + g_3) = 10 \text{ Zentner.}$$

Nachdem in der Regel die anwendbaren Spannweiten zwischen 10 und 100° liegen, die Gränzen der Spannweiten aber nach dem vorigen §. von 172 bis 543° anzunehmen sind, so folgt, dass unter gewöhnlichen Umständen das Kettengewicht von 2 bis 59% des Totalgewichtes variiren kann.

§. 306.

Länge der Hänge- oder Tragstangen. Die Länge einer Tragstange hängt ab von der Krümmung der Kettencurve $\overset{\frown}{AO}$ (Fig. 352), von jener der Brückenbahn $\overline{A'O'}$, von dem Abstande der Curvenscheitel O und O', und von dem Orte der betreffenden Tragstange $\overline{MM'}$ selbst. Es sei die halbe Spannweite $\overline{AC}$ . . . . . $= h$,

Fig. 352.



die Pfeilhöhe $\overline{CO}$ der Kettencurve . . . . . $= f$,

die Pfeilhöhe $\overline{C'O'}$ d. Brückenbahn . . . . . $= f'$,

ferner für die Hängstange $\overline{MM'}$

die Abscisse $\overline{OP}$ . . . . . $= x$,

die Ordinate $\overline{MP} = \overline{M'P'}$ . . . . . $= y$,

die Bogenlänge $\overset{\frown}{OM}$ . . . . . $= s$,
und die Abscisse $\overline{O'P'}$ . . . . . $= x'$,
endlich die Länge der kleinsten Tragstange $\overline{OO'}$ . . $= t_o$,
und jene der Tragstange $\overline{MM'}$ . . . . . $= t_y$.

Nach diesen Bezeichnungen hat man zunächst

$$x = f\left(\frac{y}{h}\right)^2 \text{ und } x' = f'\left(\frac{y}{h}\right)^2,$$

somit

$$t_y = t_o + x + x' = t_o + (f+f')\left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad . \quad (631),$$

wenn man auch die Curve für die Brückenbahn als eine Parabel gelten lässt, wobei für eine ebene Bahn $f' = o$ zu setzen ist. Dem Resultate (631) zufolge hängt die Länge einer Tragstange von den einzelnen Pfeilhöhen f und f' nur insoferne ab, als die Summe derselben $(f+f')$ in Betracht kömmt. Auch ist zur Bestimmung von t_y die Kenntniss der Ordinate y nöthig. In der Regel ist diese aber nicht bekannt, indem gewöhnlich bloss die Kettenlänge $\overset{\frown}{OM} = s$ und das Verhältniss $n = \frac{2h}{f}$ gegeben sind. In einem solchen Falle hat man den Werth von y erst aus jenem von s aufzusuchen. In dieser Absicht nehme man die Gleichung (611)

$$s = y\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{4}{n}\right)^2\left(\tfrac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\tfrac{4}{n}\right)^4\left(\tfrac{y}{h}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{112}\left(\tfrac{4}{n}\right)^6\left(\tfrac{y}{h}\right)^6 - ..\right]$$

zu Hilfe, und kehre die Reihe so um, dass $\frac{y}{h}$ durch $\frac{s}{h}$ ausgedrückt erscheint. Wird diese Reihenumkehrung nach den Lehren der Mathematik ausgeführt, so findet man

$$\left(\tfrac{y}{h}\right) = \left(\tfrac{s}{h}\right)\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{4}{n}\right)^2\left(\tfrac{s}{h}\right)^2 + \tfrac{13}{120}\left(\tfrac{4}{n}\right)^4\left(\tfrac{s}{h}\right)^4 - \right.$$
$$\left. - \tfrac{493}{5040}\left(\tfrac{4}{n}\right)^6\left(\tfrac{s}{h}\right)^6 + ..\right] \quad (632).$$

Diese Reihe ist in der Regel sehr convergent und desshalb zum Gebrauche bequem. Hat man die Länge der einzelnen Hängestangen bestimmt, so wird man hieraus unverzüglich die verglichene Stangenlänge ausmitteln können.

Anmerkung. Die verglichene Tragstangenlänge kann auch annäherungsweise aus folgender Betrachtung gefunden werden.

Es ist

$$Area\ AA'\,0\,0' = A'ACC' - A\,0\,C - A'\,0'\,C' = hT - \tfrac{2}{3}hf - \tfrac{2}{3}hf'$$
$$= h\,[T - \tfrac{2}{3}(f+f')],$$

wenn man die grösste Tragstangenlänge, welche vorkommen kann, d. i. $\overline{A\,A'} = T$ setzt. Hiernach ist noch $(f+f') = (T-t_o)$, somit

$$Area\ AA'\,0\,0' = \left(\frac{T+2\,t_o}{3}\right)h,$$

woraus ersichtlich wird, dass die verglichene verticale Höhe der Fig. $AA'\,0\,0'$ durch $\left(\frac{T+2\,t_o}{3}\right)$ ausgedrückt erscheint. Wären daher unendlich viele Tragstangen vorhanden, welche sodann die Fig. $AA'\,0\,0'$ vollständig ausfüllten, so würde man die verglichene Stangenlänge nach der Formel $\left(\frac{T+2\,t_o}{3}\right)$ zu berechnen haben. Gleichwohl wird man auch in der Wirklichkeit, wo die Anzahl der Tragstangen eine endliche ist, dieses Resultat als ein annäherungsweises gelten lassen dürfen, und zwar wird dasselbe desto genauer sein, je grösser die Stangenanzahl ist. Da die Formel

$$\left(\frac{T+2\,t_o}{3}\right) = \left(\frac{T+t_o+t_o}{3}\right)$$

das arithmetische Mittel von einer grössten und zwei kleinsten Stangenlängen vorstellt, so hat man dadurch eine einfache Regel, einen angenäherten Werth für die verglichene Tragstangenlänge zu finden, welcher z. B. bei der Verfassung eines Voranschlages über den Materialbedarf zu den Tragstangen ganz gut wird angewendet werden können.

§. 307.

Querschnitt der Hänge- oder Tragstangen. Dieser Querschnitt ist leicht zu finden, wenn man erwägt, dass sämmtliche Hängestangen im ungünstigsten Falle das Gewicht

$$(G_2 + G_3) = (g_2 + g_3)\,F$$

zu tragen haben. Ist daher der Querschnitt aller Hängestangen $= q'$, und die grösste zulässige Spannung per $\square''$ des Stangenmateriales . . . . . $= a'$, so muss offenbar sein

$$q' = \frac{(G_2 + G_3)}{a'} = \frac{(g_2 + g_3)\,F}{a'} \quad . \quad . \quad . \quad (633).$$

Im §. 303 wurde angenommen, dass in dem Gewichte G_2 (beziehungsweise g_2) auch das Stangengewicht enthalten sei. Zur genauen Feststellung der Werthe von G_2 und g_2 sollte sonach der erst zu bestimmende Querschnitt q' schon im Voraus bekannt sein. Diese Unzukömmlichkeit hat indessen keinen Nachtheil. Da nämlich das Stangengewicht im Vergleiche zu dem Gewichte der Brückenbahn und der zufälligen Belastung nur sehr klein sein wird, so kann man sich erlauben, dieses letztere wenigstens vorläufig ausser Acht zu lassen, und statt G_2 bloss das Gewicht der Brückenbahn zu setzen. Wird hiernach q bestimmt, so kann man erforderlichen Falls das Gewicht G_2 (beziehungsweise g_2) rectificiren, und mit dem so verbesserten Werthe die Rechnung neuerdings durchführen, was aber unter den gewöhnlichen practischen Verhältnissen nicht nöthig sein wird.

Betreffend die grösste zulässige Spannung a' per □″ des Stangenmateriales (Schmiedeeisen), so darf man hiefür nur etwa die Hälfte von jener annehmen, welche den Versuchen zufolge unter den günstigsten Umständen stattfinden könnte, weil der nachtheilige Einfluss von Erschütterungen auf die Stangen wegen ihren geringen Querschnittsdimensionen, so wie jener der grossen Ungleichförmigkeit, welcher in dem Zuge dieser Stangen eintreten kann, viel höher anzuschlagen ist, als bei den Ketten. (Vergleiche §. 18, Seite 23.) Da nun die grösste zulässige Spannung unter den günstigsten Umständen von 120 bis 280 Zentnern varriirt, so wird der Werth von a' in der Regel zwischen 60 und 140 Zentner liegen, und $a' = 100$ einer mittelguten Eisenqualität entsprechen.

Anmerkung. Der aus der Gleichung (633) resultirende Quotient

$$\frac{q'}{F} = \frac{(g_2 + g_3)}{a'}$$

zeigt offenbar an, welcher Antheil des Stangenquerschnittes q' im Durchschnitte auf die □° Brückenbahn entfällt. Indem g_2 zwischen 8 und 20, und a' zwischen 60 und 140 zu liegen pflegt, so fällt, wenn man unter Einem $g_3 = 30$ setzt, der per □° resultirende Stangenquerschnitt in der Regel zwischen die Gränzen 0·27 und 0·83 □″. Diese Gränzen sind beinahe dieselben, welche man im §. 303 (Anmerkung 2) für den Kettenquerschnitt gefunden hat. Man kann daher zur ungefähren Uebersicht bemerken, dass die Gleichheit der totalen Querschnitte von den Ketten und Tragstangen einer harmonischen Anordnung so ziemlich entspricht.

Dass wirklich das Stangengewicht, wie oben bemerkt, verhältnissmässig unbedeutend ist, kann leicht anschaulich gemacht werden. Sei z. B. die mittlere Länge der Tragstangen 3^0 und der per $\square^0$ Bahn resultirende Stangenquerschnitt sogar $0{\cdot}83\ \square''$, so erhielte man für das Stangengewicht per $\square^0$ Brückenbahn $3 \times 72 \times 0\,83 \times \frac{1}{4} = 45$ Pfd., daher selbst mit Berücksichtigung der Schrauben und Verbindungen kaum einen halben Zentner, während das Gewicht der Bahn und die zufällige Belastung zusammen 38 bis 50 Zentner betragen kann. Sonach wird man gegen die obige Berechnungsweise um so weniger etwas einzuwenden haben, als das Gewicht $(g_2 + g_3)$ bis auf Pfunde auszumitteln einerseits nicht nöthig, andererseits nicht möglich ist.

§. 308.

Spannketten. Die Spannketten AZ (Fig. 353 und 354) bilden gleichsam eine Fortsetzung der Tragketten, sie laufen vom

Fig. 353.

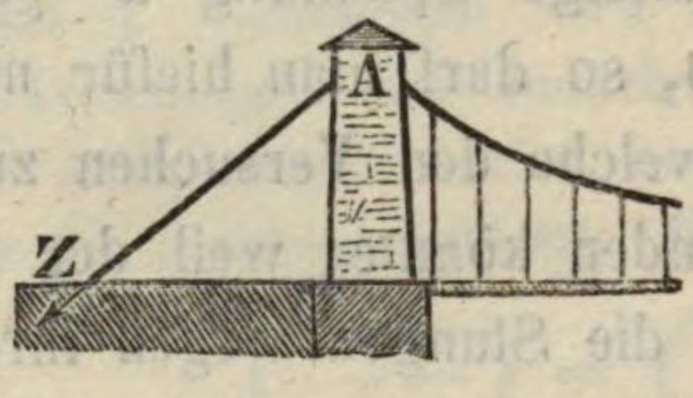
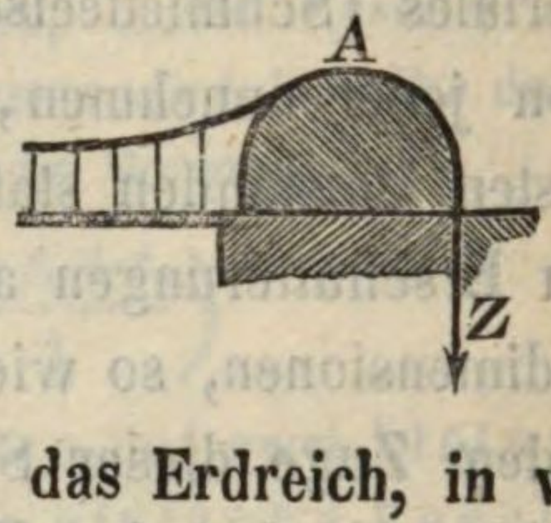


Fig. 354.

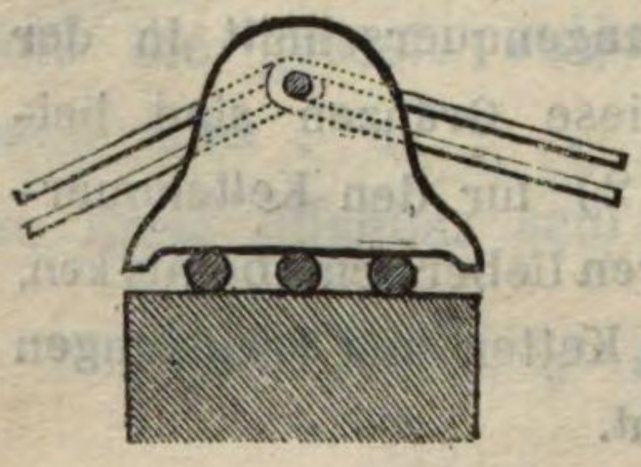


Kopfe des Landpfeilers abwärts gegen das Erdreich, in welchem sie auf eine angemessene Weise zu befestigen sind. Eben so wie bei den Tragketten, wird auch bei den Spannketten vor Allem die Frage zu beantworten sein, welchen Zug sie zu erleiden haben, um daraus ihre Stärke zu beurtheilen. Zu diesem Behufe ist zu unterscheiden, ob der Pfeiler einem Horizontalzuge ausgesetzt werden soll, oder nicht.

§. 309.

I. Fall. **Der Pfeiler soll keinem Horizontalzug ausgesetzt werden.** In diesem Falle gibt man dem Pfeiler eine horizontale Begränzung und befestigt die beiderseitigen Ketten an einen sogenannten **Kettenwagen**, welcher auf dem Pfeiler steht, und dem eine möglichst leichte Beweglichkeit nach horizontaler Richtung gestattet ist. Die Fig. 355 zeigt die An-

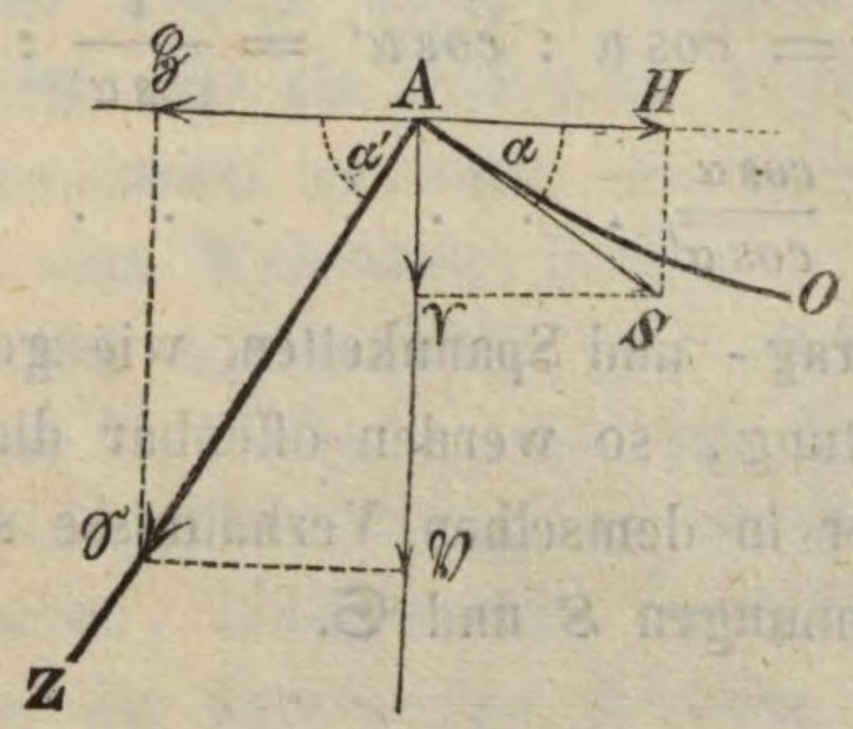
Fig. 355.



ordnung eines solchen Kettenwagens bei der Petersburger Kettenbrücke *). Derselbe ruht auf Rollen, um die Reibung thunlichst zu beseitigen.

Behufs der Untersuchung dieses Falles sei Fig. 356 bezüglich der Tragketten

Fig. 356.



$\widehat{AO}$ die parabolische Kettenlinie,
α der Aufhängewinkel,
S die Tangentialspannung im Aufhängepuncte,
H die horizontale
V die verticale } Componente derselben,
q der Kettenquerschnitt;

bezüglich der Spannketten aber

AZ ihre Richtung, welche geradlinig angenommen werden kann,
α' ihr Abfallswinkel,
$\mathfrak{S}$ ihre Totalspannung,
$\mathfrak{H}$ die horizontale
$\mathfrak{V}$ die verticale } Componente dieser Spannung,
und q der Kettenquerschnitt;

während die Grössen h, f, n und G (das Totalgewicht) die frühere Bedeutung beibehalten.

Hiernach erhält man

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{n}{8}G = S\cos\alpha \\ V &= \tfrac{1}{2}G = S\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{S}\cos\alpha' \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{S}\sin\alpha'. \end{aligned}\right.$$

*) Die Kettenglieder bei dieser Brücke sind schlingenförmig.

Da im vorliegenden Falle die beiden horizontalen Componenten H und $\mathfrak{H}$ sich gegenseitig aufheben müssen, um der Voraussetzung gemäss den Pfeiler keiner Horizontalwirkung auszusetzen, so erhält man

$$H = S\cos\alpha = \mathfrak{H} = \mathfrak{S}\cos\alpha'$$

somit

$$\mathfrak{S} : S = \cos\alpha : \cos\alpha' = \frac{1}{\cos\alpha'} : \frac{1}{\cos\alpha} \text{ und}$$

$$\mathfrak{S} = S\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (634).$$

Bestehen die Trag- und Spannketten, wie gewöhnlich, aus der gleichen Materialgattung, so werden offenbar die Kettenquerschnitte q und $\mathfrak{q}$ zu einander in demselben Verhältnisse stehen, wie die betreffenden Kettenspannungen S und $\mathfrak{S}$.

Sodann ist

$$\mathfrak{q} : q = \mathfrak{S} : S = \cos\alpha : \cos\alpha' = \frac{1}{\cos\alpha'} : \frac{1}{\cos\alpha}$$

daher

$$\mathfrak{q} = q\,\frac{\mathfrak{S}}{S} = q\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (635).$$

Für $\alpha' = \alpha$ wird $\mathfrak{S} = S$ und $\mathfrak{q} = q$,
„ $\alpha' < \alpha$ „ $\mathfrak{S} < S$ „ $\mathfrak{q} < q$ und
„ $\alpha' > \alpha$ „ $\mathfrak{S} > S$ „ $\mathfrak{q} > q$.

Gewöhnlich ist $\alpha' > \alpha$, es werden dann die Spannketten einem grösseren Zuge ausgesetzt sein, und desshalb einen grösseren Querschnitt benöthigen, als die Tragketten. Ist z. B. $n=16$ und $\alpha'=45^0$, so findet man

wegen $\cos\alpha = 1 - \frac{8}{n^2} + \ldots = 0{\cdot}969$ } $\mathfrak{S} = 1{\cdot}370\,S$,
und $\cos\alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{\cdot}707$ } und $\mathfrak{q} = 1{\cdot}370\,q$.

Die Summe $(V + \mathfrak{V})$ der beiden verticalen Componenten zeigt den Druck an, welchen der Pfeiler zu erleiden hat. Es ist nämlich

$$(V + \mathfrak{V}) = (\tfrac{1}{2}G + \mathfrak{S}\sin\alpha') = (\tfrac{1}{2}G + S\cos\alpha\,tg\,\alpha') =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}G + \frac{n}{8}G\,tg\,\alpha'\right) = \tfrac{1}{2}G\left(1 + \frac{n}{4}tg\,\alpha'\right) \quad . \quad . \quad (636).$$

So hat man z. B. für $n = 16$ und $\alpha' = 45^0$,

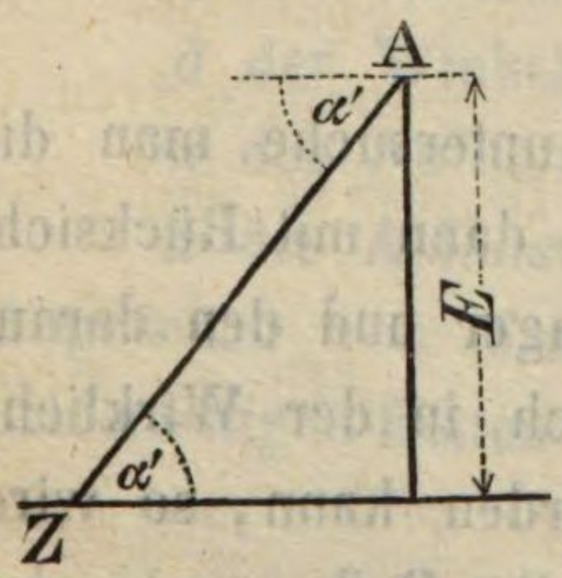
$$(V + \mathfrak{V}) = 2\tfrac{1}{2}\,G.$$

Hieraus wird ersichtlich, dass der Druck auf den Pfeiler weit grösser werden kann, als das Totalgewicht *G*. Aus Anlass dieses bedeutenden Druckes erheischt die Herstellung des Pfeilermauerwerks eine besondere Vorsicht. Namentlich soll dabei das gemischte Mauerwerk vermieden werden, weil solches leicht Anlass zur Entstehung von ungleichen Setzungen und Mauerrissen gibt. Statt gemauerter Pfeiler können übrigens auch Holz- oder Eisengerüste aufgestellt werden. Da ein Umkanten derselben nicht zu besorgen ist, so wird bloss darauf zu sehen sein, dass sie gegen die verticale Pressung genügenden Widerstand leisten.

Betreffend die Anwendbarkeit der betrachteten Constructionsweise mittelst des Kettenwagens, so hat diese das Gute, dass die Landpfeiler keinen Horizontalzug zu erleiden, also keine Tendenz zum Umsturz haben, sondern bloss vertical gedrückt werden; hingegen hält man die nachtheilige Wirkung nicht für unwesentlich, welche durch das fortwährende Oscilliren des Kettenwagens in Folge der Ausdehnung und Zusammenziehung der Ketten aus Anlass der Elasticität und Temperaturabwechslung auf die Pfeiler hervor gebracht wird.

Mit der Zunahme des Abfallswinkels α' für die Spannketten nimmt nach der Gleichung (635) der nöthige Kettenquerschnitt q zu, ihre Länge hingegen ab, und umgekehrt. Da nun die Herstellungskosten der Spannketten mit dem Gewichte im Verhältnisse stehen, und dieses letztere mit dem Producte aus der Kettenstärke und der Länge zu- und abnimmt, so ist klar, dass bei einem gewissen Abfallswinkel die Herstellungskosten für die Spannketten am kleinsten werden. Um diesen vortheilhaftesten Winkel zu finden, sei (Fig. 357)

Fig. 357.



die mit der Neigung variable Länge der Spannketten $AZ = \lambda$, und E die constante Entfernung des Horizontes, welcher durch das Ende Z gelegt wird, von dem Aufhängepuncte A.

Hiernach ist

$$\lambda = \frac{E}{\sin \alpha'} \text{ und } q = \frac{q \cos \alpha}{\cos \alpha'} \quad . \; . \text{ (s. Gleich. 635)},$$

somit

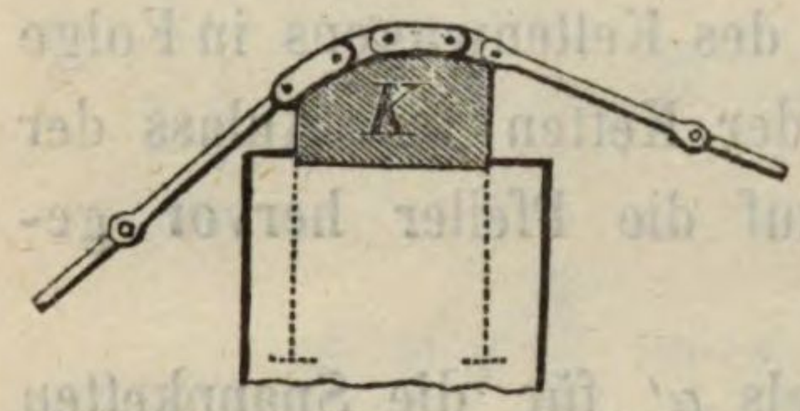
$$q\lambda = \frac{q E \cos \alpha}{\sin \alpha' \cos \alpha'} = \frac{2 q E \cos \alpha}{\sin 2 \alpha'}.$$

Dieses Product wird ein Minimum mit dem Maximalwerthe von $\sin 2\alpha'$, also für $\alpha' = 45^0$, wornach bei diesem Abfallswinkel die Herstellungskosten für die Spannketten am kleinsten werden. In der Praxis, wo man ausser den Spannketten auch die Pfeiler zu berücksichtigen hat, pflegt man die vortheilhafteste Neigung der Spannketten etwas sanfter, als 45^0 (nämlich 30 bis 40^0) anzunehmen, weil es in der Regel wünschenswerth ist, den Druck auf den Pfeiler nicht so gross werden zu lassen, als dieses für $\alpha' = 45^0$ der Fall wäre.

§. 310.

II. Fall. Der Pfeiler soll ausser einem verticalen Drucke auch einem Horizontalzuge ausgesetzt sein. In diesem Falle lässt man die Ketten über ein Kettenlager *K* (Fig. 358) gehen, welches mit dem Pfeiler fest verbunden ist. Das Kettenlager wird oben von einer kreisförmigen Cylinderfläche begränzt, und den aufliegenden Kettengliedern wird die entsprechende Krümmung, obwohl nur eine geringe Länge gegeben, um nämlich die Beweglichkeit der Ketten und hiernach das Gleiten derselben auf dem Lager zu erleichtern. Ein solches Gleiten wird aus Anlass der Elasticität des Kettenmateriales und der wechselnden Temperatur jedenfalls, wenn auch nur im geringen Masse, stattfinden.

Fig. 358.



Behufs der Erörterung dieses II. Falles untersuche man die Bedingungen des Gleichgewichtes zuerst ohne, dann mit Rücksicht auf die Reibung, welche zwischen dem Kettenlager und den darauf ruhenden Kettengliedern vorhanden ist. Obgleich in der Wirklichkeit die Reibung nie vollkommen beseitigt werden kann, so wird man doch die Resultate ohne Rücksicht auf die Reibung in der Praxis dann benützen können, wenn diese Reibung klein genug ist, um sie ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums vernachlässigen zu dürfen.

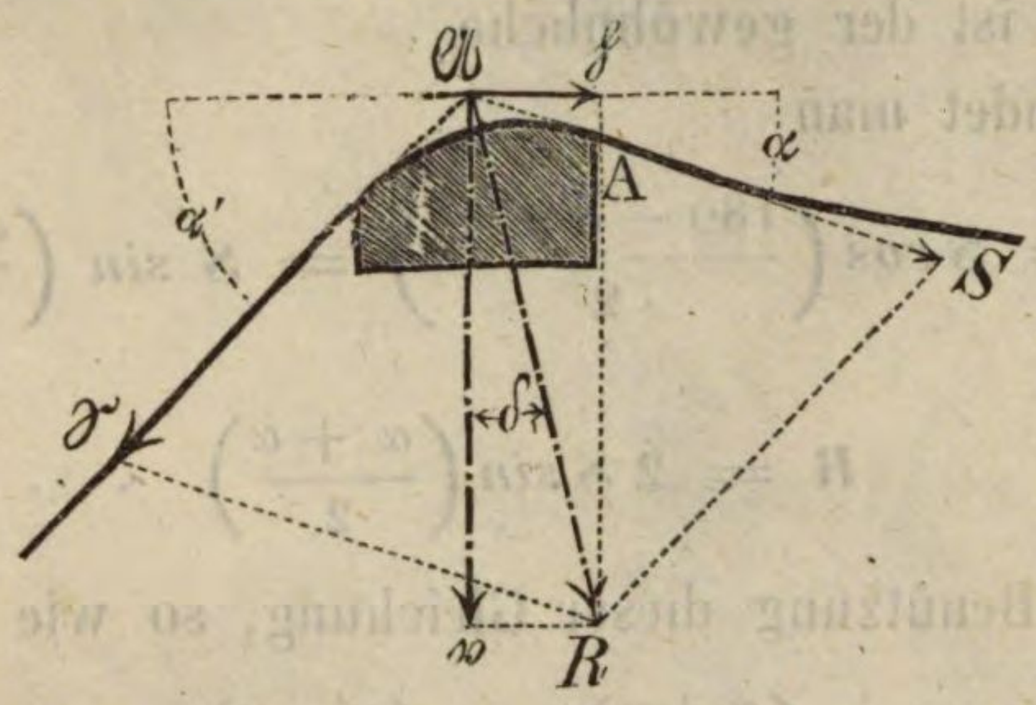
§. 311.

Die Reibung zwischen den Ketten und dem Kettenlager sei so gering, dass sie vernachlässigt wer-

den kann. Diese Annahme kann man in der Regel gelten lassen, wenn der Halbmesser der krummen Oberfläche des Kettenlagers nicht zu klein ist, und durch sorgfältiges Poliren dieses letzteren, das gewöhnlich aus Gusseisen angefertigt wird, das Gleiten der Ketten auf demselben möglichst erleichtert wird.

Es sei (Fig. 359)

Fig. 359.



S die Tangentialspannung in dem Aufhängepuncte A der Tragketten,

$\mathfrak{S}$ der Zug in den Spannketten,

$\mathfrak{A}$ der Durchschnitt beider Spannkräfte, durch welchen die Resultirende

R aus denselben zu ziehen ist,

$\mathfrak{h}$ die horizontale, $\mathfrak{v}$ die verticale } Componente dieser Resultirenden,

δ der Winkel, den sie mit der Verticalen einschliesst,

α der Aufhängewinkel der Tragketten, und

α' der Abfallswinkel der Spannketten.

Abgesehen von der Reibung sind offenbar die Spannungen in den beiderseitigen Ketten einander gleich, demnach ist

$$\mathfrak{S} = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (637)$$

zu setzen. In diesem Falle ist das aus den beiden Spannungen gebildete Kräftenparallelogramm ein Rhombus, und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(180^0 - \alpha - \alpha')$ wird durch ihre Resultirende R halbirt, so dass man hat

$$\delta + \tfrac{1}{2}(180^0 - \alpha - \alpha') + \alpha = 90^0$$

und hieraus

$$\delta = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (638).$$

Die Abweichung der Resultirenden R von der verticalen Richtung ist sonach der halben Differenz zwischen dem Abfalls- und Aufhängewinkel gleich. Insbesondere geht die Resultirende

für $\alpha' = \alpha$ genau vertical,

sonst aber schief, und zwar fällt dieselbe

für $\alpha' < \alpha$ auf die Seite der Spannketten,

für $\alpha' > \alpha$ hingegen auf jene der Tragketten.

Der letzte Fall ist der gewöhnliche.

Ferner findet man

$$\tfrac{1}{2} R = S \cos\left(\frac{180 - \alpha - \alpha'}{2}\right) = S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right),$$

somit

$$R = 2 S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639),$$

und sofort mit Benützung dieser Gleichung, so wie jener unter (638)

$$\mathfrak{h} = R \sin\delta = 2 S \sin\left(\frac{\alpha + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = S(\cos\alpha - \cos\alpha') =$$

$$= H\left(1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (640)$$

und

$$\mathfrak{v} = R \cos\delta = 2 S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = S(\sin\alpha + \sin\alpha') =$$

$$= \tfrac{1}{2} G\left(1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (641),$$

wenn man beachtet, dass $S \cos\alpha$ und $S \sin\alpha$ die Componenten von S nach horizontaler und verticaler Richtung sind, von welchen die erste der Horizontalspannung H in den Tragketten, die letzte aber dem halben Totalgewichte ($\frac{1}{2} G$) gleich ist.

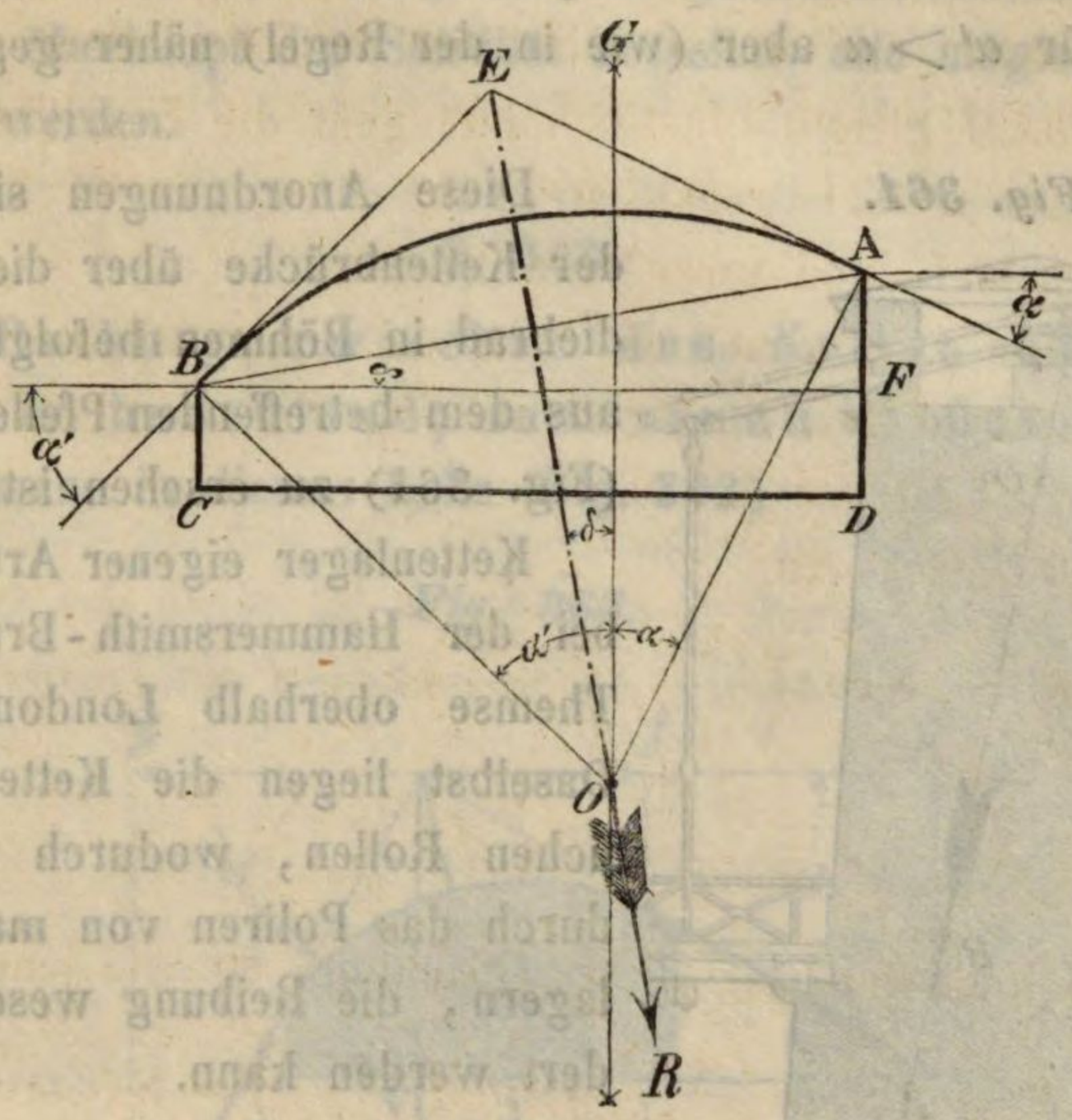
§. 312.

Bemerkungen über das Kettenlager. Wie man aus dem vorigen §. entnimmt, hat das Kettenlager in dem behandelten Falle die Form $ABCD$ (Fig. 360). Die Sehne AB der kreisförmigen Begränzung schliesst mit dem Horizontalen BF den Winkel

$$ABF = \delta = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)$$

ein, so dass der Punct A in der Regel höher liegt, als der Punct B, weil gewöhnlich $\alpha' > \alpha$ ist. Die beiden Radien AO und BO,

Fig. 360.



welche sich im Centrum *O* des Kreisbogens schneiden, schliessen mit der Verticalen *G O* beziehungsweise die Winkel α und α' ein, so zwar, dass

$$< AOG = \alpha, < BOG = \alpha' \text{ und } < AOB = (\alpha + \alpha')$$

ist. Die Resultirende *R* endlich geht durch den Mittelpunct *O* des Kreisbogens nach der Richtung *E O*, wobei *E* der Durchschnitt der beiden Tangenten an den Enden des Kreisbogens ist, indem auf diese Weise der Bedingung im vorigen §. gemäss der von jenen Tangenten eingeschlossene Winkel *A E B* halbirt wird.

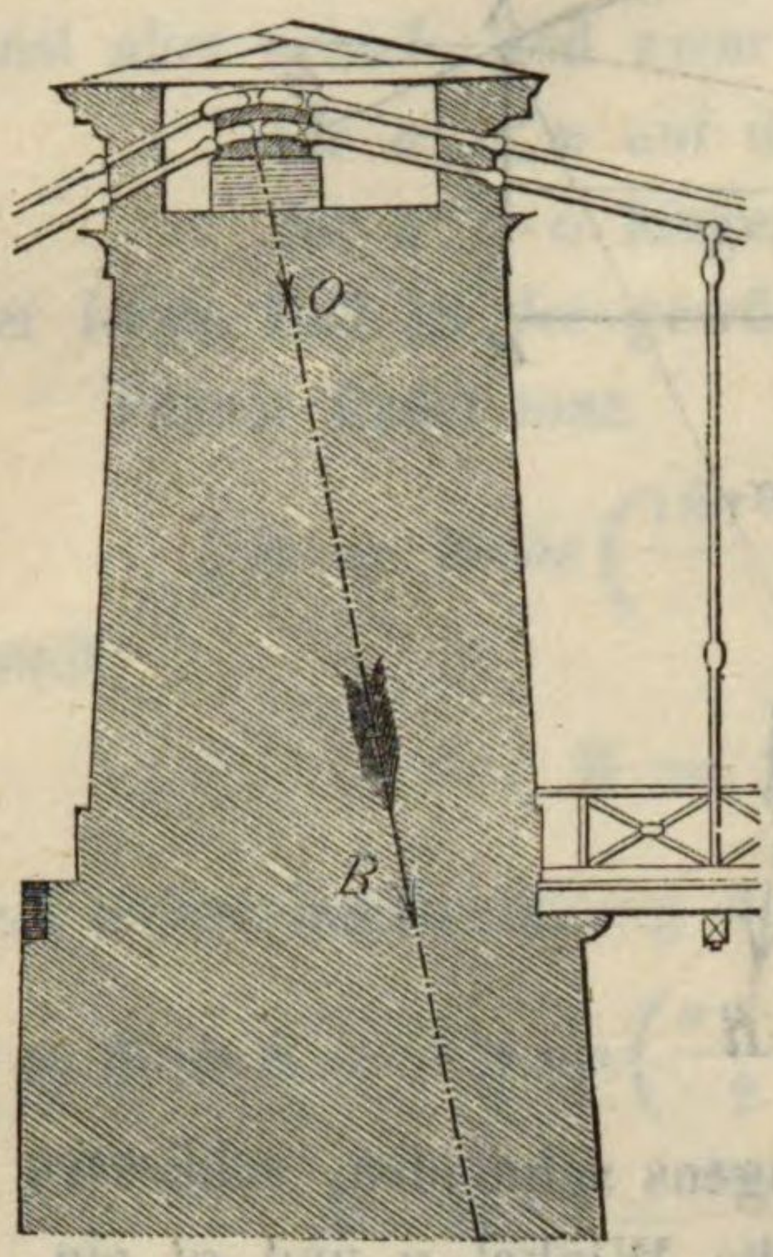
Betreffend die Stabilität des Pfeilers, so ist es offenbar angezeigt, die Resultirende *R* aus den beiderseitigen Kettenspannungen nicht zu nahe an d e Aussenfläche des Pfeilers kommen zu lassen. Zur Erreichung dieser Absicht sind folgende Anordnungen empfehlenswerth:

1. Man bringe die Werthe α und α' einander so nahe, als es die Umstände erlauben, um die Abweichung der Resultirenden *R* von der verticalen Richtung möglichst zu vermindern.

2. Man gebe dem Pfeiler eine angemessene Kronenbreite, und nöthigen Falls seinen Aussenflächen kleine Böschungen.

3. Man stelle das Kettenlager nur für $\alpha' = \alpha$ in die Mitte des Pfeilers, für $\alpha' > \alpha$ aber (wie in der Regel) näher gegen die Spannketten.

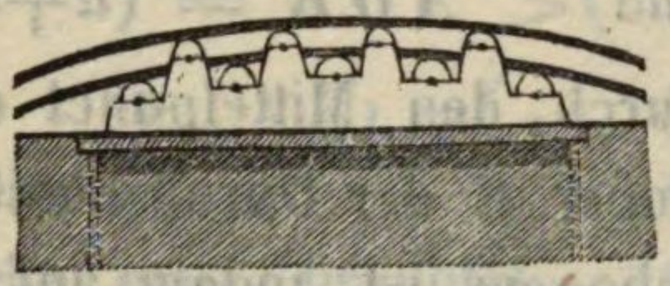
Fig. 361.



Diese Anordnungen sind z. B. bei der Kettenbrücke über die Elbe zu Podiebrad in Böhmen befolgt worden, wie aus dem betreffenden Pfeilerdurchschnitte (Fig. 361) zu ersehen ist.

Kettenlager eigener Art befinden sich bei der Hammersmith-Brücke über die Themse oberhalb London (Fig. 362). Daselbst liegen die Ketten auf beweglichen Rollen, wodurch eben so, wie durch das Poliren von massiven Kettenlagern, die Reibung wesentlich vermindert werden kann.

Fig. 362.



Die Anordnung von Kettenlagern, bei welchen die Reibung zwischen ihnen und den Ketten möglichst beseitigt wird, lässt im Vergleiche mit der Anordnung von Kettenwagen (§. 309) bestimmte Vor- und Nachtheile erkennen, wenn man den gewöhnlichen Fall $\alpha' > \alpha$ vor Augen hat.

Vortheile sind:

1. dass die Spannketten einen geringeren Zug auszuhalten haben, also einen kleineren Querschnitt benöthigen, überdiess dabei der Abfallswinkel α' keinen Einfluss hat, und

2. dass der Pfeiler einem geringeren Verticaldrucke ausgesetzt ist.

Nachtheile sind:

1. dass der Pfeiler einen auf das Umkanten abzielenden Horizontalzug zu erleiden hat, wornach derselbe aus Anlass der nöthigen grösseren Stabilität viel massiver herzustellen ist, und

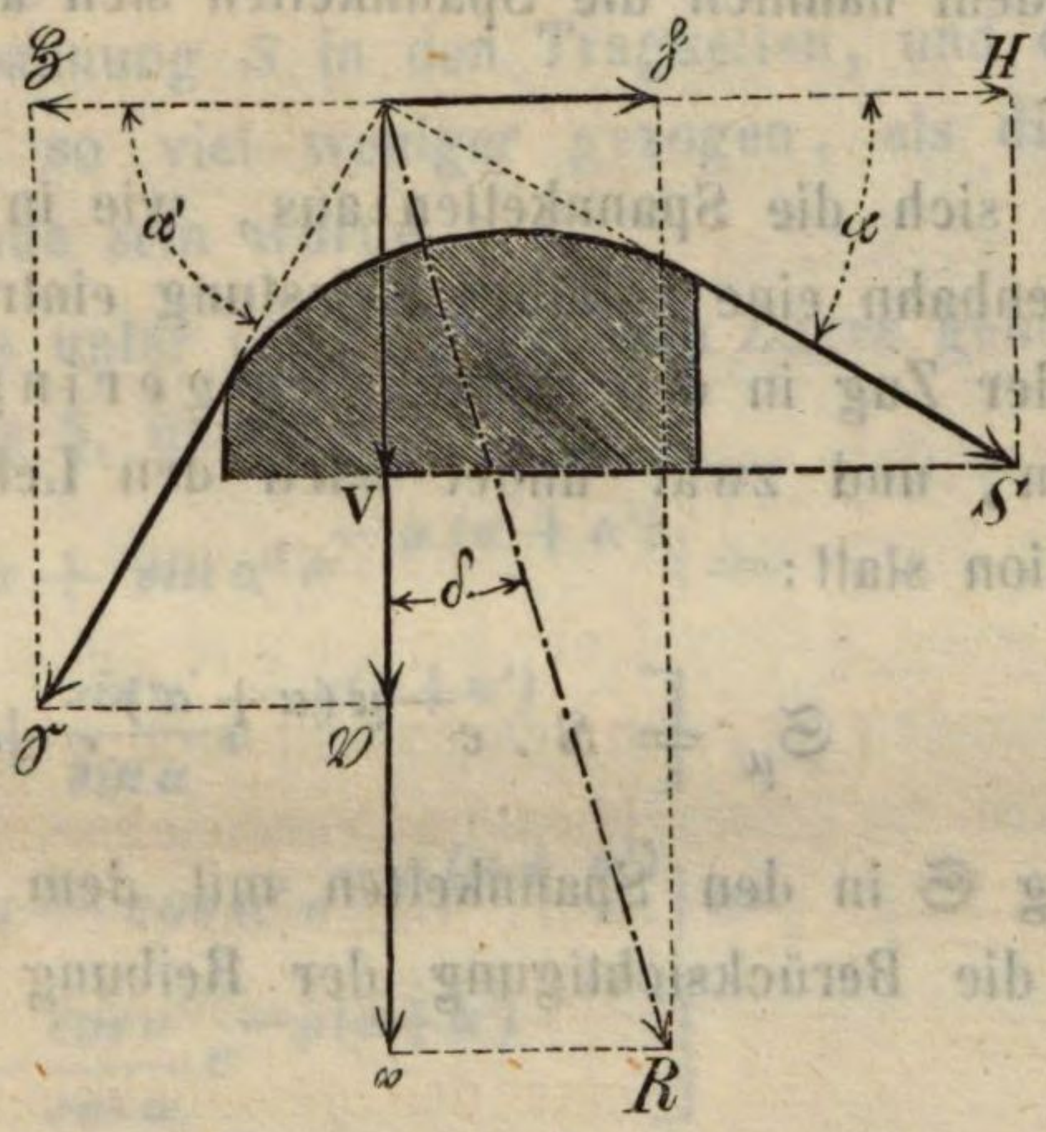
2. dass die auf den Pfeiler wirkende Besultirende R eine schiefe Richtung hat, und eine Schadhaftigkeit in seinem Mauerwerke durch ein ungleiches Setzen desselben desto eher zu besorgen ist, je grösser der Abfallswinkel gemacht wird. Aus diesem Grunde soll bei der

Herstellung des Pfeilers vorzüglich das gemischte Mauerwerk vermieden, und überhaupt der Solidität desselben alle mögliche Sorgfalt zugewendet werden.

§. 313.

Die Reibung zwischen den Ketten und ihrem Lager sei so bedeutend, dass sie zu berücksichtigen ist. Man nenne in diesem Falle (Fig. 363)

Fig. 363.



die Spannung in den Tragketten . . . . . S,
die verticale } Componente derselben . . . { V,
die horizontale } Componente derselben . . . { H,
den Zug in den Spannketten . . . . . $\mathfrak{S}$,
die verticale } Componente desselben . . . { $\mathfrak{V}$,
die horizontale } Componente desselben . . . { $\mathfrak{H}$,
die Resultirende aus beiden Spannungen S und $\mathfrak{S} = R$,
die verticale } Componente derselben . . . { $\mathfrak{v}$,
die horizontale } Componente derselben . . . { $\mathfrak{h}$,
und den Coefficienten der oben erwähnten Reibung μ,

während α, α' und δ die in der Figur bezeichneten Winkel vorstellen.

Hiernach ist vor Allem

$$V = S \sin\alpha = \tfrac{1}{2} G \quad \Big| \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{S} \sin\alpha' \quad \Big| \quad v = V + \mathfrak{V} = S \sin\alpha + \mathfrak{S} \sin\alpha'$$

$$H = S \cos\alpha = \frac{n}{8} G \quad \Big| \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{S} \cos\alpha' \quad \Big| \quad h = H = \mathfrak{H} = S \cos\alpha - \mathfrak{S} \cos\alpha'$$

$$tg\,\delta = \frac{h}{v} = \frac{S\cos\alpha - \mathfrak{S}\cos\alpha'}{S\sin\alpha + \mathfrak{S}\sin\alpha'} \text{ und } R = \sqrt{h^2 + v^2} = \frac{v}{\cos\delta} = \frac{h}{\sin\delta}.$$

Man hat nun zu unterscheiden, ob sich die Reibung dem Gleiten im Sinne der Kraft S oder jenem im Sinne der Kraft $\mathfrak{S}$ widersetzt, je nachdem nämlich die Spannketten sich ausdehnen oder zusammenziehen.

A) Dehnen sich die Spannketten aus, wie in dem Falle, wenn auf der Brückenbahn eine zufällige Belastung eintritt, so ist in Folge der Reibung der Zug in den Spannketten geringer, als jener in den Tragketten, und zwar findet nach den Lehren der Mechanik folgende Relation statt:

$$\mathfrak{S}_\mu = S \,.\, e^{-\mu(\alpha + \alpha')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (642),$$

wobei der Zug $\mathfrak{S}$ in den Spannketten mit dem Zeiger μ versehen wurde, um die Berücksichtigung der Reibung symbolisch anzudeuten.

Ferner ist $e = 2{\cdot}7182818..$ die Basis der natürlichen Logarithmen, und $(\alpha + \alpha')$ der Centriwinkel des kreisförmigen Kettenlagers, welcher nicht in Graden, sondern im Längenmasse für den Halbmesser 1 auszudrücken ist.

Der Reibungscoefficient μ kann verschiedene Werthe haben. Ist die Oberfläche des Kettenlagers aus Eisen und nicht abgeglättet, so wird der Werth von μ in der Nähe von $\frac{1}{4}$ liegen. Ist hingegen das Kettenauflager aus Stein, so hat μ einen grösseren Werth, der bis $\frac{1}{2}$ und darüber gehen kann.

Der Centriwinkel des kreisförmigen Kettenlagers, mit dessen Grösse der Reibungswiderstand zunimmt, kann bedeutend werden, indem zuweilen der Abfallswinkel der Spannketten α' ein Rechter ist.

Sei z. B. $\alpha = 15^0$, $\alpha' = 45^0$ und $\mu = \frac{1}{4}$, so findet man

$$(\alpha + \alpha') = 60^0 = \frac{\pi}{3} = 1{\cdot}0472., \; \mu\,(\alpha + \alpha') = 0{\cdot}2618.$$

und

$$e^{-\mu(\alpha+\alpha')} = (2{\cdot}7181828.)^{-0\,2618} = 0{\cdot}770,$$

daher

$$\mathfrak{S}_\mu = 0{\cdot}770\,S.$$

Wäre die Reibung nicht vorhanden, also $\mu = o$, so erhielte man

$$\mathfrak{S}_o = S,$$

d. h. der Reibungswiderstand in dem obigen Falle beträgt circa 23% von der Spannung S in den Tragketten, und die Spannketten werden um eben so viel weniger gezogen, als diess ohne jenem Reibungswiderstande sein würde.

Mit Hilfe des unter (642) gegebenen Zuges gehen die früheren Gleichungen dieses §. über in:

$$\mathfrak{v}_\mu = S\,[\sin\alpha + \sin\alpha'\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$\mathfrak{h}_\mu = S\,[\cos\alpha - \cos\alpha'\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}] =$$

$$= H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$tg\,\delta_\mu = \left[\frac{\cos\alpha - \cos\alpha'\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}}{\sin\alpha + \sin\alpha'\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')}}\right], \text{ endlich}$$

$$R_\mu = S\sqrt{[1 - 2\cos(\alpha+\alpha')\,e^{-\mu(\alpha+\alpha')} + e^{-2\mu(\alpha+\alpha')}]},$$

wenn man auch hier durch die Zeiger μ die Berücksichtigung der Reibung symbolisch andeutet. Vernachlässigt man die Reibung, so ist $\mu = o$ und

$$\mathfrak{v}_o = \tfrac{1}{2}G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right], \; \mathfrak{h}_o = H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right],$$

$$tg\,\delta_o = \left(\frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}\right) = tg\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) \text{ d. i. } \delta_o = \left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) \text{ und}$$

$$R = S\sqrt{[2 - 2\cos(\alpha+\alpha')]} = 2\,S\sin\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right),$$

welche Gleichungen mit jenen im §. 311 übereinstimmen. Durch die Vergleichung der gefundenen Relationen ergibt sich nun

$$\mathfrak{S}_\mu < \mathfrak{S}_o,\ \mathfrak{v}_\mu < \mathfrak{v}_o,\ \mathfrak{h}_\mu > \mathfrak{h}_o,\ \delta_\mu > \delta_o \text{ und } R_\mu < R_o,$$

wesshalb der Zug in den Spannketten, der Verticaldruck auf den Pfeiler und auch die auf ihn einwirkende Resultirende aus den beiderseitigen Kettenspannungen desto kleiner, hingegen die auf das Umkanten des Pfeilers abzielende Horizontalkraft und die Abweichung der erwähnten Resultirenden von der verticalen Richtung desto grösser werden, je beträchtlicher die Reibung zwischen den Ketten und ihren Lagern ist.

Von dieser einen Seite aus betrachtet (nämlich in dem Falle ad *A*) hat daher die Vermehrung der fraglichen Reibung sowohl Vortheile, als auch Nachtheile.

B) Ziehen sich die Spannketten zusammen, so werden sich augenscheinlich die Resultate verkehren, indem dann in Folge des Reibungswiderstandes die Spannung $\mathfrak{S}$ grösser sein wird, als *S*. Dieser Fall kann eintreten, wenn während der Zeit, als die zufällige Belastung auf der Brücke vorhanden ist, die Temperatur sich wesentlich vermindert. Sodann wird man die entsprechenden Resultate aus denen ad *A* finden, wenn man $-\mu$ statt $+\mu$ setzt, und umgekehrt. Hiernach erhält man unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

$$\mathfrak{S}_{-\mu} = S \cdot e^{+\mu(\alpha+\alpha')} \quad \ldots \quad (643)$$

$$\mathfrak{v}_{-\mu} = S\left[\sin\alpha + \sin\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$\mathfrak{h}_{-\mu} = S\left[\cos\alpha - \cos\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right] =$$

$$= H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$tg\,\delta_{-\mu} = \left[\frac{\cos\alpha - \cos\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}}{\sin\alpha + \sin\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}}\right], \text{ endlich}$$

$$R_{-\mu} = \sqrt{\left[1 - 2\cos(\alpha+\alpha') e^{+\mu(\alpha+\alpha')} + e^{+2\mu(\alpha+\alpha')}\right]}.$$

So findet man für das Beispiel ad *A* wegen $\alpha = 15^0, \alpha' = 45^0$ und $\mu = \frac{1}{4}$

$$\mathfrak{S}_\mu = 1{\cdot}299\, S.$$

Auch ist

$$\mathfrak{S}_\mu \cdot \mathfrak{S}_{-\mu} = S^2 \text{ oder } \mathfrak{S}_\mu : S = S : \mathfrak{S}_{-\mu}.$$

Vergleicht man die hier gefundenen Resultate mit jenen, wo keine Reibung angenommen ist, so folgt

$$\mathfrak{S}_{-\mu} > \mathfrak{S}_o,\ v_{-\mu} > v_o,\ \mathfrak{h}_{-\mu} < \mathfrak{h}_o,\ \delta_{-\mu} < \delta_o \text{ und } R_{-\mu} > R_o,$$

wesshalb in diesem Falle ad *B* verglichen mit dem Falle ad *A* die Vor- und Nachtheile der Reibung sich geradezu verkehren.

Für die Praxis, wo man offenbar den Eintritt beider Fälle ad *A* und *B* zu gewärtigen hat, können daher die einseitig vorhandenen Vortheile, welche durch die Vermehrung der Reibung zwischen den Ketten und ihrem Lager erreicht werden könnten, nicht in Betracht kommen, so dass nur die Nachtheile einer solchen Anordnung übrig bleiben. Hieraus schliesst man, dass es vortheilhaft ist, die Reibung zwischen den Ketten und ihren Lagern auf den Landpfeilern auf ein Minimum zu bringen.

§. 314.

Mittelpfeiler. In den §§. 310, 311, 312 und 313 handelt es sich nur um sogenannte Landpfeiler. Bei den Mittelpfeilern hingegen ist es jedenfalls vorzuziehen, die Ketten mit ihrem Lager und dieses wieder mit den Pfeilern fest zu verbinden, welches letztere mittelst Verankerungsketten, die von den Pfeilerköpfen bis in das untere Pfeilermauerwerk geführt werden, in zweckmässiger Weise geschehen kann. Dabei ist die Pfeilerstärke nach der ungünstigsten Belastungsweise zu beurtheilen, welche indessen nicht mehr bei dem Eintritte der grössten zufälligen Belastung auf der ganzen Brücke, sondern augenscheinlich dann stattfinden wird, wenn von den zu beiden Seiten eines Mittelpfeilers vorhandenen Brückenfeldern nur das eine zufällig belastet, das andere aber von einer solchen Belastung ganz frei ist. Doch gilt auch bei den Mittelpfeilern die schon bezüglich der Herstellung der Landpfeiler gemachte Bemerkung,

dass nämlich bei der Aufführung des Mauerwerkes mit der grössten Vorsicht zu Werke gegangen, insbesondere für eine genaue und innige Verbindung der einzelnen Steine und Steinschichten unter einander Sorge getragen, und zur möglichsten Verhinderung ungleicher Setzungen das gemischte Mauerwerk vermieden werden soll.

§. 315.

Verankerung der Spannketten an ihrer Wurzel.

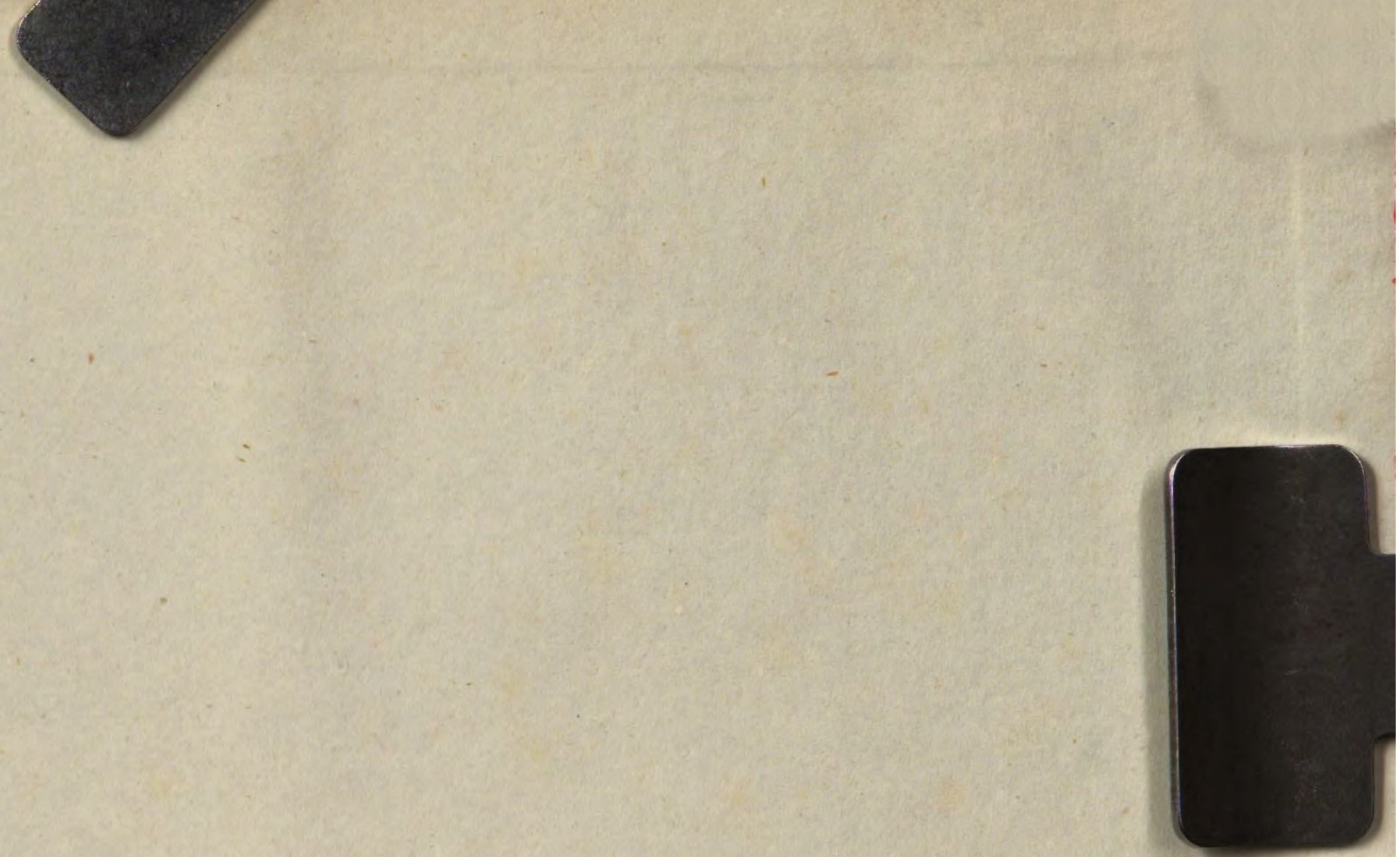
Dieser Verankerung ist eine grosse Aufmerksamkeit zuzuwenden, indem ein Versehen in dieser Hinsicht leicht den Ruin der ganzen Kettenbrücke herbeizuführen im Stande ist. Durch Rechnung kann man zwar den Zug in den Spannketten finden, und daraus rückwärts auf die nöthige Solidität der erwähnten Befestigungsweise schliessen, doch kann diese letztere selbst auf verschiedene Art stattfinden. Ohne in das Detail der bisher zur Anwendung gekommenen Befestigungsarten einzugehen, das besser aus den speciellen Beschreibungen von ausgeführten Kettenbrücken zu studiren ist, sei hier nur bemerkt, dass es jedenfalls am sichersten erscheint, die Spannketten in grosse Massen von solid construirtem Mauerwerk derart zu verankern, dass sich die Wirkung des Kettenzuges so ziemlich auf das ganze massenhafte Mauerwerk erstreckt, ohne dass einzelne kleinere Theile desselben herausgerissen werden können. Zugleich ist aber auch die Anordnung so zu treffen, dass die Oxydation der Kettenglieder ferne gehalten, und so der Schwächung derselben möglichst entgegengewirkt werde.

Fehler-Verzeichniss.

Seite.	Zeile.	statt:	lies:
8	11 v. u.	$\Delta l_1 + \Delta l_2$	$(\Delta_1 l + \Delta_2 l)$
9	14 „	Fructionszeichen	Functionszeichen
11	7 v. o.	$K' O' V'$	$K' O V'$
12	1 „	kann man mit	kann mit
12	11 v. u.	Erklärungspunct	Erklärungsgrund
13	3 u. 6 „	K	k
14	20 v. o.	müsse.	müssen.
28	1 v. u.	Nothrücken	Nothbrücken
42	18 v o.	Gleichung (12)	Gleichung (13)
48	14 „	$r = 160$ und 125000	$r = 240$ und $m = 125000$
48	17 „	$0{\cdot}1024\, l$	$0{\cdot}2304\, l$
48	22 „	1 : 4	1 : 9
49	2 v. u.	0·1024	0·2304
49	1 „	1·28	2·88
50	22 v. o.	indess die des Schmiede-eisens nicht	auch die des Schmiedeeisens
50	5 v. u.	sid	sind
56	4 „	derselben	der Kraft oder der Kräfte
56	3 „	theilen.	theilen, welche eine solche Biegung hervorbringt oder hervorbringen.
89	10 v. o.	$\alpha^2 \beta$	$\alpha^2 \beta^2$
93	13 „	$\frac{d^2 y}{dx}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
111	1 „	$(c - x)$	$(c - x)^3$
112	5 v. u.	$s_1 = \frac{h R z}{t}$	$s_1 = \frac{h' R z}{t}$
126	3 „	$\frac{1}{6} r f$	$\frac{1}{6} r f \beta$
140	16 v. o.	$\frac{1}{4}(Q_3 + \frac{1}{2} Q_4) = M$	$\frac{1}{4}(Q_3 + \frac{1}{2} Q_4) l = M$
141	1 „	h'	$h' l$
141	2 „	h''	$h'' l$
161	7 „	h'	h'^2

Seite.	Zeile.	statt:	lies:
166	1 v. o.	^2a	a^2
166	2 „	^2r	r^2
207	5 v. u.	$\frac{aT}{\alpha'}$	$\frac{aT}{\alpha''}$
221	11 v. o.	des	dieses
225	9 v. u	$\frac{t'}{h}$	$\frac{t'}{h'}$
240	19 v. o.	$+(2n-1)^3]$;	$+(2n-1)^3]FH_1^2$;
240	22 „	$+(2n-1)^3]$.	$+(2n-1)^3]FH_1^2$.
261	26 „	zwischer	zwischen
299	1 v. u.	Relationen	Relationen (151)
326	5 v. o.	l^8	l^8
334	13 „	Werthe	Gleichungen
352	14 „	l^8	l^8
355	2 „	l^2	l^3
361	1 v. u.	624	264
379	5 v. o.	$Dn-1$	$Dn+1$
380	3 „	$\frac{\Delta N+2}{2}$	$\frac{\Delta N+1}{2}$
393	1 v. u.	1·10065	1·0065
417	16 „	nur	nun
455	6 „	$=$	$<$
466	12 „	Berbin-	Verbin-
474	6 v. o.	Werthe a	Werthe a'
536	1 „	3. und 4.	4. und 5.
541	8 v. u.	Formeln.	Formeln
541	5 „	f''	f'''
568	3 v. o.	ad 6	ad 7.

Staatl.Bibliothek
Regensburg



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rebhann, Georg

Höhere Ingenieurwissenschaften Theorie der Holz- und Eisen-Construktionen ; mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen

Wien 1856

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.7033
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112411-5